UMSS

大学数学科学丛书 — 22

随机微分方程

胡适耕 黄乘明 吴付科 著

科学出版社
www.sciencep.com

VISIT…

LANZAROTE Caliente.com

0211.63/5
2008

大学数学科学丛书 22

随机微分方程

胡适耕 黄乘明 吴付科 著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书介绍Itô型随机微分方程(包括随机泛函微分方程与中立型随机微分方程)的基本理论与研究进展.前半部分简要介绍随机微分方程的基本概念与一般理论，然后以较大篇幅综述该领域若干有代表性的近期研究成果，其内容集中于随机微分方程解的渐近状态，包括稳定性、有界性、持久性、非爆发性等.特别深入讨论了有重要应用价值的随机神经网络系统与随机Lotka-Volterra系统. 部分内容为作者的近期研究成果.

本书可用作相关专业研究生的教材或高校教师的参考书，亦可供有兴趣于随机微分系统的科技工作者阅读.

图书在版编目(CIP)数据

随机微分方程/胡适耕，黄乘明，吴付科著. —北京：科学出版社，2008

(大学数学科学丛书；22)

ISBN 978-7-03-021380-8

Ⅰ.随… Ⅱ.①胡… ②黄… ③吴… Ⅲ.随机微分方程 Ⅳ.O211.63

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第034312号

责任编辑：吕 虹 赵彦超／责任校对：赵桂芬

责任印制：赵德静／封面设计：王 浩

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

新蕾印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008年5月第 一 版 开本：B5(720×1000)

2008年5月第一次印刷 印张：24 1/4

印数：1—3 000 字数：366 000

定价：68.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈新欣〉)

《大学数学科学丛书》编委会

（以姓氏笔画为序）

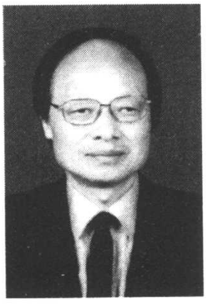
顾　问：王　元　谷超豪　姜伯驹

主　编：李大潜

副主编：龙以明　冯克勤　张继平　袁亚湘

编　委：王维克　尹景学　叶向东　叶其孝
李安民　李克正　吴宗敏　吴喜之
张平文　范更华　郑学安　姜礼尚
徐宗本　彭实戈

作 者 简 介



胡适耕，湖南湘乡人．1967 年毕业于湖南大学数学系，1979 年起在华中理工大学(即今华中科技大学)任教．现为华中科技大学数学系教授、博士生导师，并兼任《应用数学》杂志常务副主编．

长期从事基础数学与应用数学的教学和研究，主要研究领域为非线性动力系统与随机动力系统．发表了一系列研究论文与著作，代表性著作有《非线性分析》、《抽象空间引论》、《宏观经济的随机模型》等．

《大学数学科学丛书》序

按照恩格斯的说法，数学是研究现实世界中数量关系和空间形式的科学．从恩格斯那时到现在，尽管数学的内涵已经大大拓展了，人们对现实世界中的数量关系和空间形式的认识和理解已今非昔比，数学科学已构成包括纯粹数学及应用数学内含的众多分支学科和许多新兴交叉学科的庞大的科学体系，但恩格斯的这一说法仍然是对数学的一个中肯而又相对来说易于为公众了解和接受的概括，科学地反映了数学这一学科的内涵．正由于忽略了物质的具体形态和属性、纯粹从数量关系和空间形式的角度来研究现实世界，数学表现出高度抽象性和应用广泛性的特点，具有特殊的公共基础地位，其重要性得到普遍的认同．

整个数学的发展史是和人类物质文明和精神文明的发展史交融在一起的．作为一种先进的文化，数学不仅在人类文明的进程中一直起着积极的推动作用，而且是人类文明的一个重要的支柱．数学教育对于启迪心智、增进素质、提高全人类文明程度的必要性和重要性已得到空前普遍的重视．数学教育本质是一种素质教育；学习数学，不仅要学到许多重要的数学概念、方法和结论，更要着重领会数学的精神实质和思想方法．在大学学习高等数学的阶段，更应该自觉地去意识并努力体现这一点．

作为面向大学本科生和研究生以及有关教师的教材，教学参考书或课外读物的系列，本丛书将努力贯彻加强基础、面向前沿、突出思想、关注应用和方便阅读的原则，力求为各专业的大学本科生或研究生（包括硕士生及博士生）走近数学科学、理解数学科学以及应用数学科学提供必要的指引和有力的帮助，并欢迎其中相当一些能被广大学校选用为教材，相信并希望在各方面的支持及帮助下，本丛书将会愈出愈好．

李大潜

2003 年 12 月 27 日

前　言

半个多世纪之前，当 Itô 的划时代著作 *On Stochastic Differential Equations*（Itô, 1951）面世时，对于"随机微分方程"（SDE）这一新的数学分支的要义、价值与前景，人们能够确切说明的东西尚不多. 经历半个多世纪堪称辉煌的发展之后，SDE 已负盛名，但人们似乎仍然难以评说——不是因为材料缺乏，而是因为材料实在太多！今天，SDE 已积累了如此丰富的成果，欲加以适当的概括以睹其全貌已非易事.

尽管如此，有两件重要的事情无论如何值得一提.

其一就是，SDE 在其发展过程中展示出与某些经典数学问题之间存在着出人意料的深刻联系，最著名的例子就是 Feynman-Kac 公式，它将一定偏微分方程（PDE）问题的解表为适当的 SDE 的解，从而为在 PDE 的研究中使用随机分析方法开辟了道路. 无论这一联系所导致的实际结果如何，在两个看来相距甚远的领域建立起明确的联系，在整个数学发展史上都是值得大书特书的事件. 这一事实令人信服地表明，建立在初看起来颇为诡异的随机微积分基础上的 SDE，并非纯粹是概率论学者独特思想的逻辑衍生物，而是现代数学统一理论大厦中一个自然的部分. 在 Feynman-Kac 公式这类成果面前，随机数学与非随机数学之间看来难以逾越的鸿沟最终消失了. 仅此一端，就不能不说是过去这个世纪数学发展进程中的一件大事.

SDE 理论中另一件值得一提的大事是：一些明显不稳定的确定性微分系统，因随机扰动的介入居然可能成为稳定的系统. 这就完全颠覆了人们对于随机扰动似乎理所当然的负面看法，人们终于明白，在动态过程中，随机扰动或噪声并非总是不稳定或紊乱的根源，而且在特定情况下甚至是镇定系统所必需的. 这一事实的发现，其理论价值也许不及 Feynman-Kac 公式那么重大，但其实际意义则可能更大. 它实际上宣告，即使对于确定性系统的稳定性研究，SDE 也是必需的. 大而言之，上述事实恰好印证了数学发展中的一条普通规律：对于一个旧体系的真正深刻理解来自该体系的某个新的扩展. 从实分析到复分析的扩展提供了熟知的例子，而从通常微分方程理论过渡到 SDE 理论，则可能是更令人振奋的例子.

或许，使以上两件事都显得黯然失色的是 SDE 在范围广泛的领域中卓有成效的应用. 近几十年来，SDE 在物理、力学、化学、生物学、经济与金融学、控制理论、航天工程等多个部门发挥了重要作用，已有不可计数的文献作证. 尽管这些应用的某些方面本书有所涉及，但在总体上加以概括，则远非本书作者的学识所能胜任. 我

们只能指出如下已成定论的事实:对于许多实际领域的专家而言,为运用强有力的现代数学工具,对所考察的系统建立某种**随机模型**常常是不可避免的,而这往往就意味着运用 SDE!

正是这样一种广泛而又实际的需求,促使我们生出了一种冲动:应当为希望运用 SDE 这一工具的科学工作者做点什么. 这就是写作本书的意图. 同时,我们也意识到,只能将目标限定在一个较小的题目上,即限于考虑 Itô 型的 SDE,而且将重点放在以稳定性理论为中心的问题上,这既是本书作者研究兴趣所及的领域,似乎也是许多研究者的关注点之所在.

就其渊源而言,本书所涉及的问题已有颇长的研究历史. 大约十年前,当本书作者听英藉华裔教授毛学荣关于 SDE 稳定性的讲演时,对于贯穿于其中的基本思想就已颇有感触. 这些思想除了其特有的效力之外,即使从纯数学方法论的角度考虑,也是很有价值的,甚至可以说是异常优美的. 这些体验与理解对于本书的形成不无作用.

在写作本书时,我们充分利用了 20 年来 SDE 领域的大量文献,其中尤其要提到毛学荣等人影响深远的系列工作. 作为合作者,本书作者在与毛学荣等的讨论中受益匪浅,由衷感激,自不待言. 本书也包含了作者及其合作者近年来的某些研究成果. 特别,第 4 章的大部分结果(其主导思想或表达方法)是属于作者及其合作者的. 就这些部分而言,对于同行们的批评自然有特别的期待.

为方便读者阅读,本书一开始就汇集了所用的主要记号以供查询,但仍需作点说明. 首先,作者力求使用通用的记号,但一本专著要使散见于各种文献的材料连成一气,记号上的统一与调整难度较大, 有些符号没有使用通用记号总是不可避免的. 此外,有少数几个似乎源于作者偏爱的记号,在简化公式与富于启发性两方面都效果显著,即使可能引发异议,也不能割爱了. 特别要提到的是 $\bar{x}(t) = x(t) - u(x_t)$ 与 Hale 倡用的 $C(=C([-\tau,0],\mathbf{R}^d))$ 这两个例子(参看 §3.1 与 §3.3).

本书的写作得到国家自然科学基金及华中科技大学研究生院专项基金的资助,在此谨致以诚挚的感谢.

作　者

2007 年 4 月于武汉

记号与约定

A^c	集 A 的补；$A\backslash B = A \cap B^c$
A^{T}	矩阵 A 的转置
a. s.	几乎必然
BSDE	倒向随机微分方程
$\mathscr{B}$	通常记 Borel 集族
$\mathscr{B}_E$	空间 E 中的 Borel 集族
$\mathscr{B}^d$	$\mathscr{B}_{\mathbf{R}^d}$
C	$C([-\tau,0],\mathbf{R}^d)$
C_{++}	$C([-\tau,0],\mathbf{R}^d_{++})$
C^r	r 阶连续可微函数类
$C^{1,2}$	对 t 为 C^1 类对 x 为 C^2 类的函数 $V(t,x)$ 之全体
$C^b_{\mathscr{F}_t}(\Omega,C)$	$\mathscr{F}_t$ 可测有界 C 值随机变量之全体
$\mathrm{cov}(X,Y)$	X 与 Y 的协方差或协方差矩阵
$\mathrm{d}x(t)$	随机函数 $x(t)$ 的 Itô 微分
δ_{ij}	Kronecker 记号
$\mathrm{E}X$	随机变量 X 的期望
$\mathrm{E}(\cdot\mid\mathscr{A})$	在 $\mathscr{A}$ 下的条件期望；$\mathrm{E}_t(\cdot) = \mathrm{E}(\cdot\mid\mathscr{F}_t)$；$\mathrm{E}(\cdot\mid Y) = \mathrm{E}(\cdot\mid\sigma(Y))$
$F_X(\cdot)$	随机变量 X 的分布函数
$F(s,x,t,y)$	$P(X_t \leqslant y \mid X_s = x)$
$F(t,x,y)$	$F(0,x,t,y)$
FDE	泛函微分方程
$\mathscr{F}$	基本的 σ 代数；$\mathscr{F}_t$:σ 代数流；$\mathscr{F}_\infty = \sigma\left(\bigcup_{t\geqslant 0}\mathscr{F}_t\right)$
$\mathscr{F}^X_t$	随机过程 X_t 生成的 σ 代数流
$f_X(\cdot)$	随机变量 X 的密度函数
$f(s,x,t,y)$	转移密度；$f(t,x,y) = f(0,x,t,y)$
$\varphi_X(\cdot)$	随机变量 X 的特征函数
I	单位矩阵或某个区间
I_A	集 A 的示性函数

J	某个紧空间,通常指 $[t_0,T]$;$J_\tau=[t_0-\tau,T]$;下标 j 的变程
$K,\bar{K}$	通常记某个正常数
$\mathscr{L}$	通常记结合 SDE 的微分算子
L^p	p 次可积函数(或随机变量)的空间
$L^p_{\mathscr{F}_t}(\Omega,\mathbf{R}^d)$	p 次可积 $\mathscr{F}_t$ 可测的 $\mathbf{R}^d$ 值随机变量之空间; $L^p_{\mathscr{F}_t}(\Omega,C)$ 仿此
$\mathscr{L}^p$	沿轨道 p 次可积的随机函数之空间
$LV(t,x(t))$	$\mathrm{d}V(t,x(t))=LV(t,x(t))\mathrm{d}t+(\cdots)\mathrm{d}w(t)$
$\lambda_{\max}(A)$	对称矩阵 A 的最大特征值, $\lambda_{\min}(A)$ 仿此; $\lambda^p_{\max}(A)=[\lambda_{\max}(A)]^p$
$\mathscr{M}^p$	满足 $\mathrm{E}\int_{t_0}^T\|x(t)\|^p\mathrm{d}t<\infty$ 的函数 $x(t)$ 之空间
$\mathbf{N}$	自然数集; $\bar{\mathbf{N}}=\mathbf{N}\cup\{\infty\}$
$N(\mu,\sigma^2)$	一维正态分布; $N(\mu,\Sigma)$: 多维正态分布
NSFDE	中立型 SFDE
n	通常记非负整数
ODE	常微分方程
P	概率; P_X: 随机变量 X 的分布
$P(\cdot\mid B),P(\cdot\mid\mathscr{A}),P(\cdot\mid Y=y)$	均表条件概率
$P(s,x,t,B)=P(X_t\in B\mid X_s=x)$	
Q	通常记某个正定或半正定矩阵
$\mathbf{R}$	实数域; $\mathbf{R}^d$:d 维 Euclid 空间; $\mathbf{R}^{d\times m}$:$d\times m$ 矩阵之全体
$\mathbf{R}_+=[0,\infty)$;$\bar{\mathbf{R}}_+=\mathbf{R}_+\cup\{\infty\}$;$\mathbf{R}^d_+=(\mathbf{R}_+)^d$;$\mathbf{R}^d_{++}$ 记 $\mathbf{R}^d_+$ 之内部	
SDDE	随机延迟微分方程
SDE	随机微分方程
SFDE	随机泛函微分方程
$\operatorname{sgn}x$	符号函数
$\Sigma=[\sigma_{kl}]$	协方差矩阵
$\sigma(\mathscr{A})$	集族 $\mathscr{A}$ 生成的 σ 代数
$\sigma(A)$	矩阵 A 的谱
$\sigma(X)$	随机变量 X 生成的 σ 代数
$\sigma(X_t,t\in T)$	$\sigma\left(\bigcup_{t\in T}\sigma(X_t)\right)$
$\operatorname{tr}(A)$	矩阵 A 的迹
τ	停时或时滞
$\operatorname{Var}(\cdot)$	方差; $\operatorname{Var}_t(\cdot)=\operatorname{Var}(\cdot\mid\mathscr{F}_t)$

w	记某个 Brown 运动; $w = (w_1, w_2, \cdots, w_m)^T$: m 维 Brown 运动
$X_t, X(t)$ 或 $x(t)$	通常记随机过程
x_t	$x(t+\cdot) \in C$
$\mathbf{Z}$	整数集; $\mathbf{Z}_+$: 非负整数集; $\bar{\mathbf{Z}}_+ = \mathbf{Z}_+ \cup \{\infty\}$
Ω	记取定的概率空间; ω 通常记 Ω 中的元
$\triangleq$	定义为; $\equiv$: 恒等于; $\approx$: 近似于
$\square$	定理或命题证完

几 点 说 明

1. 指标用法　不致误解时，符号 $\sum$，$\prod$，$\cup$，$\cap$ 下的指标均予省略；和式 $\sum a_i$ 依情况可写作：

$$\sum_{i\in I} a_i,\ \sum_{i=1}^{n} a_i,\ \sum\nolimits_{i=1}^{n} a_i,\ \sum\nolimits_{1}^{n} a_i \text{ 或} \sum_{i} a_i;$$

$\prod a_i$，$\cup A_i$ 等仿此. 任给 $x\in\mathbf{R}^d$，$f: J\to\mathbf{R}^d$ 与 $g: J\to\mathbf{R}^{d\times m}$，总自动地认定 $x=(x_1, x_2,\cdots,x_d)^{\mathrm{T}}$，$f=(f_1,f_2,\cdots,f_d)^{\mathrm{T}}$，$g=[g_{ij}]$. 下标 n 总表示非负整数.

2. 极限记号　$\lim\limits_{n} x_n$ 记 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$，$\lim\limits_{t\downarrow 0}\varphi(t)$ 记 $\lim\limits_{0<t\to 0}\varphi(t)$；$\rightrightarrows$ 记一致收敛；$\xrightarrow{\text{a.s.}}$ 记几乎必然收敛；$\xrightarrow{L^p}$ 记 L^p 收敛；$\xrightarrow{\text{m.s.}}$ 或 l.i.m 记均方收敛；$\xrightarrow{P}$ 或 (P)lim 记依概率 P 收敛；$\xrightarrow{d}$ 记分布收敛.

3. 范数　$|\cdot|$ 记 $\mathbf{R}^d$ 中的 Euclid 范数或 $\mathbf{R}^{d\times m}$ 中的迹范数；$\|\cdot\|_p$ 记 L^p 范数；$\|\cdot\|$ 记 $C([-\tau,0],\mathbf{R}^d)$ 中的上确界范数或 $\mathbf{R}^{d\times m}$ 中的算子范数.

4. 集记号　2^X 记集 X 的子集之全体；$\{f<a\}=\{\omega\in\Omega: f(\omega)\leqslant a\}$，余仿此.

5. 序记号　设 $x,y\in\mathbf{R}^d$，则 $x\leqslant y\Leftrightarrow x_i\leqslant y_i(1\leqslant i\leqslant d)$；设 $A,B\in\mathbf{R}^{d\times m}$，则 $A\leqslant B\Leftrightarrow a_{ij}\leqslant b_{ij}(1\leqslant i\leqslant d,1\leqslant j\leqslant m)$；设 $f,g: J\to\mathbf{R}^d$，则 $f\leqslant g\Leftrightarrow f(t)\leqslant g(t)(\forall t\in J)$. $a\vee b=\max\{a,b\}$；$a\wedge b=\min\{a,b\}$；$a^+=a\vee 0$；$a^-=(-a)^+$. 对 $a=(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in\mathbf{R}^n$，记 $\hat{a}=\min\limits_i a_i$，$\check{a}=\max\limits_i a_i$.

6. const 的用法　当 const 出现在式子中时，它表示某个常数，其具体数值无法或不必明确写出.

7. 矩阵　通常将 $A\in\mathbf{R}^{m\times n}$ 写作 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$；$\mathrm{diag}(x)=\mathrm{diag}(x_1,x_2,\cdots,x_d)$.

8. 导数　设 $V\in C^{1,2}(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^d)$，则约定 $V_x=\left(\frac{\partial V}{\partial x_1},\frac{\partial V}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial V}{\partial x_d}\right)^{\mathrm{T}}$，$V_{xx}=\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x_i\partial x_j}\right]_{d\times d}$，$x=(x_1,x_2,\cdots,x_d)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^d$.

目　　录

第 1 章　随机过程 ······ 1
§1.1　随机变量 ······ 1
1.1.1　概率空间 ······ 1
1.1.2　随机变量 ······ 3
1.1.3　期望与矩 ······ 5
§1.2　随机过程 ······ 10
1.2.1　一般概念 ······ 10
1.2.2　鞅 ······ 14
1.2.3　Markov 过程与 Brown 运动 ······ 17
§1.3　随机微积分 ······ 22
1.3.1　随机积分 ······ 22
1.3.2　随机微分 ······ 27
1.3.3　某些不等式 ······ 30
第 2 章　随机微分方程 ······ 37
§2.1　一般结论 ······ 37
2.1.1　存在定理 ······ 38
2.1.2　解的估计 ······ 42
2.1.3　Markov 性 ······ 51
2.1.4　Feynman-Kac 公式 ······ 53
§2.2　线性方程 ······ 55
2.2.1　一般情形 ······ 55
2.2.2　特殊情形 ······ 58
2.2.3　某些例子 ······ 61
§2.3　稳定性 ······ 62
2.3.1　一般概念 ······ 63
2.3.2　矩指数稳定 ······ 67
2.3.3　几乎必然指数稳定 ······ 70
2.3.4　随机稳定化 ······ 74
2.3.5　随机渐近稳定性 ······ 77

第 3 章 随机泛函微分方程 …… 82
§3.1 存在定理 …… 82
3.1.1 一般概念 …… 83
3.1.2 存在定理 …… 85
3.1.3 解的估计 …… 90
§3.2 稳定性 …… 95
3.2.1 Razumikhin-Mao 定理 …… 97
3.2.2 延迟微分方程 …… 99
3.2.3 随机扰动方程 …… 104
§3.3 中立型 SFDE …… 110
3.3.1 存在定理 …… 110
3.3.2 解的估计 …… 114
3.3.3 稳定性 …… 118
3.3.4 特殊情形 …… 123
第 4 章 选择论题 …… 131
§4.1 再论稳定性 …… 132
4.1.1 矩稳定性 …… 132
4.1.2 轨道稳定性 …… 146
4.1.3 延迟微分方程 …… 152
4.1.4 随机渐近稳定性 …… 163
§4.2 有界性 …… 166
4.2.1 矩有界性 …… 167
4.2.2 轨道有界性 …… 179
4.2.3 延迟微分方程 …… 185
§4.3 无界性与持久性 …… 192
4.3.1 无界性 …… 192
4.3.2 持久性 …… 200
4.3.3 滞留问题 …… 206
§4.4 其他问题 …… 208
4.4.1 LaSalle 型定理 …… 208
4.4.2 整体解的存在性 …… 220
4.4.3 比较原理 …… 228
4.4.4 振动性 …… 233
§4.5 Markov 调制的 SDE …… 241

4.5.1 预备 …… 241
4.5.2 矩估计 …… 245
4.5.3 轨道估计 …… 253
4.5.4 延迟微分方程 …… 255
§4.6 正解及其渐近性质 …… 264
4.6.1 存在定理 …… 265
4.6.2 矩有界性 …… 273
4.6.3 渐近轨道估计 …… 278
4.6.4 延迟微分方程 …… 283
4.6.5 特例 …… 286
第 5 章 特殊类型的 SDE …… 290
§5.1 随机神经网络 …… 290
5.1.1 指数稳定性 …… 291
5.1.2 随机稳定化 …… 294
5.1.3 延迟神经网络 …… 297
5.1.4 Markov 调制的随机神经网络 …… 303
§5.2 Lotka-Volterra 系统 …… 306
5.2.1 一般 LV 系统 …… 307
5.2.2 一个特例 …… 311
5.2.3 延迟 LV 系统 …… 313
§5.3 经济学中的 SDE 模型 …… 317
5.3.1 Solow 模型 …… 318
5.3.2 人力资本模型 …… 320
5.3.3 R&D 模型 …… 322
§5.4 倒向随机微分方程 …… 324
5.4.1 存在定理 …… 325
5.4.2 解的估计 …… 330
5.4.3 广义 Feynman-Kac 公式 …… 335
§5.5 无限时滞的 SFDE …… 337
5.5.1 存在定理 …… 337
5.5.2 矩估计 …… 339
5.5.3 轨道估计 …… 346
参考文献 …… 351
名词索引 …… 364
《大学数学科学丛书》已出版书目 …… 367

第 1 章　随机过程

我们要到下一章才进入本书的主题——随机微分方程(SDE),此处当然不是大谈 SDE 的地方. 但略知 SDE 的渊源与特性,无疑有助于理解,在这个序章中我们该准备些什么？在一般的意义上,微分方程的主要任务之一,就是描述随时间演进的微分系统,此类系统的状态变量 $x(t)$ 是时间 t 的函数;依 $x(t)$ 为普通函数与随机函数,描述系统的方程被区分为常微分方程(ODE)与 SDE. ODE 理论基于普通函数的分析学,即熟知的实分析;与之对照,SDE 理论无疑应基于随机函数的分析学,即随机分析. 由此看来,这个预备性的序章的任务正是要提供有关随机函数及其分析学的基本材料,这就涉及有关随机变量、随机过程及随机微积分的一个简单概括. 当然,我们的目的只是提供基本的用语与常用结论,而不追求任何意义上的完备性. 大多数结果仅供后面引用,通常省略了证明. 不过,对于重要概念与结论的背景与直观意义,则作必要的解释,以有助于理解与有效运用.

§1.1　随机变量

本节给出有关随机变量的基本概念与主要结论,其内容可在任何一本概率论基础教材中找到详尽表述,此处自然处理得更概括些. 使用测度论的语言与方法是理所当然的,这不仅不应成为一个障碍,而应视为沟通实分析与随机分析的桥梁.

1.1.1　概率空间

如所熟知,概率用于量度随机事件发生的可能性. 但从逻辑上说,概率不过是一种特殊的测度而已. 这一理解使得概率论的相当一部分内容可自然地纳入测度论的框架之内.

定义 1.1.1　设 Ω 是任一非空集,$\mathscr{F}\subset 2^{\Omega}$. 若 $\mathscr{F}$ 满足条件:

(M_1) $\Omega\in\mathscr{F}$;$A\in\mathscr{F}\Rightarrow A^c\in\mathscr{F}$;$\{A_n\}\subset\mathscr{F}\Rightarrow\bigcup A_n\in\mathscr{F}$,

则称 $\mathscr{F}$ 为 Ω 上的一个 **σ 代数**或 σ 域,称 $(\Omega,\mathscr{F})$ 为一个**可测空间**,称任何 $A\in\mathscr{F}$ 为 $\mathscr{F}$ 可测集或简称为**可测集**. 若一个函数 $P:\mathscr{F}\to\overline{\mathbf{R}}_+=[0,\infty]$ 满足条件:

(M_2) $P(\varnothing)=0$;当 $A_n\in\mathscr{F}(n\in\mathbf{N})$ 互不相交时 $P(\bigcup A_n)=\sum P(A_n)$,

则称 P 为可测空间 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上的一个**测度**;若进而设 $P(\Omega)=1$,则称 P 为**概率测度**或简称为**概率**,称 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为一个**概率空间**. 若概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 满足条件:

(M_3) 完备性：$P(A)=0, B\subset A \Rightarrow B\in \mathscr{F}$,
则称 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 为**完备概率空间**.

从现在开始直至本书结束，都假定 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 是一给定的完备概率空间. 必须指出，当将概率论用于特定的随机现象时，具体构成所用的概率空间未必容易，且其构成亦随所研究的问题而异. 但对于理论分析而言，这并不成为障碍. 实际上，$(\Omega,\mathscr{F},P)$ 不过是为展开理论分析而预设的一个逻辑前提而已. 一旦设定了这一前提，甚至不必处处提到它.

对于与概率空间有关的概念，既可以使用一般测度论的术语，亦可以使用初等概率论中的习惯用语；两套用语交叉使用而互不排斥，在现代文献中已被广泛认可. 例如，每个 $A\in\mathscr{F}$ 可称为可测集或事件；当 $P(A)=0$ 时可称 A 为零测集(即零概集)或几乎不可能事件；当 $P(A)=1$ 时称 A 为**几乎必然**(a. s.)事件. 采用什么术语并不关乎问题的本质. 当然，适当的术语有助于对概念的理解.

既然概率只是一种特殊的测度，一般测度论的所有结论自然均可供概率论使用，这实属幸事. 凡属标准的测度论结论，本书都直接引用而不一一注明出处.

给定 $A\in\mathscr{F}$, 设 $P(A)>0$, 则可验证

$$P(\cdot\mid A):\mathscr{F}\to[0,1],\quad B\to P(A\cap B)/P(A)$$

亦为 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上的一个概率测度，称为关于 A 的**条件概率**. 若 $\Omega=\cup A_n$, A_n 互不相交且 $P(A_n)>0$, $B\in\mathscr{F}$, 则成立

$$P(B)=\sum_n P(A_n)P(B\mid A_n),\qquad \text{(全概率公式)} \qquad (1.1.1)$$

$$P(A_n\mid B)=\frac{P(B\mid A_n)P(A_n)}{\sum_i P(B\mid A_i)P(A_i)},\qquad \text{(Bayes 公式)} \qquad (1.1.2)$$

式(1.1.2)要求 $P(B)>0$.

定义 1.1.2 设 $\{A_t: t\in T\}\subset\mathscr{F}$. 若对任何有限集 $\{t_1,t_2,\cdots,t_n\}\subset T$, 有

$$P(\cap A_{t_i})=\prod P(A_{t_i}),\qquad (1.1.3)$$

则称 $\{A_t\}$ 为独立事件族. 若 $\mathscr{A}_t\subset\mathscr{F}\ (t\in T)$, 对任何有限集 $\{t_1,t_2,\cdots,t_n\}\subset T$ 及任何 $A_{t_i}\in\mathscr{A}_{t_i}(1\leqslant i\leqslant n)$, 式(1.1.3)恒成立，则说族 $\mathscr{A}_t(t\in T)$ 互相独立.

由于有形如(1.1.3)的等式可用，独立性条件常给问题带来显著简化. 独立性概念的引入，可以说是概率测度区别于一般测度的要件之一.

任给 $\mathscr{A}\subset 2^\Omega$, 必有一个包含 $\mathscr{A}$ 的最小 σ 代数，称它为 $\mathscr{A}$ 生成的 σ 代数，记作 $\sigma(\mathscr{A})$；若 $\mathscr{A}\subset\mathscr{F}$, 则必 $\sigma(\mathscr{A})\subset\mathscr{F}$. 简单地说，$\sigma(\mathscr{A})$ 就是由 $\mathscr{A}$ 中的集经可数次集运算(包括并、交与补运算)所得之集构成的集族. 考虑由适当集族生成的 σ 代数是概率论(也是一般测试论)中的一个常用方法.

定理 1.1.3 设 $\mathscr{A}_t\subset\mathscr{F}\ (t\in T)$ 互相独立，且每个 $\mathscr{A}_t$ 对有限交运算封闭，则

$\sigma(\mathscr{A}_t)(t\in T)$ 亦互相独立. 特别,若 $\{A_t: t\in T\}\subset\mathscr{F}$是独立族,则 $\sigma(\{A_t\})(t\in T)$ 互相独立.

引理 1.1.4(Borel-Cantelli) 设 $\{A_n\}\subset\mathscr{F}, A=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty}A_k$. 若 $\sum P(A_n)<\infty$, 则 $P(A)=0$; 若 $\sum P(A_n)=\infty$ 且 $\{A_n\}$ 独立,则 $P(A)=1$.

本书中常用到引理 1.1.4 的前一半,且在以下形式下使用:选取收敛正项级数 $\sum b_n$(通常取 $b_n=n^{-a}$ 或 $b_n=a^{-n}, a>1$),验证 $P(A_n)\leqslant b_n$, 然后断定:对几乎所有 $\omega\in\Omega$, 当 n 充分大时有 $\omega\notin A_n$. 换言之,a.s.,当 n 充分大时 A_n^c 发生.

1.1.2 随机变量

简单地说,随机变量就是概率空间上的可测函数. 但为今后应用方便,有必要完整地表述有关概念. 首先界定若干常用记号. 设 $(E,\mathscr{B})$ 是可测空间, $\xi:\Omega\to E$ 是任一映射,则约定

$$\sigma(\xi)=\xi^{-1}\mathscr{B}=\{\xi^{-1}(B): B\in\mathscr{B}\}. \tag{1.1.4}$$

$\sigma(\xi)$ 必为 Ω 上的 σ 代数,称为由映射 ξ 生成的 σ 代数. 通常记

$$\{\xi\in B\}=\xi^{-1}(B)=\{\omega\in\Omega: \xi(\omega)\in B\}, \tag{1.1.5}$$

并认定 $\{\xi\in B\}$ 就是"ξ 在 B 中"这一事件. 为将概率用于事件 $\{\xi\in B\}$, 必需 $\{\xi\in B\}\in\mathscr{F}$, 这正是下面定义的随机变量应满足的条件.

定义 1.1.5 (i) 设 $(E,\mathscr{B})$ 是任一可测空间, $\xi:\Omega\to E$. 若 $\sigma(\xi)\subset\mathscr{F}$, 则称 ξ 为一个 $\mathscr{F}$-$\mathscr{B}$ 可测映射,或简称为**可测映射**. 若 ξ 是一个 $\mathscr{F}$-$\mathscr{B}$ 可测映射,则

$$P_\xi:\mathscr{B}\to[0,1],\quad B\to P(\xi\in B) \tag{1.1.6}$$

是 $(E,\mathscr{B})$ 上的一个概率测度,称为由 ξ 从 P 导出的概率.

(ii) 若 E 是拓扑空间,$\mathscr{B}$ 是由 E 中的开集族生成的 σ 代数,则称 $\mathscr{B}$ 为 E 中的 **Borel 集族**,也记作 $\mathscr{B}_E$ 或 $\mathscr{B}(E)$;$\mathscr{B}(\mathbf{R}^d)$ 就简写作 $\mathscr{B}^d$. 若 $\mathscr{B}=\mathscr{B}_E, \xi:\Omega\to E$ 是一个 $\mathscr{F}$-$\mathscr{B}$ 可测映射,则称 ξ 为 Ω 上的一个 E **值随机变量**,称导出概率 P_ξ 为随机变量 ξ 的**分布**,并说 $P_\xi(B)(B\in\mathscr{B})$ 是 ξ 取值于 B 中的概率. 当 $P_\xi(B)=1$ 时写作 $\xi\in B$, a.s.,此时不妨说 ξ 是取值于 B 中的随机变量.

(iii) 若 X 是一个 $\mathbf{R}^d$ 值随机变量,则称 X 为 d 维随机变量或**随机向量**.

我们关注的重点是 $\mathbf{R}^d$ 值随机变量. 设 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_d)^{\mathrm{T}}:\Omega\to\mathbf{R}^d$, 则 X 是随机变量 $\Leftrightarrow X_i(1\leqslant i\leqslant d)$ 是一维随机变量 $\Leftrightarrow \forall x\in\mathbf{R}^d$, 有 $\{X\leqslant x\}\in\mathscr{F}$. 直观上,可将一个 d 维随机变量 X 看作随机地分布于 $\mathbf{R}^d$ 中的不定点,对任何 Borel 集 B $\subset R^d$, x 取值于 B 中的概率 $P(X\in B)$ 有定义. 在概念上,随机变量 $X=X(\omega)$ 作为 Ω 上的函数与通常的函数并无不同. 但就提出的问题及研究方法而言却有重大差别. 要点在于,对于随机变量 X 考虑个别的函数值 $X(\omega)$ 毫无意义,因而我们并不关心 X 如何依赖于 ω,更谈不上写出 X 依赖于 ω 的表达式. 唯一值得关心的是,X

以多大的概率取值于给定的$A(\in \mathscr{F})$中，即X的概率分布. 为刻画X的概率分布，有三种等价的方法：

(i) 分布或导出概率P_X:$P_X(B) = P(X \in B)(B \in \mathscr{B}^d)$.

(ii) 分布函数$F_X(\cdot)$:

$$F_X(x) = P(X \leqslant x),\quad x \in \mathbf{R}^d. \tag{1.1.7}$$

(iii) 密度函数$f_X(\cdot)$：若$F_X(\cdot)$绝对连续，则有非负 Borel 可测函数$f_X(\cdot)$，使得

$$F_X(x) = \int_{y \leqslant x} f_X(y)\,\mathrm{d}y, \tag{1.1.8}$$

这样的$f_X(\cdot)$称为随机变量X的密度函数，它在$\mathbf{R}^d$上几乎处处由X唯一确定.

一个映射$f: E \to G$为**Borel 可测**，意指它为$\mathscr{B}_E$-$\mathscr{B}_G$可测.

事件的独立性引伸出随机变量的独立性. 简单地说，随机变量独立意味着它们所关联的事件独立. 准确的定义是：

定义 1.1.6　设$X_t(t \in T)$是一族随机变量（不必取值于同一空间!）. 若σ代数族$\sigma(X_t)(t \in T)$相互独立，则称$X_t(t \in T)$是独立族.

结合定义 1.1.6 与定义 1.1.2 看出，$X_t(t \in T)$独立$\Leftrightarrow$对任何有限子集$\{t_1, t_2, \cdots, t_n\} \subset T$，$X_{t_i}(1 \leqslant i \leqslant n)$独立. n个随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n$（不必取值于同一空间!）独立的条件可表成互相等价的如下四种形式：

$$\begin{cases} P(X_i \in B_i, 1 \leqslant i \leqslant n) = \prod P(X_i \in B_i), & (1.1.9\text{a}) \\ P_X = P_{X_1} \times P_{X_2} \times \cdots \times P_{X_n}, & (1.1.9\text{b}) \\ F_X(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod F_{X_i}(x_i), & (1.1.9\text{c}) \\ f_X(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod f_{X_i}(x_i), & (1.1.9\text{d}) \end{cases}$$

其中$B_i(1 \leqslant i \leqslant n)$遍取（适当空间中的）Borel 集；$X = (X_1, X_2, \cdots, X_n)^{\mathrm{T}}$，式(1.1.9b)右端表乘积测度；对式(1.1.9d)假定密度函数存在.

本书中经常需要构成满足特定要求的随机变量. 构成随机变量的主要方法是：从已知的随机变量出发，经一定运算（包括代数运算、格运算与极限运算）或与 Borel 可测函数复合，构成新的随机变量. 此处并不需要列举各种构成法的表达式，在具体应用中，总可以放心地使用如下一般结论：任给$\mathscr{F}$的子σ代数$\mathscr{A}$与$\mathscr{A}$可测随机变量X_n（有限或可数个），由$\{X_n\}$经通常的构造手续（即前面提到的运算或函数复合）构成变量X，则X必为$\mathscr{A}$可测随机变量. 今后将视以上结论为常识，且不加说明地随时利用. 总之，在以公理化概率论为基础的任何理论中，尽管一定“可测性”条件常常是不可缺少的逻辑前提，但在大多数情况下，可测性的验证是平凡的，因而通常略而不提. 明白这一点，就不致为可测性所累.

命题 1.1.7　设$X_i(i \in I)$是独立的随机变量（不必取值于同一空间!），$Y_i =$

$g_i(X_i)$,g_i 是 Borel 可测函数,则 $Y_i(i \in I)$ 是一族独立的随机变量.

证 由定义 1.1.6,可设 $1 \leqslant i \leqslant n$. 任给 Borel 集 $B_i(1 \leqslant i \leqslant n)$,有

$$\begin{aligned} P(Y_i \in B_i, 1 \leqslant i \leqslant n) &= P(X_i \in g_i^{-1}(B_i), 1 \leqslant i \leqslant n) \\ &= \prod P(X_i \in g_i^{-1}(B_i)) \\ &= \prod P(Y_i \in B_i). \end{aligned}$$

这表明 $Y_i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 是独立的. □

1.1.3 期望与矩

如前所述,随机变量不过是概率空间 Ω 上的可测函数,这就可将基于测度与积分的整个实分析理论用于随机变量. 首先,我们可以沿用积分论中的如下记号:L^p 记 p 次可积函数之空间;$X \in L^p(\Omega, \mathbf{R}^d)$ 则表示 X 是 p 次可积的 d 维随机变量,不致误解时不妨就简写作 $X \in L^p$.

定义 1.1.8 若 $X \in L^1(\Omega, \mathbf{R}^d)$,则称

$$\mathrm{E}X = \int_\Omega X \mathrm{d}P \tag{1.1.10}$$

为随机变量 X 的**期望**.

注意式(1.1.10)显然可改写为

$$\mathrm{E}X = \frac{1}{P(\Omega)}\int_\Omega X \mathrm{d}P,$$

这表明 $\mathrm{E}X$ 正是 X 在 Ω 上关于概率 P 的加权平均,因而也称 $\mathrm{E}X$ 为 X 的**均值**或**统计均值**. 设 $X = (X_1, X_2, \cdots, X_d)^{\mathrm{T}} \in L^1(\Omega, \mathbf{R}^d)$,则由(1.1.10)显然有

$$\mathrm{E}X = (\mathrm{E}X_1, \mathrm{E}X_2, \cdots, \mathrm{E}X_d)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^d.$$

受此启发,自然将期望概念扩展到 $X = [X_{ij}] \in L^1(\Omega, \mathbf{R}^{d\times m})$,约定

$$\mathrm{E}X = [\mathrm{E}X_{ij}] \in \mathbf{R}^{d\times m}.$$

进而,以期望为基础,可规定如下一系列与随机变量有关的量:

$$\mathrm{E}|X|^p = \int_\Omega |X|^p \mathrm{d}P; \quad (p\ \text{阶绝对矩}) \tag{1.1.11}$$

$$\mathrm{cov}(X,Y) = \mathrm{E}[(X-\mathrm{E}X)(Y-\mathrm{E}Y)^{\mathrm{T}}]; \quad (\text{协方差}) \tag{1.1.12}$$

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{cov}(X,X) \quad (\text{方差}) \tag{1.1.13}$$

等. 式(1.1.11)要求 $X \in L^p(\Omega, \mathbf{R}^d)$;式(1.1.12)与(1.1.13)要求 $X, Y \in L^2(\Omega, \mathbf{R}^d)$,$\mathrm{Var}(X)$ 必为半正定矩阵. 以上对象连同期望统称为随机变量的**矩**或**数字特征**,它们以不同方式给出随机变量的某种均值,对于随机变量的研究起重大作用.

矩概念密切地联系于空间 $L^p(\Omega, \mathbf{R}^d)$. 若 $1 \leqslant p < \infty$,则 $L^p(\Omega, \mathbf{R}^d)$ 是一个 Banach 空间;$\forall X \in L^p(\Omega, \mathbf{R}^d)$,$(\mathrm{E}|X|^p)^{1/p}$ 正是 X 的 **L^p 范数**. $L^2(\Omega, \mathbf{R}^d)$ 则是一个 Hilbert 空间,其中的内积可表为期望:

$$\langle X,Y\rangle = \mathrm{E}(X^{\mathrm{T}}Y). \tag{1.1.14}$$

约定 $L^p(\Omega) = L^p(\Omega,\mathbf{R})$. 若 $X,Y \in L^2(\Omega)$，则 $\mathrm{cov}\langle X,Y\rangle = 0 \Leftrightarrow X - \mathrm{E}X$ 与 $Y - \mathrm{E}Y$ 正交；当 $\mathrm{cov}(X,Y) = 0$ 时称 X 与 Y **不相关**.

期望与矩的性质大多直接来自积分论，不难理解与把握. 但因其数量颇为可观，有必要理出适当的头绪，下面分为等式、不等式与极限式三部分进行汇总.

(i) 关于矩的等式. 设 $X,Y \in L^2(\Omega,\mathbf{R}^d)$，$A \in \mathbf{R}^{m\times d}$，则

$$\begin{cases}\mathrm{cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY^{\mathrm{T}}) - (\mathrm{E}X)(\mathrm{E}Y)^{\mathrm{T}} = [\mathrm{cov}(X_i,Y_j)],\\ \mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(XX^{\mathrm{T}}) - (\mathrm{E}X)(\mathrm{E}X)^{\mathrm{T}} = [\mathrm{cov}(X_i,X_j)];\end{cases} \tag{1.1.15}$$

$$\mathrm{Var}(AX) = A\,\mathrm{Var}(X)A^{\mathrm{T}}. \tag{1.1.16}$$

若 $X_1,X_2,\cdots,X_n \in L^1(\Omega)$ 独立，则

$$\mathrm{E}\left(\prod X_i\right) = \prod \mathrm{E}X_i. \tag{1.1.17}$$

(ii) 矩不等式. 首先，平凡地有 $|\mathrm{E}X| \leqslant \mathrm{E}|X|$. 更重要的不等式是

$$\mathrm{E}|X^{\mathrm{T}}Y| \leqslant (\mathrm{E}|X|^p)^{1/p}(\mathrm{E}|X|^q)^{1/q};\quad(\textbf{Hölder 不等式}) \tag{1.1.18}$$

$$(\mathrm{E}|X|^r)^{1/r} \leqslant (\mathrm{E}|X|^s)^{1/s};\quad(\textbf{Liapunov 不等式}) \tag{1.1.19}$$

$$\mathrm{E}\left|\sum_{i=1}^n X_i\right|^p \leqslant C_p\sum_{i=1}^n \mathrm{E}|X|^p;\quad(C_p\text{ 不等式}) \tag{1.1.20}$$

$$P(|X| \geqslant \varepsilon) \leqslant \varepsilon^{-p}\mathrm{E}|X|^p;\quad(\textbf{Chebyshev 不等式}) \tag{1.1.21}$$

$$g(\mathrm{E}X) \leqslant \mathrm{E}g(X);\quad(\textbf{Jensen 不等式}) \tag{1.1.22}$$

$$|\mathrm{cov}(X,Y)|^2 \leqslant \mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y). \tag{1.1.23}$$

(1.1.18)中 $1 < p = q/(q-1) < \infty$，$X \in L^p$，$Y \in L^q$；(1.1.19)中 $0 < r < s < \infty$，$X \in L^s$；(1.1.20)中 $X \in L^p$，$C_p = 1(0 < p \leqslant 1)$，或 $C_p = n^{p-1}(p > 1)$；(1.1.21)中 $\varepsilon,p > 0$，$X \in L^p$；(1.1.22)中 $g: \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ 是凸函数，$X \in L^1$；(1.1.23)中 $X,Y \in L^2(\Omega)$.

(iii) 极限式. 依式(1.1.10)，期望无非是积分，因而每个积分收敛定理自动导出一个期望收敛定理：设 $\{X_n\} \subset L^1$，则

$$0 \leqslant X_n \leqslant X_{n+1} \Rightarrow \mathrm{E}\left(\lim_n X_n\right) = \lim_n \mathrm{E}X_n;\quad(\text{Lévy 定理})$$

$$X_n \geqslant 0 \Rightarrow \mathrm{E}\left(\varliminf_n X_n\right) \leqslant \varliminf_n \mathrm{E}X_n;\quad(\text{Fatou 定理})$$

$$|X_n| \leqslant Y \in L^1 \Rightarrow \mathrm{E}\left(\lim_n X_n\right) = \lim_n \mathrm{E}X_n,\quad(\text{控制收敛定理})$$

最后一式中要求 $\lim_n X_n$ a. s. 存在. 其次，用(1.1.19)易推出

$$\mathrm{E}|X_n - X|^p \to 0(p \geqslant 1) \Rightarrow \mathrm{E}X_n \to \mathrm{E}X,\quad X_n,X \in L^p. \tag{1.1.24}$$

常需要将积分(1.1.10)转化为更直观的积分. 为此需作两点准备. 首先，我们

需要关于变换积分的以下一般结果：

定理 1.1.9 设 $\xi:(\Omega,\mathscr{F})\to(E,\mathscr{A})$ 是可测映射，$g:E\to\mathbf{R}^d$ 是 $\mathscr{A}$-$\mathscr{B}^d$ 可测函数，则有

$$\int_{\xi\in A}g(\xi)\,\mathrm{d}P=\int_A g\,\mathrm{d}P_\xi,\quad A\in\mathscr{A},\tag{1.1.25}$$

只要式中的积分存在.

其次，设 X 是一个 d 维随机变量，我们需要关于 P_X 积分的一个直观表示. 事实上，对于定义于 $\mathbf{R}^d$ 上的 Borel 可测函数 $g(\cdot)$ 有

$$\int_{\mathbf{R}^d}g\,\mathrm{d}P_X=\int_{\mathbf{R}^d}g(x)\,\mathrm{d}F_X(x),\tag{1.1.26}$$

只要式中的积分存在. 式(1.1.26)右端积分是 g 关于 $F_X(\cdot)$ 的 Lebesgue-Stieltjes 积分. 式(1.1.26)表明，P_X 正是由分布函数 $F_X(\cdot)$ 生成的 **LS 测度**，形式上写作 $\mathrm{d}P_X=\mathrm{d}F_X(x)$；在密度函数 $f_X(\cdot)$ 存在的情况下则有 $\mathrm{d}P_X=f_X(x)\,\mathrm{d}x$.

取 $\xi=X$，结合式(1.1.25)与(1.1.26)立即得到

$$\mathrm{E}g(X)=\int_{\mathbf{R}^d}g(x)\,\mathrm{d}F_X(x)=\int_{\mathbf{R}^d}g(x)f_X(x)\,\mathrm{d}x,\tag{1.1.27}$$

其中 X 是一个 d 维随机变量，$g:\mathbf{R}^d\to\mathbf{R}^m$ 是 Borel 可测函数，$g(X)\in L^1$；后一等号自然仅用于 $F_X(\cdot)$ 绝对连续的情况. 特别取 $g(x)=x$，由式(1.1.27)得

$$\mathrm{E}X=\int_{\mathbf{R}^d}x\,\mathrm{d}F_X(x)=\int_{\mathbf{R}^d}xf_X(x)\,\mathrm{d}x;\tag{1.1.28}$$

取 $g=I_B$（I_B 记 B 的指示函数，$B\in\mathscr{B}^d$）由式(1.1.27)得

$$P(X\in B)=\int_B\mathrm{d}F_X(x)=\int_B f_X(x)\,\mathrm{d}x.\tag{1.1.29}$$

给出一个**复随机变量** $Z=X+\mathrm{i}Y$ 与给出一个二维随机变量 (X,Y) 相当，因而并不涉及实质上新的概念. 特别，前面有关期望、绝对矩等所作的讨论亦适用于复随机变量. 基于此，下面的定义自然不成问题.

定义 1.1.10 设 X 是 d 维随机变量，则称函数

$$\varphi_X(t)=\mathrm{E}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\cdot X},\quad t\in\mathbf{R}^d\tag{1.1.30}$$

为 X 的**特征函数**，其中 $t\cdot X$ 表 t 与 X 的标准内积.

因 $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\cdot X}|\leqslant 1$，故 $\varphi_X(t)$ 依(1.1.30)恒有定义. $\varphi_X(t)$ 可表为积分

$$\varphi_X(t)=\int_\Omega\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\cdot X}\,\mathrm{d}P=\int_{\mathbf{R}^d}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\cdot x}\,\mathrm{d}F_X(x)\tag{1.1.31a}$$

$$=\int_{\mathbf{R}^d}\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\cdot x}f_X(x)\,\mathrm{d}x=\hat{f}_X(-t),\tag{1.1.31b}$$

其中 $\hat{f}_X(\cdot)$ 记函数 $f_X(\cdot)$ 的 Fourier 变换（假定 $f_X(\cdot)$ 存在）. 可以说，特征函数的优势正源于 Fourier 变换的良好性质. 特征函数的主要性质可概括如下.

命题 1.1.11 设 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_d)^{\mathrm{T}}$ 是 d 维随机变量，则其特征函数 $\varphi_X(\cdot)$

有以下性质:

(i) $\varphi_X(\cdot):\mathbf{R}^d\to\mathbf{C}$ 一致连续且 $|\varphi_X(t)|\leqslant\varphi_X(0)=1$.

(ii) 若 $A\in\mathbf{R}^{m\times d}, b\in\mathbf{R}^m, Y=AX+b$, 则

$$\varphi_Y(t)=e^{ib\cdot t}\varphi_X(A^{\mathrm{T}}t),\quad t\in\mathbf{R}^m. \tag{1.1.32}$$

令 $b=0$, 分别取 $A=(1,1,\cdots,1)$ 与 $A=e_j^{\mathrm{T}}$ (e_j 是 $\mathbf{R}^d$ 的标准基向量)得

$$\varphi_{\Sigma X_j}(t)=\varphi_X(t,t,\cdots,t),\quad t\in\mathbf{R}, \tag{1.1.33}$$

$$\varphi_{X_j}(t)=\varphi_X(0,\cdots,t,\cdots,0),\quad t\in\mathbf{R}. \tag{1.1.34}$$

(iii) 若 $X_j(1\leqslant j\leqslant d)$ 独立,则

$$\varphi_X(t)=\prod\varphi_{X_j}(t_j),\quad t=(t_1,t_2,\cdots,t_d)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^d, \tag{1.1.35}$$

$$\varphi_{\Sigma X_j}(t)=\prod\varphi_{X_j}(t).\quad t\in\mathbf{R}. \tag{1.1.36}$$

(iv) 唯一性. 若 Y 是另一个 d 维随机变量, $\varphi_X(t)\equiv\varphi_Y(t)$, 则必 $F_X(x)\equiv F_Y(x)$, 即分布函数由特征函数唯一决定.

下面设 $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{F}$ 的子 σ 代数. 若 ν 是 $(\Omega,\mathscr{A})$ 上的一个 $\mathbf{R}^d$ 值向量测度(即定义于 $\mathscr{A}$ 上的可数可加的 $\mathbf{R}^d$ 值函数),且 $P(A)=0\Rightarrow\nu(A)=0$, 则由测度论中著名的 Radon-Nikodym 定理,存在 $\mathscr{A}$ 可测函数 $\xi:\Omega\to\mathbf{R}^d$, 使得

$$\nu(A)=\int_A\xi\mathrm{d}P,\quad A\in\mathscr{A}. \tag{1.1.37}$$

在 a. s. 确定的意义上,满足式(1.1.37)的 ξ 是唯一的,通常记作 $\mathrm{d}\nu/\mathrm{d}P$.

定义 1.1.12　设 $X\in L^1(\Omega,\mathbf{R}^d), \nu(A)=\mathrm{E}(I_AX)(A\in\mathscr{A})$, 则称

$$\mathrm{E}(X\mid\mathscr{A})\triangleq\mathrm{d}\nu/\mathrm{d}P \tag{1.1.38}$$

为随机变量 X 在 $\mathscr{A}$ 下的**条件期望**;而称

$$P(B\mid\mathscr{A})\triangleq\mathrm{E}(I_B\mid\mathscr{A}),\quad B\in\mathscr{F} \tag{1.1.39}$$

为 B 在 $\mathscr{A}$ 下的**条件概率**.

定义中的 $\nu(\cdot)$ 显然是一个 $\mathbf{R}^d$ 值向量测度,且 $P(A)=0\Rightarrow\nu(A)=0$, 故 $\mathrm{d}\nu/\mathrm{d}P$ 必存在,因而 $\mathrm{E}(X\mid\mathscr{A})$ 有定义. 结合式(1.1.37)与(1.1.38), 可以说, $\mathrm{E}(X\mid\mathscr{A})$ 是一个 $\mathscr{A}$ 可测 d 维随机变量,在 a. s. 确定的意义上,它唯一地决定于条件

$$\int_A X\mathrm{d}P=\int_A\mathrm{E}(X\mid\mathscr{A})\mathrm{d}P,\quad A\in\mathscr{A}. \tag{1.1.40}$$

这样,从逻辑上说,条件期望的合理性已不成问题. 但从认知与运用上考虑,定义 1.1.12 似乎包含明显的困难. 首先,与期望定义式(1.1.10)不同, $\mathrm{E}(X\mid\mathscr{A})$ 的定义并不具有某种构造性,无论公式(1.1.38)或(1.1.40)都不提供计算 $\mathrm{E}(X\mid\mathscr{A})$ 的可行方法. 式(1.1.40)仅有**后验**作用:若某个 $\mathscr{A}$ 可测随机变量 Y 满足等式

$$\int_A X\mathrm{d}P=\int_A Y\mathrm{d}P,\quad\forall A\in\mathscr{A},$$

则 $Y=\mathrm{E}(X\mid\mathscr{A})$, a. s.. 但如何找到(至少在原则上)一个这样的 Y, 则不得而知.

其次,定义 1.1.12 并未直接表明 $\mathrm{E}(X\mid\mathscr{A})$ 的直观意义, $\mathrm{E}(X\mid\mathscr{A})$ 有如 $\mathrm{E}X$ 的均值含义吗? 试看一种极端情况:若取 $\mathscr{A}=\sigma(\{A\})$, $A\in\mathscr{F}$, 则用式(1.1.40)可验证

$$\mathrm{E}(X\mid\mathscr{A})=aI_A+bI_{A^c},$$

其中 a,b 分别为 X 在 A 与 A^c 上的均值. 这表明 $\mathrm{E}(X\mid\mathscr{A})$ 是对 X 的某种局部"修平". 实际上,定义式(1.1.40)就可以解释为:在每个 $A\in\mathscr{A}$ 上, X 与 $\mathrm{E}(X\mid\mathscr{A})$ 依均值相等. 修平的效果随 $\mathscr{A}$ 增大而减弱. 若 $\mathscr{A}=\{\Omega,\varnothing\}$, 则 $\mathrm{E}(X\mid\mathscr{A})=\mathrm{E}X$, X 被彻底修平;若增大 $\mathscr{A}$ 至 $\mathscr{A}\supset\sigma(X)$, 则 $\mathrm{E}(X\mid\mathscr{A})=X$, 此时修平作用消失.

从应用的角度看,条件期望定义的非构造性并不成为重大障碍. 真正重要的东西是条件期望的性质. 有趣的是,尽管条件期望与期望似乎完全不是一回事(前者是随机变量,而后者是常量),但两者却有非常类似的性质. 我们甚至无需去逐一列举这些相近的性质,只是指出以下一般结论:由等式、不等式与极限式所表达的期望性质(参看(1.1.15)~(1.1.24)),同样适用于条件期望,只是所涉及的式子仅在 a. s. 的意义上成立. 不过,条件期望还有一些特殊的性质,值得特别强调,它们是

$$\mathrm{E}[\mathrm{E}(X\mid\mathscr{A})]=\mathrm{E}X, \tag{1.1.41}$$

$$\sigma(X)\subset\mathscr{A}\Rightarrow\mathrm{E}(XY\mid\mathscr{A})=X\mathrm{E}(Y\mid\mathscr{A}), \tag{1.1.42}$$

$$\mathrm{E}(X\mid\mathscr{A})=\mathrm{E}[\mathrm{E}(X\mid\mathscr{A})\mid\mathscr{B}]=\mathrm{E}[\mathrm{E}(X\mid\mathscr{B})\mid\mathscr{A}],\quad\mathscr{A}\subset\mathscr{B}, \tag{1.1.43}$$

$$E(\mathrm{X}\mid\mathscr{A})=\begin{cases}X, & \sigma(X)\subset\mathscr{A},\\ \mathrm{E}X, & \sigma(X)\text{ 与 }\mathscr{A}\text{ 独立}.\end{cases} \tag{1.1.44}$$

若 $\xi:(\Omega,\mathscr{F})\to(E,\mathscr{B})$ 是可测映射,则约定

$$\mathrm{E}(X\mid\xi)=\mathrm{E}(X\mid\sigma(\xi)), \tag{1.1.45}$$

其中 $\sigma(\xi)$ 依式(1.1.4). 更一般地,令

$$\mathrm{E}(X\mid\xi_t,t\in T)=\mathrm{E}(X\mid\sigma(\xi_t,t\in T)), \tag{1.1.46}$$

其中 $\sigma(\xi_t,t\in T)=\sigma\left(\bigcup\limits_{t\in T}\sigma(\xi_t)\right)$. 直接由式(1.1.41)与(1.1.44)得出

$$\mathrm{E}[\mathrm{E}(X\mid\xi)]=\mathrm{E}X, \tag{1.1.41$'$}$$

$$\mathrm{E}(X\mid\xi)=\begin{cases}X, & \sigma(X)\subset\sigma(\xi),\\ \mathrm{E}X, & X\text{ 与 }\xi\text{ 独立}.\end{cases} \tag{1.1.44$'$}$$

若 $\xi\equiv\mathrm{const}$, 则 $\sigma(\xi)=\{\Omega,\varnothing\}$, 因而 $\mathrm{E}(X\mid\xi)=\mathrm{E}X$. 由此可见,当 ξ 确定时条件期望 $\mathrm{E}(X\mid\xi)$ 亦是确定的;这就表明 $\mathrm{E}(X\mid\xi)$ 的不确定性源于 ξ 取值的不确定性. 那么取定 $\xi=y$ 能否得到一个确定的条件期望值 $\mathrm{E}(X\mid\xi=y)$? 如下面的定理将指出的,回答"几乎"是肯定的.

定理 1.1.13 设 $\mathrm{E}(X \mid \xi)$ 依式(1.1.45),则在概率空间 $(E, \mathscr{B}, P_\xi)$ 上存在 a. s. 唯一确定的可测函数 $g(\cdot)$,使得 $\mathrm{E}(X \mid \xi) = g(\xi)$,即

$$\int_{\xi \in B} X \mathrm{d}P = \int_B g \mathrm{d}P_\xi, \quad B \in \mathscr{B}. \tag{1.1.47}$$

依定理 1.1.13 的记号,约定

$$\mathrm{E}(X \mid \xi = y) = g(y), \tag{1.1.48}$$

这就使得条件期望 $E(X \mid \xi = y)$ 获得了意义. 只是应注意,$\mathrm{E}(X \mid \xi = y)$ 仅在 a. s. 的意义上确定. 特别,若 Y 是一个 m 维随机变量,则 $g(y) = E(X \mid Y = y)$ 是在 $\mathbf{R}^m$ 上 a. s. 确定的 Borel 可测函数;由式(1.1.47)有

$$\int_{Y \in B} X \mathrm{d}P = \int_B \mathrm{E}(X \mid Y = y) \mathrm{d}P_Y(y), \quad B \in \mathscr{B}^m. \tag{1.1.49}$$

依次取 $B = \mathbf{R}^m$ 与 $X = I_A (A \in \mathscr{F})$,从式(1.1.49)得

$$\mathrm{E}X = \int_{\mathbf{R}^m} \mathrm{E}(X \mid Y = y) \mathrm{d}P_Y(y), \tag{1.1.50}$$

$$P(A) = \int_{\mathbf{R}^m} P(A \mid Y = y) \mathrm{d}P_Y(y), \tag{1.1.51}$$

其中

$$P(A \mid Y = y) = \mathrm{E}(I_A \mid Y = y), \quad A \in \mathscr{F}. \tag{1.1.52}$$

式(1.1.51)可看作全概率公式(1.1.1)的推广,$\mathrm{d}P_Y(y)$ 也经常写作 $P_Y(\mathrm{d}y)$.

§1.2 随机过程

本章引言中已提到,随机微分方程就是关于随机函数的微分方程. 现在考虑随机函数,它就是通常所说的随机过程. “过程”一词凸显了系统状态随时间演进的动态特征. 在现代随机数学中,随机过程是一个大课题,此处仅涉及本书要用到的部分.

1.2.1 一般概念

以下总以 T 记所用的参数集,可将 $t \in T$ 理解为时间. 通常认定 T 是某个实区间或 $T = \mathbf{Z}_+$,在后一情况下以 n 表示时间参数.

定义 1.2.1 任一族随机变量 $\{X_t: t \in T\}$ 称为以 T 为参数集的**随机过程**.

上述定义简短得几乎不含什么实质内容,以至令人怀疑,由此出发竟能演绎出一个丰富的理论. 实际上,正因为一开始限制很少,才留下足够的发展空间.

以下设 $\{X_t: t \in T\}$ 是给定的随机过程,通常就简写作 X_t 或 $X(t)$. 可从三种不同的角度来看待 X_t. 第一种观点即如定义 1.2.1 所述,对每个 $t \in T$,$X_t: \Omega \to E$ 是随机变量,E 称为**状态空间**,通常取 $E = \mathbf{R}^d$,亦可取 E 为其他的空间. 当 $E = \mathbf{R}^d$

时称 X_t 为一个 d 维随机过程. 第二种观点是将 X_t 看作一个二元函数:

$$X: T \times \Omega \to E, \quad (t,\omega) \to X_t(\omega).$$

为突出变量 t 与 ω 的平等性,可将 $X_t(\omega)$ 写作 $X(t,\omega)$. 第三种观点与第一种观点恰好相反,突出 X_t 对 t 的依赖性,而将 $\omega \in \Omega$ 视为"参数". 对每个给定的 $\omega \in \Omega$,

$$X(\omega): T \to E, \quad t \to X_t(\omega)$$

作为时间的函数,称为 X_t 的**轨道**或**样本函数**,它表示过程实际演进的可能道路. 为突出 X 是 t 的函数,常将 X_t 写作 $X(t)$. 当 ω 给定时,函数 $X(t)$ 是一个普通的单变量函数,因而可对其考虑实分析中的种种问题,如连续性、积分等,与之相关的概念称为**轨道概念**,如轨道连续、轨道有界、轨道积分等. 就本书的目的而言,不妨将随机过程 X_t 简单地视为一个时间函数 $X(t)$,它与普通函数的区别只是因"机会" ω 的不确定性, $X(t) = X(t,\omega)$ 并不能由时间 t 完全确定. 在记号上, ω 通常被忽略掉;而实际上, ω 的存在及其影响当然是本质的东西,只是仅存于心中而已.

在同时涉及多个随机过程如 X_t, Y_t 等时,总认定它们共有一个参数集 T. 若 $X_t = Y_t$, a. s. ($\forall t \in T$), 则说 X_t 与 Y_t **等价**,或说 Y_t 是 X_t 的一个**修正**(准确地说是 X_t 与 Y_t 互为修正);若 $P(X_t = Y_t(\forall t \in T)) = 1$, 则说 X_t 与 Y_t **无差别**. 对于连续时间随机过程来说,"无差别"是比"等价"强得多的概念. 互相等价的随机过程有相同的统计性质,而其**轨道性质**则可能相差甚远. 用轨道性质较好的某个修正 Y_t 取代给定的过程 X_t, 在随机过程理论中是一个常用的方法. 只要 X_t 的某个修正具有某性质 P, 通常就认定 X_t 具有性质 P. 这一看似不严格的说法在文献中已被广泛认可. 若两个随机过程无差别,则其轨道性质亦几乎是一样的.

处理随机过程的一个基本方法是将所考虑的过程与一族随时间扩大的**信息集**联系起来,信息集界定为一定的 σ 代数,下面就是准确的定义.

定义 1.2.2 设 $T = \mathbf{R}_+$ 或 $\mathbf{Z}_+$, $\{\mathscr{F}_t: t \in T\}$ 是 $\mathscr{F}$ 的一族子 σ 代数,它随 t 上升,即 $s < t \Rightarrow \mathscr{F}_s \subset \mathscr{F}_t$, 则称 $\{\mathscr{F}_t: t \in T\}$ 为概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的一个 **σ 代数流**,通常简写作 $\{\mathscr{F}_t\}$ 或 $\mathscr{F}_t$. 若 $\mathscr{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathscr{F}_s (\forall t \in T)$, 则称 $\{\mathscr{F}_t\}$ 右连续;若 $\{\mathscr{F}_t\}$ 右连续且 $\mathscr{F}_0$ 包含所有零概集,则称 $\{\mathscr{F}_t\}$ 满足通常条件.

直观上,可将 $\mathscr{F}_t$ 理解为到时间 t 为止所有可能利用的信息之集,或就称为" t 前信息集",这种信息随时间推进而逐步展开,因此 $\mathscr{F}_t$ 自然随 t 增大而扩大. 例如,任何随机过程 $X_t (t \in T)$ 都伴随着一族逐渐扩大的信息集

$$\mathscr{F}_t^X = \sigma(X_s, t \geqslant s \in T), \quad t \in T. \tag{1.2.1}$$

今后称 $\{\mathscr{F}_t^X: t \in T\}$ 为过程 X_t 生成的 σ 代数流. 在研究某个随机过程时,除了利用 X_t 自身提供的信息之外,往往还需要由其他相关过程提供的信息. 因此,合理的作法是,设定一个稍大的 σ 代数流 $\{\mathscr{F}_t\}$ 作为同时考虑的多个随机过程的共同背景. 凡满足 $\sigma(X_t) \subset \mathscr{F}_t (\Leftrightarrow \mathscr{F}_t^X \subset \mathscr{F}_t)$ 的随机过程 X_t 称为 $\mathscr{F}_t$ **适应过程**,或简称为

适应过程. 要使设定的 σ 代数流 $\mathscr{F}_t$ 能满足所考虑问题的需要,要求所有相关的随机过程均为 $\mathscr{F}_t$ 适应是理所当然的. 因此,今后将总假设已给定一个 σ 代数流 $\{\mathscr{F}_t\}$,且设它已满足通常条件,而涉及的随机过程则总假定是 $\mathscr{F}_t$ 适应的. 如同概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 一样,σ 代数流 $\{\mathscr{F}_t\}$ 的存在纯粹是一个逻辑前提. 除少数特殊情况之外,通常并不涉及如何具体构成 $\mathscr{F}_t$ 的问题,因而在这一点上并不存在什么障碍. 鉴于 $\mathscr{F}_t$ 将总是伴随着所考虑的随机过程,我们甚至并不需要处处提到它.

σ 代数流 $\{\mathscr{F}_t\}$ 同时产生一个条件期望算子族 $\mathrm{E}(\cdot \mid \mathscr{F}_t)(t \in T)$,为简单起见,今后将写作 E_t,即 $\mathrm{E}_t X = \mathrm{E}(X \mid \mathscr{F}_t)$,可解释为"在至 t 为止已知信息条件下的期望". 直接从(1.1.41)~(1.1.44)推出期望算子 E_t 有以下性质:

$$\mathrm{E}\mathrm{E}_t X = \mathrm{E}X, \tag{1.2.2}$$

$$\sigma(X) \subset \mathscr{F}_t \Rightarrow \mathrm{E}_t(XY) = X\mathrm{E}_t Y, \tag{1.2.3}$$

$$\mathrm{E}_t\mathrm{E}_s X = \mathrm{E}_s X = \mathrm{E}_s X_t X, \quad s < t, \tag{1.2.4}$$

$$\mathrm{E}_t X = \begin{cases} X, & \sigma(X) \subset \mathscr{F}_t, \\ \mathrm{E}X, & \sigma(X) \text{ 与 } \mathscr{F}_t \text{ 独立}. \end{cases} \tag{1.2.5}$$

一个随机过程 X_t 常常自然地关联着一些随机时间,例如,X_t 成为零的时间、超出某个界限的时间等. 一般地,任给 Borel 集 B,

$$\tau = \inf\{t \in T:\ X_t \in B\} \tag{1.2.6}$$

就是一个随机时间,可看作 X_t 进入 B 的**首达时间**(或等价地,逸出 B^c 的**首出时间**). 这样的随机时间对于刻画过程性质的作用是显而易见的. 但要使如上的 τ 能发挥作用,就必须要求 τ 满足某种可测性条件,这导致以下定义.

定义 1.2.3　若某个函数 $\tau:\ \Omega \to T \cup \{\infty\}$ 满足条件

$$\{\tau \leqslant t\} \in \mathscr{F}_t, \quad \forall t \in T, \tag{1.2.7}$$

则称 τ 为一个**停时**或 $\mathscr{F}_t$ 停时.

容许 τ 取 ∞ 是必要的. 例如,若 τ 依(1.2.6),则 $\tau = \infty \Leftrightarrow X_t \notin B(\forall t \in T)$. 直观上,条件(1.2.7)意味着,要判断事件"$\tau \leqslant t$",仅用已知的"t 前信息"就够了. 若 τ 是一个停时,则可验证

$$\mathscr{F}_\tau \triangleq \{A \in \mathscr{F}:\ A \cap \{\tau \leqslant t\} \in \mathscr{F}_t(t \in T)\} \tag{1.2.8}$$

是 $\mathscr{F}$ 的一个子 σ 代数,将它看作是"τ 前信息"之集.

对于停时的运用,条件(1.2.7)的验证可能是一件颇麻烦的事情. 但如同在考虑随机变量时一样,可测性验证很少会成为实质性障碍. 不妨认可以下一般结论:若 $\tau:\ \Omega \to T \cup \{\infty\}$ 是利用适应随机过程通过通常的构成手续(如实行通常的运算、取上下确界等)定义的,则 τ 必为停时. 例如,对于适应过程 X_t,在关于 X_t 与 B 的很一般的条件下,由(1.2.6)定义的 τ 就是一个停时. 以上结论,今后将不加解释地利用.

任给函数 φ：$T \to \mathbf{R}^d$ 与停时 τ，总约定

$$\varphi(\tau) = \begin{cases} \varphi(\tau), & \tau < \infty, \\ 0, & \tau = \infty. \end{cases}$$

基于此，当 X_t 是 d 维随机过程时，X_τ 有意义. 一个自然的问题是：关于 X_t 的某个结论在以 τ 代 t 之后是否仍保持成立？在一定附加条件下，此问题常常能得到肯定的结论. 这就意味着，凡适用于**确定时间** t 的命题，通常亦适用于**随机时间** τ. 这无疑是一个极重要的事实，它为停时概念的有效利用开辟了道路.

前面提到，定义 1.2.1 的简单性为随机过程理论的展开留下了广阔的空间. 现在则要强调，深入的结果有赖于对所考虑的随机过程作较强的限定. 一些特殊的限制条件将在后面陆续提出，此处仅提出某些较一般的限定，它们可分为如下三组：

(i) **轨道性质**. 设 $X_t(t \in T)$ 是给定的 d 维随机过程. 若 X_t 对 t 连续（或右连续），则称 X_t 为连续（或右连续）过程；若 X_t 对 t 右连续、左极限存在，则称 X_t 为**右连左极过程**；若 X_t 非负、对 t 右连续且单调增（此时限定 $d = 1$），则称 X_t 为**增过程**；两个增过程的差称为**有界变差过程**.

(ii) **可测性**. 若 X_t 关于 (t,ω) 为 $\mathscr{B}_T \times \mathscr{F}$ 可测，则称 X_t 为**可测过程**；若 $T = \mathbf{R}_+$，$\forall t_0 \in \mathbf{R}_+$，$X_t$ 关于 (t,ω) 为 $\mathscr{B}_{[0,t_0]} \times \mathscr{F}_{t_0}$ 可测，则称 X_t 为**循序可测过程**，简称为**循序过程**.

(iii) **可积性**. 说到可积过程时总是指过程对 ω 可积. 具体地说，若 $X_t \in L^p(\forall t \in T)$，则称 X_t 为 p 次可积过程或 p 阶矩过程；1 次可积过程就简称为**可积过程**；2 次可积过程也称为**平方可积过程**或二阶矩过程. 二阶矩过程的优势在于，它可看作 Hilbert 空间 $L^2(\Omega,\mathbf{R}^d)$ 中的一个单参数函数，因而可充分利用 Hilbert 空间的种种良好性质.

在随机过程理论中，收敛性是一重要课题. 下面以随机序列 $\{X_n\}$ 为例界定常用的收敛概念，当 $t \to \infty$ 或 $t \to t_0$ 时 X_t 的收敛性是类似的. 设 X_n, X 均为 d 维随机变量，则 $X_n \to X(n \to \infty)$ 至少有如下四种不同解释：

a. s. 收敛：$X_n \to X$, a. s. $\Leftrightarrow P(\omega: X_n(\omega) \to X(\omega)) = 1$;

L^p 收敛：$X_n \xrightarrow{L^p} X \Leftrightarrow \mathrm{E}|X_n - X|^p \to 0$;

随机收敛：$X_n \xrightarrow{P} X \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0: P(|X_n - X| \geqslant \varepsilon) \to 0$;

分布收敛：$X_n \xrightarrow{d} X \Leftrightarrow$ 在 $F_X(\cdot)$ 的连续点 x 有 $F_{X_n}(x) \to F_X(x)$.

a. s. 收敛就是实分析中的几乎处处收敛；随机收敛就是依概率测度 P 收敛；$p \geqslant 1$ 时 L^p 收敛就是 Banach 空间 $L^p(\Omega,\mathbf{R}^d)$ 中的范数收敛，亦称 p 次平均收敛或 p 阶矩收敛；L^2 收敛也称为**均方收敛**，且用以下特殊记号：

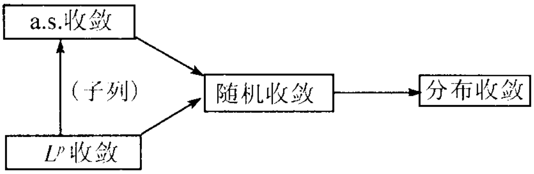
$$X_n \xrightarrow{L^2} X \Leftrightarrow X_n \to X, \text{m. s.} \Leftrightarrow X = \text{l. i. m}\, X_n.$$

对于以上三种收敛，实分析中已有一系列现成结论可用，此处概不细述. 分布收敛

是特殊的,可刻画为

$$X_n \xrightarrow{d} X \Leftrightarrow \forall g \in C_b(\mathbf{R}): \mathrm{E}g(X_n) \to \mathrm{E}g(X),$$

其中 $C_b(\mathbf{R})$ 表 $\mathbf{R}$ 上的有界连续函数之集. 以上四种收敛性的相互关系如下:



现在设 T 是实区间, $\{X_t: t \in T\}$ 是 d 维随机过程. 上面所说的每种收敛性,都可用到极限 $\lim\limits_{t \to t_0} X(t)$, 且界定出相应的连续性. 例如,若 $t \to t_0$ 时 $X(t) \xrightarrow{L^p} X(t_0)$, 则称 $X(t)$ 在 t_0 处为 **p 阶矩连续**或 **L^p 连续**;二阶矩连续也称为**均方连续**;若 $t \to t_0$ 时 $X(t) \xrightarrow{P} X(t_0)$, 则称 $X(t)$ 在 t_0 处**随机连续**.

1.2.2 鞅

本小节设 $T = [t_0, b] \subset \mathbf{R}_+$ 或 $T = \mathbf{Z}_+$, $X_t, Y_t (t \in T)$ 等是 $\mathscr{F}_t$ 适应的可积过程. 凡涉及条件期望的等式或不等式都理解为在 a. s. 意义下成立.

定义 1.2.4 若当 $t < s(t, s \in T)$ 时恒有 $\mathrm{E}_t X_s = X_t$, 则称 X_t 为**鞅**;若当 $t < s(t, s \in T)$ 时恒有 $\mathrm{E}_t X_s \leqslant X_t$ (或 $\mathrm{E}_t X_s \geqslant X_t$),则称 X_t 为**上鞅**(或**下鞅**).

显然, X_t 是鞅 $\Leftrightarrow X_t$ 同时为上鞅与下鞅; X_t 是上鞅 $\Leftrightarrow -X_t$ 是下鞅. 鞅的定义与 X_t 的维数并无关系. 若 X_t 是上鞅,则当 $t < s(t, s \in T)$ 时 $\mathrm{E}X_t \geqslant \mathrm{E}X_s$, 这意味着 $\mathrm{E}X_t$ 对 t 单调减. 类似地,若 X_t 是下鞅,则 $\mathrm{E}X_t$ 对 t 单调增;若 X_t 是鞅,则 $\mathrm{E}X_t \equiv \mathrm{const}$. 由此可见,在统计平均的意义上,上鞅与下鞅呈现出单调变化趋势,这就注定了它们必定服从很强的统计规律. 这正是鞅概念具有重要价值的原因.

从已知的鞅(或上鞅、下鞅)出发,通过一些标准的构成手续可得到新的鞅(或上鞅、下鞅). 这一类的结论虽然简单,但是基本而常用的.

命题 1.2.5 (i)(线性运算) 鞅的线性组合是鞅;上鞅(或下鞅)的非负系数线性组合是上鞅(或下鞅).

(ii)(格运算) 可数个上鞅的下确界当其可积时是上鞅;可数个下鞅的上确界当其可积时是下鞅. 特别,若 X_t 是上鞅,则 $X_t^- = (-X_t) \vee 0$ 是下鞅;若 X_t 是下鞅,则 X_t^+ 是下鞅;若 X_t 是实值鞅,则 X_t^+, X_t^- 与 $|X_t|$ 均为下鞅.

(iii)(凸变换) 设 $\varphi: \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ 是凸函数, X_t 是 $\mathbf{R}^d$ 值鞅, $\varphi(X_t)$ 可积,则 $\varphi(X_t)$ 是下鞅. 特别,若 X_t 是 $\mathbf{R}^d$ 值鞅, $p \geqslant 1$, 则 $|X_t|^p$ 是下鞅.

其中结论(i),(ii)是明显的,结论(iii)由 Jensen 不等式((1.1.22))推出.

当 $T = \mathbf{R}_+$ 或 $\mathbf{Z}_+$ 时,令 $\overline{T} = T \cup \{\infty\}$. 随机过程 $\{X_t: t \in \overline{T}\}$ 是适应的意味着 $\{X_t: t \in T\}$ 是适应的,且

$$\sigma(X_\infty) \subset \mathscr{F}_\infty \triangleq \sigma\Big(\bigcup_{t\in T} \mathscr{F}_t\Big). \tag{1.2.9}$$

若 $\{X_t: t \in \overline{T}\}$ 是可积适应过程,当以 $\overline{T}$ 代 T 时 X_t 满足定义 1.2.4 的条件,则分别称 X_t 为**右闭**的鞅、上鞅或下鞅,称 X_∞ 为**右闭元**. Doob 建立了如下著名结果.

定理 1.2.6(停时定理) 设 X_t 是右连续的右闭鞅(或右闭上鞅、右闭下鞅),σ,τ 是两个停时,$\sigma \geqslant \tau$, 则 X_σ 与 X_τ 必可积,且

$$\mathrm{E}_\tau X_\sigma = X_\tau (\text{或 } \mathrm{E}_\tau X_\sigma \leqslant X_t, \mathrm{E}_\tau X_\sigma \geqslant X_\tau), \tag{1.2.10}$$

其中 $\mathrm{E}_\tau = \mathrm{E}(\cdot \mid \mathscr{F}_\tau)$,$\mathscr{F}_\tau$ 依式(1.2.8).

形式上,式(1.2.10)无非是在定义 1.2.4 的条件中以 σ,τ 分别取代 s,t.

鞅的主要优势之一是对它可建立一系列不等式,即所谓**鞅不等式**. 对于随机积分及随机微分方程解的估计,鞅不等式将是主要依据之一. 依离散与连续时间两种情况,下面平行地表述两组鞅不等式.

定理 1.2.7 设 $p \geqslant 1, \varepsilon > 0$.

(i) 极大不等式:若 X_n 是下鞅,则

$$P\Big(\sup_{k\leqslant n} X_k \geqslant \varepsilon\Big) \leqslant \varepsilon^{-1}\mathrm{E}X_n^+, \tag{1.2.11}$$

$$P\Big(\sup_{k\leqslant n} X_k \geqslant \varepsilon\Big) \leqslant \varepsilon^{-p}\mathrm{E}X_n^p, \quad X_n \geqslant 0. \tag{1.2.12}$$

若 X_n 是上鞅,则

$$\varepsilon P\Big(\sup_{k\leqslant n} X_k \geqslant \varepsilon\Big) \leqslant \mathrm{E}X_0 + \mathrm{E}X_n^-, \tag{1.2.13}$$

$$\varepsilon P\Big(\sup_{k\leqslant n} |X_k| \geqslant \varepsilon\Big) \leqslant \mathrm{E}X_0 + 2\mathrm{E}X_n^-. \tag{1.2.14}$$

若 X_n 是 $\mathbf{R}^d$ 值鞅,则

$$P\Big(\sup_{k\leqslant n} |X_k| \geqslant \varepsilon\Big) \leqslant \varepsilon^{-p}\mathrm{E}|X_n|^p. \tag{1.2.15}$$

(ii) **Doob 不等式**:设 $p > 1$,X_n 是 p 次可积的非负下鞅,则

$$\mathrm{E}\Big|\sup_{k\leqslant n} X_k\Big|^p \leqslant \Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p \mathrm{E}X_n^p; \tag{1.2.16}$$

若 X_n 是 p 次可积的 $\mathbf{R}^d$ 值鞅,则

$$\mathrm{E}\Big(\sup_{k\leqslant n} |X_k|^p\Big) \leqslant \Big(\frac{p}{p-1}\Big)^p \mathrm{E}|X_n|^p. \tag{1.2.17}$$

定理 1.2.8 设 $\varepsilon > 0, p \geqslant 1$, $\{X_t: a \leqslant t \leqslant b\}$ 是可积过程.

(i) 极大不等式:若 X_t 是下鞅,则

$$P\Big(\sup_{a\leqslant t\leqslant b} X_t \geqslant \varepsilon\Big) \leqslant \varepsilon^{-1}\mathrm{E}X_b^+, \tag{1.2.18}$$

$$P\left(\sup_{a\leqslant t\leqslant b}X_t \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \varepsilon^{-p}\mathrm{E}X_b^p, \quad X_t \geqslant 0. \tag{1.2.19}$$

若 X_t 是上鞅,则

$$\varepsilon P\left(\sup_{a\leqslant t\leqslant b}X_t \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \mathrm{E}X_a + \mathrm{E}X_b^-, \tag{1.2.20}$$

$$\varepsilon P\left(\sup_{a\leqslant t\leqslant b}|X_t| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \mathrm{E}X_a + 2\mathrm{E}X_b^-. \tag{1.2.21}$$

若 X_t 是 $\mathbf{R}^d$ 值鞅,则

$$P\left(\sup_{a\leqslant t\leqslant b}|X_t| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \varepsilon^{-p}\mathrm{E}|X_b|^p. \tag{1.2.22}$$

(ii) Doob 不等式:设 $p > 1$,X_t 是 p 次可积的非负下鞅,则

$$\mathrm{E}\left|\sup_{a\leqslant t\leqslant b}X_t\right|^p \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathrm{E}X_b^p. \tag{1.2.23}$$

若 X_t 是 p 次可积的 $\mathbf{R}^d$ 值鞅,则

$$\mathrm{E}\left(\sup_{a\leqslant t\leqslant b}|X_t|^p\right) \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathrm{E}|X_b|^p. \tag{1.2.24}$$

前面已提到上鞅或下鞅在统计平均意义上的单调性,鉴于此,已可估计到能建立很强的收敛定理.下面仅写出对连续时间情况的结论.

定理 1.2.9 设 $\{X_t : t \in \mathbf{R}_+\}$ 是右连续的可积适应过程.

(i)(a.s. 收敛性) 若 X_t 是上鞅,$\sup \mathrm{E}X_t^- < \infty$(或 X_t 是下鞅,$\sup\mathrm{E}X_t^+ < \infty$),则当 $t\to\infty$ 时 $X_t \to X_\infty$, a.s. 且 $X_\infty \in L^1$.

(ii)(L^1 收敛性) 设 X_t 是上鞅(或下鞅),则当 $t\to\infty$ 时 $X_t \xrightarrow{L^1} X_\infty \Leftrightarrow X_t$ **一致可积**,即 $\lim\limits_{a\to\infty}\sup\limits_{t\geqslant 0}\int_{|X_t|\geqslant a}|X_t|\,\mathrm{d}P = 0$;当 $X_t \xrightarrow{L^1} X_\infty$ 时必 $X_t \to X_\infty$, a.s..

(iii) 设 $X \in L^1(\Omega,\mathbf{R}^d)$,则当 $t\to\infty$ 时 $\mathrm{E}_tX \to \mathrm{E}(X|\mathscr{F}_\infty)$(依 L^1 收敛与 a.s. 收敛).

若 $\{X_t : t\in\mathbf{R}_+\}$ 是一个平方可积的连续鞅,则存在唯一连续、可积且适应的增过程 Y_t,使得 $X_t^2 - Y_t$ 是连续鞅且 $X_0^2 - Y_0 = 0$,称这样的 Y_t 为 X_t 的**平方变差过程**,记作 $\langle X,X\rangle_t$ 或 $\langle X(t),X(t)\rangle$. 若 X_t, Y_t 是两个平方可积的连续鞅,则称

$$\langle X,Y\rangle_t \triangleq (1/2)(\langle X+Y,X+Y\rangle_t - \langle X,X\rangle_t - \langle Y,Y\rangle_t)$$

为 X_t 与 Y_t 的**交互变差过程**,它是一个有界变差过程.可验证 $X_tY_t - \langle X,Y\rangle_t$ 是连续鞅且 $X_0Y_0 - \langle X,Y\rangle_0 = 0$,此条件唯一地决定了 $\langle X,Y\rangle_t$.

其次设 $\{X_t : t\in\mathbf{R}_+\}$ 是一个右连续的适应过程.若存在停时序列 $\{\tau_n\}$,$\tau_n\to\infty$, a.s.,使得 $X_{t\wedge\tau_n} - X_0$ 是鞅,则称 X_t 为**局部鞅**.鞅必为局部鞅,因此局部鞅是鞅的推广.若 X_t 是连续的局部鞅,则存在唯一有界变差的连续适应过程 $\langle X,X\rangle_t$,使得 $X_t^2 - \langle X,X\rangle_t$ 是连续局部鞅,且 $X_0^2 - \langle X,X\rangle_0 = 0$.

利用变差过程概念可建立如下出色结果：

定理 1.2.10(大数定律) 设 X_t 是实值连续局部鞅，$X_0 = 0$.

(i) 若 $\lim\limits_{t\to\infty}\langle X,X\rangle_t = \infty$, a.s.,则 $\lim\limits_{t\to\infty} X_t/\langle X,X\rangle_t = 0$, a.s..

(ii) 若 $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\, t^{-1}\langle X,X\rangle_t < \infty$, a.s.,则 $\lim\limits_{t\to\infty} t^{-1}X_t = 0$, a.s..

在本书中,局部鞅概念是重要的,且一般以 Itô 不定积分的形式出现. 局部鞅的运用通常联系于所谓**半鞅收敛定理**. 为引用方便,下面的表述与一般文献稍有不同,通常所称的半鞅收敛定理,仅指其中的结论(i).

定理 1.2.11 设 $X(t)$,$A(t)$,$B(t)$ 均为实值连续适应过程,$M(t)$ 是一个实值连续局部鞅,$X(t)\geqslant 0$,a.s.,$A(0) = B(0) = M(0) = 0$,a.s.;ξ 是一个 $\mathscr{F}_0$ 可测非负可积随机变量.

(i) 设 $X(t) = \xi + A(t) - B(t) + M(t)$,a.s.,$A(t)$ 与 $B(t)$ 均为增过程(这样的 $X(t)$ 称为半鞅). 若 $A(t)$ 为 a.s. 轨道有界,即 $\sup_{t\geqslant 0}A(t) < \infty$, a.s.,则当 $t\to\infty$ 时 $X(t)$,$B(t)$ 与 $M(t)$ 均 a.s. 收敛;若改设 $X(t)\leqslant \xi + A(t) - B(t) + M(t)$, a.s. 而其他条件不变,则 $X(t)$ 为 a.s. 轨道有界.

(ii) 若 $X(t)\leqslant \xi + A(t) + M(t)$, a.s., $|A(t)|\leqslant B(t)$, a.s., $B(t)$ 为可积增过程,则 $\mathrm{E}X(t)\leqslant \mathrm{E}\xi + \mathrm{E}A(t)$.

(iii) 若 $X(t)\leqslant \xi + M(t)$, a.s.,则 $X(t)$ 为 a.s. 轨道有界, $\mathrm{E}X(t)\leqslant \mathrm{E}\xi$;当 $t\to\infty$ 时 $M(t)$ a.s. 收敛.

(iv) 若 $X(t)\geqslant \xi + M(t)$, 且 $X(t)$ 有性质:当 $t\geqslant 0$, $\{\tau_n\}$ 为停时序列, $\tau_n\uparrow t$ 时 $\mathrm{E}X(\tau_n)\to \mathrm{E}X(t)$, 则 $\mathrm{E}X(t)\geqslant \mathrm{E}\xi$.

证 (i) 参考文献(Liptser 等, 1989).

(ii) 取停时序列 $\{\tau_n\}$,使 $M(t\wedge\tau_n)$ 为鞅,且 $\tau_n\to\infty$, a.s.,则

$$\begin{aligned}\mathrm{E}X(t) &= \mathrm{E}[\lim_n X(t\wedge\tau_n)] \leqslant \underline{\lim}_n \mathrm{E}X(t\wedge\tau_n) \quad (\text{用 Fatou 定理})\\ &\leqslant \underline{\lim}_n [\mathrm{E}\xi + \mathrm{E}A(t\wedge\tau_n)]\\ &= \mathrm{E}\xi + \mathrm{E}A(t). \quad (\text{用控制收敛定理})\end{aligned}$$

类似地可证(iv),而(iii)是(i)与(ii)的推论. □

1.2.3 Markov 过程与 Brown 运动

在随机过程理论中,Markov 过程是得到详尽研究的一大类随机过程. 而随机微分方程的解正是 Markov 过程,这就决定了 Markov 过程概念在随机微分方程理论中的重要性. Markov 过程理论所积累的材料极其庞大,此处仅涉及本书中将用到的那一小部分. 考虑到本书的实际需要,下面的定义是有点特殊的.

定义 1.2.12 若 d 维适应过程 $\{X_t: t\in\mathbf{R}_+\}$ 具有如下 **Markov 性质**:

$$P(X_t \in B \mid \mathscr{F}_s) = P(X_t \in B \mid X_s), \quad 0 \leqslant s < t, B \in \mathscr{B}^d. \tag{1.2.25}$$

则称 X_t 为一个 **Markov 过程**.

Markov 性质(1.2.25)有多种等价形式,其中之一是

$$\mathrm{E}(\varphi(X_t) \mid \mathscr{F}_s) = \mathrm{E}(\varphi(X_t) \mid X_s), \quad 0 \leqslant s < t, \tag{1.2.26}$$

其中 $\varphi(\cdot)$ 遍取 $\mathbf{R}^d$ 上的有界 Borel 可测函数. 注意取 $\varphi = I_B(B \in \mathscr{B}^d)$, 则由(1.2.26)得出(1.2.25). 若对任何有界 Borel 可测函数 $\varphi: \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ 与任何有限停时 τ, 均有

$$\mathrm{E}(\varphi(X_{\tau+t}) \mid \mathscr{F}_\tau) = \mathrm{E}(\varphi(X_{\tau+t}) \mid X_\tau), \quad t \geqslant 0. \tag{1.2.27}$$

则称 X_t 为**强 Markov 过程**. 条件(1.2.27)显然强于条件(1.2.26).

直观上, X_t 是 Markov 过程意味着在给定当前状态 X_s 的条件下,系统的未来状态 $X_t(t > s)$ 与系统的过去状态 $X_r(r < s)$ 无关. 可以说,过程的历史已凝结于现在,在判断未来时已无需再考虑了.

以下设 X_t 是给定的 d 维 Markov 过程. 对 $0 \leqslant s < t < \infty, x, y \in \mathbf{R}^d, B \in \mathscr{B}^d$, 约定

$$P(s,x,t,B) = P(X_t \in B \mid X_s = x), \quad (\text{依}(1.1.52)) \tag{1.2.28a}$$

$$F(s,x,t,y) = P(X_t \leqslant y \mid X_s = x), \tag{1.2.28b}$$

二者分别称为 X_t 的**转移概率**与**转移分布**. 直观上, $P(s,x,t,B)$ 表示当 X 在时刻 s 位于点 x 时于时刻 t 进入 B 的概率. 若 $F(s,x,t,y)$ 作为 y 的函数绝对连续,则有密度函数 $f(s,x,t,y)$, 称为**转移密度**. 若

$$P(s+r,x,t+r,B) = P(s,x,t,B), \quad \forall r \geqslant 0.$$

则称 X_t 为**齐次 Markov 过程**. 对于齐次 Markov 过程 X_t, 约定

$$P(t,x,B) = P(s,x,s+t,B), \tag{1.2.29a}$$

$$F(t,x,y) = F(s,x,s+t,y), \tag{1.2.29b}$$

$$f(t,x,y) = f(s,x,s+t,y), \tag{1.2.29c}$$

对于式(1.2.29c)自然要求转移密度存在. 此外,约定记号

$$\mathrm{E}_{s,x}\varphi(X_t) = \mathrm{E}(\varphi(X_t) \mid X_s = x).$$

依此,条件(1.2.26)与(1.2.27)可分别改写为

$$\mathrm{E}(\varphi(X_t) \mid \mathscr{F}_s) = \mathrm{E}_{s,X(s)}\varphi(X_t),$$

$$\mathrm{E}(\varphi(X_{\tau+t}) \mid \mathscr{F}_\tau) = \mathrm{E}_{\tau,X(\tau)}\varphi(X_{\tau+t}).$$

若对任何有界连续函数 $\varphi: \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ 与任何 $t > 0$, $\mathrm{E}_{s,x}\varphi(X_{s+t})$ 是 (s,x) 的连续函数,则称 Markov 过程 X_t 有 **Feller 性质**. 若一个右连续的 Markov 过程有 Feller 性质,则必为强 Markov 过程.

关于 Markov 过程的基本结果之一是:

定理 1.2.13　设 X_t 是 Markov 过程,则满足如下 Chapman-Kolmogorov 方程(简称为 C-K 方程):

$$P(s,x,t,B) = \int_{\mathbf{R}^d} P(r,z,t,B)P(s,x,r,\mathrm{d}z), \tag{1.2.30a}$$

$$F(s,x,t,y) = \int_{\mathbf{R}^d} F(r,z,t,y)\,\mathrm{d}_z F(s,x,r,z), \tag{1.2.30b}$$

$$f(s,x,t,y) = \int_{\mathbf{R}^d} f(r,z,t,y)f(s,x,r,z)\,\mathrm{d}z, \tag{1.2.30c}$$

其中$0 \leqslant s \leqslant r \leqslant t < \infty, x,y \in \mathbf{R}^d, B \in \mathscr{B}^d, P(s,x,r,\mathrm{d}z)$ 表示对概率 $P(s,x,r,\cdot)$ 的积分. 式(1.2.30c)自然要求转移密度存在.

作为随机微分方程解的随机过程是 Markov 过程中比较特殊的一类,即如下定义的扩散过程.

定义 1.2.14 设 X_t 是 Markov 过程. 若存在 $\mathbf{R}^d$ 值函数 $\alpha(t,x)$ 与 $\mathbf{R}^{d\times d}$ 值函数 $\beta(t,x)$, 使得 $\forall \delta > 0$, 当 $0 < h \downarrow 0$ 时关于 $x \in \mathbf{R}^d$ 一致地成立

$$\int_{|y-x| \geqslant \delta} P(t,x,t+h,\mathrm{d}y) = o(h), \tag{1.2.31a}$$

$$\int_{|y-x| < \delta} (y-x)P(t,x,t+h,\mathrm{d}y) = \alpha(t,x)h + o(h), \tag{1.2.31b}$$

$$\int_{|y-x| < \delta} (y-x)(y-x)^{\mathrm{T}}P(t,x,t+h,\mathrm{d}y) = \beta(t,x)h + o(h), \tag{1.2.31c}$$

则称 X_t 为**扩散过程**, $\alpha(t,x)$ 与 $\beta(t,x)$ 分别称为 X_t 的**漂移系数**与**扩散系数**.

若 X_t 是齐次扩散过程,则 $\alpha(t,x)$ 与 $\beta(t,x)$ 自然与 t 无关.

现在对条件(1.2.31)作些直观解释. 设 X_t 表示一运动质点在 $\mathbf{R}^d$ 中的位置. 条件(1.2.31a)表明, $\forall \delta > 0$, 在充分短的时间内,质点极不可能从点 x 移出球 $B_\delta(x) = (= \{y \in \mathbf{R}^d : |y-x| < \delta\})$ 之外,这反映了运动的非爆发性. 注意到当 δ 适当大时式(1.2.31b)的积分可代之以 $\mathbf{R}^d$ 上的积分,看出(1.2.31b)相当于

$$\alpha(t,x) = \lim_{h\to 0}\mathrm{E}\left(\frac{X_{t+n} - X_t}{h}\middle| X_t = x\right),$$

这表明 $\alpha(t,x)$ 是质点在时刻 t 从点 x 移开的平均速度. 类似地有

$$\beta(t,x) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\mathrm{Var}(X_{t+h} \mid X_t = x).$$

任给 $\mu = (\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_m)^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^m$ 与正定矩阵 $\Sigma = [\sigma_{kl}] \in \mathbf{R}^{m\times m}$, 令

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2}\sqrt{\det\Sigma}}\exp\left[-\frac{(x-\mu)^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}(x-\mu)}{2}\right], \quad x \in \mathbf{R}^m. \tag{1.2.32}$$

则 $f(x) > 0$, 且可验证 $\int_{\mathbf{R}^m} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$. 若 m 维随机变量 $X = (X_1,X_2,\cdots,X_m)^{\mathrm{T}}$ 以 $f(x)$ 为其密度函数,则称 X 为一个 m 维**正态变量**,或称 X 服从 m 维正态分布,记作 $X \sim N(\mu,\Sigma)$. 由直接计算有(用(1.1.31b))

$$\varphi_X(t) = \int_{\mathbf{R}^m} e^{it\cdot x} f(x)\,dx = \exp\left(i\mu^T t - \frac{t^T \Sigma t}{2}\right), \quad t \in \mathbf{R}^m. \qquad (1.2.33)$$

由(1.2.33)求导得

$$\nabla\varphi_X(t) = \varphi_X(t)(i\mu^T - t^T\Sigma),$$
$$\nabla^2\varphi_X(t) = \varphi_X(t)[(i\mu - \Sigma t)(i\mu - \Sigma t)^T - \Sigma].$$

另一方面,由 $\varphi_X(t) = Ee^{it\cdot X}$ 求导得

$$\nabla\varphi_X(t) = E(e^{it\cdot X} iX^T), \quad \nabla^2\varphi_X(t) = -E(e^{it\cdot X} XX^T).$$

令 $t = 0$ 并比较以上两组结果得(参考(1.1.15))

$$EX = \mu, \quad Var(X) = E(XX^T) - \mu\mu^T = \Sigma.$$

由此推出 $EX_k = \mu_k, \text{cov}(X_k, X_l) = \sigma_{kl}(1 \le k, l \le m)$. 可见

$X_1, X_2, \cdots, X_m$ 两两不相关

$\Leftrightarrow \Sigma = \text{diag}(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \cdots, \sigma_{mm})$

$\Leftrightarrow f(x) = \prod_k \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{kk}}} \exp\left[-\frac{(x_k - \mu_k)^2}{2\sigma_{kk}}\right]$　　(用(1.2.32))

$\Leftrightarrow X_k(1 \le k \le m)$ 独立(用(1.1.9d)).

设 X 如上述, $A \in \mathbf{R}^{n\times m}$, $\text{rank}A = n$, $b \in \mathbf{R}^n$, $Y = AX + b$, 则依(1.1.32)有

$$\varphi_Y(t) = \exp\left[it^T(A\mu + b) - \frac{t^T A\Sigma A^T t}{2}\right], \quad t \in \mathbf{R}^n.$$

这表明 $Y \sim N(A\mu + b, A\Sigma A^T)$ (用命题 1.1.11(iv)). 可见,正态变量经线性变换仍得正态变量. 特别,若 $0 \ne a \in \mathbf{R}^m$, 则

$$\sum_k a_k X_k = a^T X \sim N(a^T\mu, a^T\Sigma a);$$

若 A 为正定矩阵且 $A^2 = \Sigma^{-1}$ (即 A 为 Σ^{-1} 的正平方根), 则 $A(X - \mu) \sim N(0, I)$, I 是 m 阶单位矩阵;当 $Y \sim N(0, I)$ 时,称 Y 为 m 维**标准正态变量**.

作了上述准备之后,现在转向考虑 Brown 运动.

定义 1.2.15　设 $\{w_t : t \in \mathbf{R}_+\}$ 是 m 维 $\mathscr{F}_t$ 适应随机过程,它满足以下条件:

(i) $w_0 = 0$, a.s..

(ii) 正态性:若 $0 \le s < t < \infty$, 则 $w_t - w_s \sim N(0, (t-s)\Sigma)$, $\Sigma = [\sigma_{kl}] \in \mathbf{R}^{m\times m}$ 是正定矩阵.

(iii) 增量独立性:若 $0 \le s < t < \infty$, 则 $w_t - w_s$ 与 $\mathscr{F}_s$ 独立①.

则称 w_t 为一个 m 维 **Brown 运动**或 **Wiener 过程**;当 $\Sigma = I$ (单位矩阵)时称 w_t 为 m 维**标准 Brown 运动**.

---

① 有时使用不依赖于流 $\{\mathscr{F}_t\}$ 的独立增量性定义:若 $(s_i, t_i) \subset \mathbf{R}_+ (1 \le i \le n)$ 是互不相交的区间,则 $\{w(t_i) - w(s_i) : 1 \le i \le n\}$ 是独立的.

以下设 w_t 是一个 m 维 Brown 运动,通常将其写作 $w(t) = (w_1(t), w_2(t), \cdots, w_m(t))^T$, 或省去 t 就写作 $w = (w_1, w_2, \cdots, w_m)^T$.

Brown 运动有一系列良好的性质,这些性质今后将被反复使用.尽管大多数性质都是常识,但为引用方便,下面将其汇集为三组分别表述.

命题 1.2.16 设 $w = (w_1, w_2, \cdots, w_m)^T$ 是依定义 1.2.15 的 Brown 运动.

(i) $\forall t > 0$, 有 $w(t) \sim N(0, t\Sigma)$, 因此 $\mathrm{E}w(t) = 0, \mathrm{Var}(w(t)) = t\Sigma$.

(ii) 若 $A \in \mathbf{R}^{n\times m}$, $\mathrm{rank}A = n$, 则 Aw 是一个 n 维 Brown 运动, $Aw(t) \sim N(0, tA\Sigma A^T)$. 特别,若 $0 \neq (b_1, b_2, \cdots, b_m)^T \in \mathbf{R}^m$, 则 $\sum b_k w_k$ 是一个一维 Brown 运动, $\sum b_k w_k(t) \sim N\left(0, t\sum \sigma_{kl} b_k b_l\right)$; 若 A 是 Σ^{-1} 的正平方根,则 Aw 是一个 m 维标准 Brown 运动.

(iii) 每个分量 $w_k (1 \leqslant k \leqslant m)$ 是一维 Brown 运动, $w_k(t) \sim N(0, t\sigma_{kk})$; $w_1, w_2, \cdots, w_m$ 互相独立 $\Leftrightarrow \Sigma$ 为对角形.

上述表明,从横断面看,Brown 运动服从高度规范化的正态分布;然而从纵向看,它却有着高度复杂的轨道性质.

定理 1.2.17 Brown 运动 $w(t)$ 有如下轨道性质:

(i)(连续性) $w(t)$ 的几乎所有轨道在 $[0, \infty)$ 上连续.

(ii)(不可微性) 设 $\alpha > 1/2$, 则对几乎所有轨道有

$$\overline{\lim_{s\to t}} \frac{|w(s) - w(t)|}{|s - t|^\alpha} = \infty, \quad \forall t \geqslant 0. \tag{1.2.34}$$

取 $\alpha = 1$ 得出:几乎所有轨道在 $[0, \infty)$ 上处处不可微,因而亦非有界变差.

(iii)(渐近性质) 一维标准 Brown 运动满足如下**重对数律**:

$$\underline{\lim_{t\to\infty}} \frac{w(t)}{\sqrt{2t\ln\ln t}} = -1, \text{a.s.}, \quad \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{w(t)}{\sqrt{2t\ln\ln t}} = 1, \text{a.s.}. \tag{1.2.35}$$

对于 m 维标准 Brown 运动 $w(t)$, 亦成立如下重对数律:

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{|w(t)|}{\sqrt{2t\ln\ln t}} = 1, \text{a.s.}. \tag{1.2.35$'$}$$

鉴于定理 1.2.17(i),今后将认定 Brown 运动总是连续的,即所有轨道均连续[①]. 定理 1.2.17(ii)表明,Brown 运动的轨道在任何时段内都是高度紊乱的. 定理 1.2.17(iii)则表明,当 $t \to \infty$ 时 Brown 运动的轨道无界地震荡,但 $|w(t)|$ 的增长不会高于 $\sqrt{2t\ln\ln t}$, 因此总有

$$\lim_{t\to\infty} t^{-\alpha} w(t) = 0, \text{a.s.}, \quad \alpha > 1/2. \tag{1.2.36}$$

命题 1.2.18 设 $w(t)$ 依定义 1.2.15,则 $w(t)$ 有以下性质:

---

① 有些作者干脆将连续性要求置于 Brown 运动的定义之内.

(i) Markov 性: $w(t)$ 是一个齐次 Markov 过程,而且是扩散过程,其漂移系数与扩散系数分别为 0 与 Σ, 其转移密度为

$$f(t,x,y) = \frac{1}{(2\pi t)^{m/2}\sqrt{\det\Sigma}}\exp\left[-\frac{(x-y)^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}(x-y)}{2t}\right]. \quad (1.2.37)$$

(ii) 鞅性质: $w(t)$ 是鞅; $\langle w_k(t), w_l(t)\rangle = t\sigma_{kl}(1 \leqslant k,l \leqslant m)$.

在具体问题中并不避免使用非标准的 Brown 运动. 另一方面,唯有使用标准 Brown 运动才使有关公式达到最大简化. 因此,在理论分析中通常使用标准 Brown 运动. 而由命题 1.2.16(ii),这无损于一般性:任何 Brown 运动总可经线性变换化为标准 Brown 运动,有关公式的转换是直接的. 故此,今后提到 Brown 运动而未加说明时总假定是标准的.

由 Lévy 建立的以下著名结果说明,在某种意义上,命题 1.2.18(ii)所描述的性质是 Brown 运动所独有的.

定理 1.2.19　设 $w = (w_1, w_2, \cdots, w_m)^{\mathrm{T}}$ 是连续局部鞅, $w(0) = 0$, a. s., $\langle w_i(t), w_j(t)\rangle = t\delta_{ij}(t \geqslant 0, 1 \leqslant i,j \leqslant m)$,则 $w(t)$ 为标准 Brown 运动.

由 Lévy 定理直接推出:设 $w(t)(t \geqslant 0)$ 是实值连续局部鞅, $w(0) = 0$, a. s., $\langle w(t), w(t)\rangle \to \infty$ a. s. $(t \to \infty)$,

$$\tau(t) = \inf\{s \geqslant 0 : \langle w(s), w(s)\rangle > t\}, \quad t \geqslant 0.$$

则 $w(\tau(t))$ 是关于 σ 代数流 $\{\mathscr{F}_{\tau(t)} : t \geqslant 0\}$ 的 Brown 运动.

§1.3　随机微积分

如果将随机过程看作关于时间 t 的随机函数,那么对其考虑微积分运算就是一种很自然的想法. 这种尝试很早就以几种不同的形式出现在随机过程理论的发展史上. 只是在 Itô 的理论出现之后,才真正开启了随机分析学的时代. 本节概述 Itô 微积分的基本概念与结果,它们自然构成随机微分方程理论的必备基础.

如同我们一直设定的, $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 是给定的完备概率空间, $\{\mathscr{F}_t : t \in \mathbf{R}_+\}$ 是 $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上的 σ 代数流,它满足通常条件. 此外,设 $w = (w_1, w_2, \cdots, w_m)^{\mathrm{T}}$ 是给定的 m 维标准 Brown 运动, $J = [t_0, T] \subset \mathbf{R}_+$ 是取定的区间.

1.3.1　随机积分

与经典微积分学不同,对于随机微积分学来说,本质的概念是随机积分,而且,引入随机积分的方法也是多种多样的. 下面仅考虑应用上最重要的 Itô 积分,形式上颇类似于通常的 Stieltjes 积分,但其性质与处理方法都有很大不同.

作为定义积分的准备,首先界定两类随机函数空间,它们都是通常的 L^p 空间的某种随机扩张. 设 $1 \leqslant p < \infty$, 约定 $x(t) \in \mathscr{L}^p(J, \mathbf{R}^d) \Leftrightarrow \{x(t) : t \in J\}$ 是可

测、$\mathscr{F}_t$ 适应的 $\mathbf{R}^d$ 值随机过程，满足条件

$$\int_{t_0}^{T} |x(t)|^p \mathrm{d}t < \infty, \quad \text{a.s.},$$

上式中的积分是通常的 Lebesgue 积分. 其次，进而约定 $x(t) \in \mathscr{M}^p(J,\mathbf{R}^d) \Leftrightarrow x(t) \in \mathscr{L}^p(J,\mathbf{R}^d)$ 且 $x(t)$ 满足条件

$$\mathrm{E}\int_{t_0}^{T} |x(t)|^p \mathrm{d}t < \infty.$$

$\mathscr{L}^p(J,\mathbf{R}^d)$ 与 $\mathscr{M}^p(J,\mathbf{R}^d)$ 显然都是向量空间；$\mathscr{M}^p(J,\mathbf{R}^d)$ 依范数

$$\|x\|_p = \left(\mathrm{E}\int_{t_0}^{T} |x(t)|^p \mathrm{d}t\right)^{1/p} \tag{1.3.1}$$

是一个 Banach 空间. 注意范数(1.3.1)正是通常 Lebesgue 空间 $L^p(J\times\Omega,\mathbf{R}^d)$ 中的 L^p 范数，这一事实对于理解空间 $\mathscr{M}^p(J,\mathbf{R}^d)$ 是重要的. 若 $x,y \in \mathscr{M}^p(J,\mathbf{R}^d)$，$\|x-y\|_p = 0$，则在 $J\times\Omega$ 上 $x(t,\omega)$ 与 $y(t,\omega)$ 几乎处处相等，二者作为空间 $\mathscr{M}^p(J,\mathbf{R}^d)$ 的元素不加区别；若进而设 $x(t)$ 与 $y(t)$ 均连续，则 $x(t)$ 与 $y(t)$ 作为随机过程无差别. 这一事实在解决随机微分方程解的唯一性问题时将要用到.

在 $\mathscr{L}^p(J,\mathbf{R}^d)$ 中并不能定义一个适当的范数. 但 $\mathscr{L}^p(J,\mathbf{R}^d)$ 依准范数

$$\|x\|_{(p)} = \left\{\mathrm{E}\left[1 \wedge \int_{t_0}^{T} |x(t)|^p \mathrm{d}t\right]\right\}^{1/p} \tag{1.3.2}$$

成为 Fréchet 空间. 在空间 $\mathscr{M}^p(J,\mathbf{R}^d)$ 与 $\mathscr{L}^p(J,\mathbf{R}^d)$ 中的序列收敛可分别刻画为

$$\|x_n - x\|_p \to 0, \quad \text{即}\int_{t_0}^{T} |x_n(t) - x(t)|^p \mathrm{d}t \xrightarrow{L^1} 0, \tag{1.3.3}$$

$$\|x_n - x\|_{(p)} \to 0, \quad \text{即}\int_{t_0}^{T} |x_n(t) - x(t)|^p \mathrm{d}t \xrightarrow{P} 0. \tag{1.3.4}$$

注意(1.3.3)⇒(1.3.4). 若 $x_n(t)$，$x(t)$ 均为普通函数，则上述两种收敛都退化为区间 J 上通常的 L^p 收敛. 约定 $\mathscr{L}^p(J) = \mathscr{L}^p(J,\mathbf{R})$，$\mathscr{M}^p(J) = \mathscr{M}^p(J,\mathbf{R})$. 若 $x = (x_1,x_2,\cdots,x_d)^{\mathrm{T}}$ 是一个 d 维随机过程，则显然 $x \in \mathscr{L}^p(J,\mathbf{R}^d) \Leftrightarrow x_i \in \mathscr{L}^p(J)(1 \leqslant i \leqslant d)$，$x \in \mathscr{M}^p(J,\mathbf{R}^d) \Leftrightarrow x_i \in \mathscr{M}^p(J)(1 \leqslant i \leqslant d)$.

给定区间 J 的一个分划

$$t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T, \tag{1.3.5}$$

设 $\alpha_i(1 \leqslant i \leqslant n)$ 为 $\mathscr{F}_{t_{i-1}}$ 可测实随机变量，则称

$$x = \alpha_1 I_{[t_0,t_1]} + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i I_{(t_{i-1},t_i]} \tag{1.3.6}$$

为一个**阶梯过程**或简单过程，其轨道均为阶梯函数. 以 $\mathscr{S}(J)$ 记形如(1.3.6)的阶梯过程之全体，显然 $\mathscr{S}(J) \subset \mathscr{L}^p(J)$；约定 $\mathscr{S}^p(J) = \mathscr{S}(J) \cap \mathscr{M}^p(J)$. 若 x 依式(1.3.6)，则显然 $x \in \mathscr{S}^p(J) \Leftrightarrow \alpha_i \in L^p(1 \leqslant i \leqslant n)$.

作了以上准备之后，现在已可给出随机积分的定义. 如同通常的积分一样，随

机积分的引进循从特殊到一般的几个递进步骤.

定义 1.3.1 (i) 若 $x(t) \in \mathscr{S}(J)$ 表如(1.3.6),则定义

$$\int_{t_0}^{T} x(t)\,\mathrm{d}w(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \Delta w(t_i), \tag{1.3.7}$$

其中 $w(t)$ 是一维 Brown 运动, $\Delta w(t_i) = w(t_i) - w(t_{i-1})$.

(ii) 若 $g(t) \in \mathscr{L}^2(J)$, 则取序列 $\{g_n\} \subset \mathscr{S}(J)$, 使得

$$(\mathrm{P})\ \lim_{n}\int_{t_0}^{T} |\,g_n(t) - g(t)\,|^2 \mathrm{d}t = 0, \quad (\text{对照}(1.3.4))$$

其中(P)lim 表随机收敛;然后定义

$$\int_{t_0}^{T} g(t)\,\mathrm{d}w(t) = (\mathrm{P})\ \lim_{n}\int_{t_0}^{T} g_n(t)\,\mathrm{d}w(t). \tag{1.3.8}$$

(iii) 若 $g(t) = [g_{ij}(t)] \in \mathscr{L}^2(J,\mathbf{R}^{d\times m})$, $w = (w_1, w_2, \cdots, w_m)^{\mathrm{T}}$ 是 m 维 Brown 运动,则定义

$$\int_{t_0}^{T} g(t)\,\mathrm{d}w(t) = \Big[\sum_j \int_{t_0}^{T} g_{1j}(t)\,\mathrm{d}w_j(t), \cdots, \sum_j \int_{t_0}^{T} g_{dj}(t)\,\mathrm{d}w_j(t)\Big]^{\mathrm{T}}. \tag{1.3.9}$$

积分 $\int_{t_0}^{T} g(t)\,\mathrm{d}w(t)$ 亦写作 $\int_{t_0}^{T} g(t)\,\mathrm{d}w$ 或 $\int_{t_0}^{T} g\mathrm{d}w$.

如上定义的积分称为 **Itô 积分**,它是由 Itô 于 1949 年引进的.

定义 1.3.1 远非一个简单的定义,其合理性并不能自明. 定义式(1.3.7)与(1.3.9)当然不成问题,问题集中于定义式(1.3.8). (1.3.8)的合理性依赖于:(i)所需的逼近序列 $\{g_n\}$ 存在,这要求 $\mathscr{S}(J)$ 在 $\mathscr{L}^2(J)$ 中稠密;(ii) 式(1.3.8)右端之极限存在;(iii)(1.3.8)右端之极限与 $\{g_n\}$ 的选择无关. 这些事实的验证颇不平凡,但我们一概略而不论. 实际上,从运用的角度看,真正重要的东西是 Itô 积分的性质;积分的定义固然具有构造性,但并不便于直接运用.

现在我们集中考虑 Itô 积分的性质,这些性质中有一部分是与其他积分共有的"普通性质",一部分则是依赖于 Itô 积分的特殊构造及 Brown 运动特性的"特殊性质". 以下两个"普通性质"(线性性与可加性)是平凡而合乎预期的:

$$\int_{t_0}^{T} \sum_i a_i g_i(t)\,\mathrm{d}\Big(\sum_k b_k w_k(t)\Big) = \sum_{i,k} a_i b_k \int_{t_0}^{T} g_i(t)\,\mathrm{d}w_k(t),$$

$$\int_{t_0}^{T} g(t)\,\mathrm{d}w(t) = \int_{t_0}^{c} g(t)\,\mathrm{d}w(t) + \int_{c}^{T} g(t)\,\mathrm{d}w(t), \quad t_0 < c < T.$$

上面第一式中 a_i, b_k 是常数. 此处及今后我们都假定,使用积分 $\int_{t_0}^{T} g\mathrm{d}w$ 时总认定函数 g 的维数与 Brown 运动 w 的维数已互相匹配,这一点是无需特别说明的. 例如,若 $g \in \mathscr{L}^2(J,\mathbf{R}^d)$, w 是 m 维 Brown 运动,则一个合理的式子中绝不能出现形如 $\int_{t_0}^{T} g\mathrm{d}w$ 的"积分",除非 $m = 1$.

我们关注的重点当然不是"普通性质",而是"特殊性质",但这样的性质通常需在"$\mathscr{M}^2$ 函数类"中考虑.下面的定理汇集了主要的结论.

定理 1.3.2 Itô 积分有以下性质:

(i) 若 $g \in \mathscr{M}^2(J)$,则存在 $\{g_n\} \subset \mathscr{S}^2(J)$,使得 $\|g_n - g\|_2 \to 0$(依(1.3.3)),

$$\int_{t_0}^{T} g(t)\mathrm{d}w(t) = \underset{n}{\mathrm{l.i.m}}\int_{t_0}^{T} g_n(t)\mathrm{d}w(t). \quad (\text{对照}(1.3.8)) \tag{1.3.10}$$

(ii) 设 $g \in \mathscr{M}^2(J,\mathbf{R}^{d\times m})$,则 $\mathrm{E}\int_{t_0}^{T} g(t)\mathrm{d}w(t) = 0$.

(iii) 设 $g \in \mathscr{M}^2(J,\mathbf{R}^{d\times m})$,则

$$\mathrm{E}\left|\int_{t_0}^{T} g(t)\mathrm{d}w(t)\right|^2 = \int_{t_0}^{T}\mathrm{E}\,|g(t)|^2\mathrm{d}t, \tag{1.3.11}$$

其中 $|g(t)|$ 是迹范数.因此,有如下 Hilbert 空间之间的等距映射:

$$\mathscr{M}^2(J,\mathbf{R}^{d\times m}) \to L^2(\Omega,\mathbf{R}^d),\, g \to \int_{t_0}^{T} g\mathrm{d}w.$$

(iv) 设 $x(t) = \int_{t_0}^{t} g(s)\mathrm{d}w(s)\ (t \in J)$. 若 $g \in \mathscr{L}^2(J,\mathbf{R}^{d\times m})$,则 $x(t)$ 随机连续且有连续修正;若 $g \in \mathscr{M}^2(J,\mathbf{R}^{d\times m})$,则 $x(t)$ 是一个平方可积鞅,且当 $d = 1, t_0 = 0$ 时 $x(t)$ 有如下平方变差过程:

$$\langle x(t), x(t)\rangle = \int_0^t |g(s)|^2\mathrm{d}s. \tag{1.3.12}$$

若将 E 换成条件期望 E_{t_0},结论(ii)与(iii)仍保持成立.

定理 1.3.2 对于 Itô 积分的应用具有重要意义.具体地说,其中结论(ii)使得有可能通过取期望消去一式子中所含的形如 $\int_{t_0}^{T} g\mathrm{d}w$ 的积分项;结论(iii)用于 Itô 积分的二阶矩估计;结论(iv)使得我们可将关于鞅的种种结论用于**不定积分** $\int_{t_0}^{t} g(s)\mathrm{d}w(s)$. 不失一般性,今后将总认定这样的不定积分是一个连续鞅.

注意式(1.3.11),(1.3.12)依赖于 w 是**标准** Brown 运动.若 $\mathrm{Var}(w(t)) = t^{-1}\Sigma$,以 A 记 Σ 的正平方根,则 $u = A^{-1}w$ 是一个标准 Brown 运动,于是在(1.3.11)与(1.3.12)成立的条件下分别有

$$\mathrm{E}\left|\int_{t_0}^{T} g\mathrm{d}w\right|^2 = \mathrm{E}\left|\int_{t_0}^{T} gA\mathrm{d}u\right|^2 = \int_{t_0}^{T}\mathrm{E}\,|gA|^2\mathrm{d}t$$

$$= \int_{t_0}^{T}\mathrm{E}[\mathrm{tr}(gA^2g^{\mathrm{T}})]\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{T}\mathrm{E}[\mathrm{tr}(g\Sigma g^{\mathrm{T}})]\mathrm{d}t, \tag{1.3.11$'$}$$

$$\langle x(t), x(t)\rangle = \int_0^t \mathrm{tr}(g(s)\Sigma g^{\mathrm{T}}(s))\mathrm{d}s. \tag{1.3.12$'$}$$

可见,式(1.3.11)′,(1.3.12)′与式(1.3.11),(1.3.12)的区别只是 $|g|^2$ 换成了 $\mathrm{tr}(g\Sigma g^{\mathrm{T}})$. 这一转换是高度规范的,今后将不再解释.鉴于以上事实,凡涉及 Itô 型

随机积分时,不失一般性,不妨仅用标准 Brown 运动.

尽管 Itô 积分有如定理 1.3.2 所述的良好性质,但不应忘记,定理 1.3.2 的大部分结论依赖于 $g \in \mathscr{M}^2(J,\mathbf{R}^{d\times m})$!而判定这一点未必总是容易的. 今后当需要作这种判定时,以下简单结果可能是有用的.

引理 1.3.3 设 $g(t,x): J\times \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^{d\times m}$ 是一个 Borel 可测函数.

(i) 若 $x(t) \in \mathscr{M}^p(J,\mathbf{R}^d)(p\geqslant 1)$,$g$ 满足如下线性增长条件:

$$|g(t,x)|^2 \leqslant \mathrm{const}(1+|x|^2), \quad (t,x)\in J\times \mathbf{R}^d.$$

则 $g(t,x(t)) \in \mathscr{M}^p(J,\mathbf{R}^{d\times m})$.

(ii) 若 $x(t)(t\in J)$ 是连续适应过程,g 局部有界,即 $\forall n\geqslant 1$,有

$$\sup_{t\in J,|x|\leqslant n} |g(t,x)| < \infty,$$

且 $g(t,x(t)) \in \mathscr{L}^2(J,\mathbf{R}^{d\times m})$,则

$$M(t) = \int_{t_0}^t g(s,x(s))\mathrm{d}w(s), \quad t\in J$$

是一个连续局部鞅.

证 (i)是明显的,今证(ii). 令

$$\tau_n = \inf\{t\geqslant t_0: |x(t)|\geqslant n\}, \quad n\geqslant 1.$$

则 τ_n 是一个停时;由 $x(t)$ 连续推出 $\tau_n\to\infty$(注意 $\inf\varnothing = \infty$!). $\forall n\geqslant 1$,由 g 的局部有界性推出 $I_{\{t\leqslant\tau_n\}}g(t,x(t)) \in \mathscr{M}^2(J,\mathbf{R}^{d\times m})$,因此

$$M(t\wedge\tau_n) = \int_{t_0}^t I_{\{s\leqslant\tau_n\}}g(s,x(s))\mathrm{d}w(s), \quad t\in J$$

是鞅,故 $M(t)$ 是连续局部鞅(参照定理 1.3.2(iv)). □

下面的定理表明,由 Itô 不定积分表示的鞅具有普遍意义.

定理 1.3.4(鞅表示定理) 设 $\mathscr{F}_t = \mathscr{F}_t$(依(1.2.1)),$M(t)(t\in[0,T])$ 是一个平方可积、右连左极的 $\mathbf{R}^d$ 值 $\mathscr{F}_t$ 鞅,则存在 $g\in\mathscr{M}^2([0,T],\mathbf{R}^{d\times m})$,使得

$$M(t) = M(0) + \int_0^t g(s)\mathrm{d}w(s), \quad t\in[0,T]. \tag{1.3.13}$$

上述的 $g(\cdot)$ 依以下意义是唯一的:若 $\bar{g}\in\mathscr{M}^2([0,T],\mathbf{R}^{d\times m})$ 亦满足式(1.3.13),则 $\bar{g}$ 与 g 在空间 $\mathscr{M}^2([0,T],\mathbf{R}^{d\times m})$ 中是同一元,即

$$\mathrm{E}\int_0^T |g(t)-\bar{g}(t)|^2\mathrm{d}t = 0.$$

依定理 1.3.4,在一定意义上,除了 Itô 不定积分之外,不再有其他的鞅. 仅此一点,就足以说明 Itô 积分的意义.

关于 Itô 积分的收敛性,我们指出以下简单事实:要使极限式(1.3.8)与(1.3.10)成立,只要分别设

$$g,g_n\in\mathscr{L}^2(J,\mathbf{R}^{d\times m}), \quad \int_{t_0}^T |g_n(t)-g(t)|^2\mathrm{d}t \xrightarrow{P} 0$$

与

$$g,g_n \in \mathscr{M}^2(J,\mathbf{R}^{d\times m}), \quad \mathrm{E}\int_{t_0}^{T} | g_n(t) - g(t) |^2 \mathrm{d}t \to 0$$

就行了,并不必限定 g_n 是阶梯过程.

若 σ,τ 是两个停时, $t_0 \leqslant \sigma \leqslant \tau \leqslant T$, a.s. ,则定义

$$\int_{\sigma}^{\tau} g(t)\mathrm{d}w(t) = \int_{t_0}^{T} I_{[\sigma,\tau]}(t)g(t)\mathrm{d}w(t), \tag{1.3.14}$$

只要右端之积分有意义.经这一扩充之后,前面对 Itô 积分建立的所有结论经适当表述之后仍保持成立,这些都不必细述.

1.3.2 随机微分

与传统的微积分学不同,在 Itô 微积分学中,严格说来并无独立于 Itô 积分之外的微分概念. Itô 所引入的微分,实质上不过是以逆运算形式表达了积分,因而可看作 Itô 积分的某种衍生物.然而,几乎不可思议的是,在著名的 Itô 公式建立之后, Itô 微分就成了一种极便于运用的形式系统,以至获得了某种独立的外观.

设 $f \in \mathscr{L}^1(J,\mathbf{R}^d)$, $g \in \mathscr{L}^2(J,\mathbf{R}^{d\times m})$ (注意这是一般设定!),则

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(s)\mathrm{d}s + \int_{t_0}^{t} g(s)\mathrm{d}w(s), \quad t \in J \tag{1.3.15}$$

有定义 ($x(t_0)$ 可取为任意 $\mathscr{F}_{t_0}$ 可测 d 维随机变量),且是一个 $\mathscr{F}_t$ 适应随机过程,称其为 **Itô 过程**.为了简便起见,有时也将(1.3.15)右端的两个积分合写成

$$\int_{t_0}^{t} [f(s)\mathrm{d}s + g(s)\mathrm{d}w(s)].$$

但应注意, $\int_{t_0}^{t} f(s)\mathrm{d}s$ 与 $\int_{t_0}^{t} g(s)\mathrm{d}w(s)$ 是性质上很不相同的两类积分:前者是通常的 Lebesgue 积分而后者是 Itô 积分.一个看似无意义但影响深远的步骤是,对于表为式(1.3.15)的 $x(t)$ 作**形式约定**:

$$\mathrm{d}x(t) = f(t)\mathrm{d}t + g(t)\mathrm{d}w(t), \tag{1.3.16}$$

或简写作 $\mathrm{d}x = f\mathrm{d}t + g\mathrm{d}w$, 并称 $\mathrm{d}x$ 为 x 的**随机微分**或 **Itô 微分**.注意到,式(1.3.16)只不过是一种人为的记号设定,在作这一设定时并未赋予它任何实质上新的含义.然而,借助于这一记号,现在可将式(1.3.15)改写成

$$\int_{t_0}^{t} \mathrm{d}x(s) = x(s)\Big|_{t_0}^{t}. \tag{1.3.17}$$

在形式上,我们得到了一个"Newton-Leibniz 公式".尽管式(1.3.17)只不过是式(1.3.15)的一种改写,其中并未注入任何真正的新意,然而我们将看到,它将像一个真正的 Newton-Leibniz 公式那样发挥重大作用.不过,为了使(1.3.17)这样的公式能有效发挥作用,必须有一套计算随机微分的方便规则,而 Itô(1951)通过建立他的著名公式做到了这一点,这一成就正是 Itô 微积分学诞生的标志.

Itô 公式　设 $V(t,x) \in C^{1,2}(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d)$（这意味着 $V(t,x): \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ 对 t 与 x 分别为 C^1 函数与 C^2 函数），$x(t)$ 依(1.3.15)，则 $V(t,x(t))$ 亦为 Itô 过程，且

$$dV(t,x(t)) = LV(t,x(t))dt + V_x(t,x(t))g(t,x(t))dw(t), \quad (1.3.18)$$

其中

$$LV(t,x(t)) = V_t(t,x(t)) + V_x(t,x(t))f(t) + (1/2)\mathrm{tr}[g^T(t)V_{xx}(t,x(t))g(t)]. \quad (1.3.19)$$

形式上颇为奇特的 Itô 公式有一个有趣的解释. 约定如下**乘法表**：

$$(dt)^2 = 0, \quad dtdw = 0, \quad (dw)(dw)^T = Idt, \quad (1.3.20)$$

即 $(dt)^2 = dtdw_k = 0, dw_k dw_l = \delta_{kl}dt (1 \leqslant k, l \leqslant m)$. 则可验证：

$$LVdt + V_x g dw = V_t dt + V_x dx + (1/2)(dx)^T V_{xx} dx.$$

这就得到如下形式规则：写出 $V(t,x)$ 的 Taylor 展式的一阶与二阶项，然后依乘法表(1.3.20)化简，就得到随机微分 $dV(t,x)$，即

$$dV(t,x) = V_t dt + V_x dx + (1/2)(dx)^T V_{xx} dx. \quad (1.3.21)$$

当然应记住，式(1.3.21)中的 dx 依(1.3.16). 今后使用 Itô 公式时，不妨就用容易记住的公式(1.3.21). 将公式(1.3.18)与 Newton-Leibniz 公式(1.3.17)结合起来，就得到

$$V(s,x(s))\Big|_{t_0}^{t} = \int_{t_0}^{t} LV(s,x(s))ds + \int_{t_0}^{t} V_x(s,x(s))g(s)dw(s). \quad (1.3.22)$$

若能断定 $V_x g \in \mathscr{M}^2(J, \mathbf{R}^{1\times m})$（注意这一点是重要的！），则由式(1.3.22)得

$$EV(s,x(s))\Big|_{t_0}^{t} = E\int_{t_0}^{t} LV(s,x(s))ds. \quad (1.3.23)$$

式(1.3.23)是本书中用得最多的公式之一，其作用是巨大的. 以上公式表明，从 dV 中分离出 $LVdt$（依式(1.3.18)）是很有意义的. 通常称 $LVdt$ 为 dV 的“确定性部分”，而称 $V_x g dw$ 为“扰动部分”. 这一说法并不严格，但常带来有益的启示.

在经典微分学中，复合函数微分规则实际上涵盖了所有其他微分规则. 在随机微分学中，Itô 公式正好起类似的作用，现在就来说明这一点. 下面将 $x(t), y(t), x_i(t)$ 简写作 x, y, x_i，且总设它们是 Itô 过程，x 依式(1.3.15).

(i) 设 $V(\cdot) \in C^2(\mathbf{R}), d = 1$，则由公式(1.3.21)有

$$dV(x) = V'(x)dx + \frac{1}{2}V''(x)(dx)^2. \quad (1.3.24)$$

(ii) **对数微分法**. 取 $V(x) = e^x$ 或 $\ln x$，则由式(1.3.24)得

$$
\begin{cases}
\mathrm{d}e^x = e^x\left[\mathrm{d}x + \frac{1}{2}(\mathrm{d}x)^2\right], & (1.3.25\mathrm{a})\\
\mathrm{d}\ln x = \frac{\mathrm{d}x}{x} - \frac{(\mathrm{d}x)^2}{2x^2}. & (1.3.25\mathrm{b})
\end{cases}
$$

令 $V = V(t,x(t))$，以 $\ln V$ 取代(1.3.25a)中的 x 得

$$V^{-1}\mathrm{d}V = V^{-1}\mathrm{d}\,e^{\ln V} = \mathrm{d}\ln V + (1/2)(\mathrm{d}\ln V)^2. \tag{1.3.26}$$

这就是**对数微分公式**，它特别适用于 V 表为连乘积的情况.

(iii) **积规则**. 设 $V = C\prod_1^n x_i^{\alpha_i}$，$C,\alpha_i$ 是常数，$C>0$，则用公式(1.3.26)可导出

$$\frac{\mathrm{d}V}{V} = \sum_i \frac{\alpha_i \mathrm{d}x_i}{x_i} + \frac{1}{2}\sum_i \alpha_i(\alpha_i - 1)\frac{(\mathrm{d}x_i)^2}{x_i^2} + \sum_{i<j}\alpha_i\alpha_j\frac{\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j}{x_ix_j}. \tag{1.3.27}$$

特别，取 $V = x_1x_2\cdots x_n$，由式(1.3.27)得

$$\frac{d(x_1x_2\cdots x_n)}{x_1x_2\cdots x_n} = \sum_i \frac{\mathrm{d}x_i}{x_i} + \sum_{i<j}\frac{\mathrm{d}x_i\mathrm{d}x_j}{x_ix_j}. \tag{1.3.28}$$

进而对于 $V = xy$，由式(1.3.28)得

$$\mathrm{d}(xy) = y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y + \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{1.3.29}$$

然后结合式(1.3.29)与(1.3.17)得到**分部积分公式**：

$$\int_{t_0}^T y(t)\mathrm{d}x(t) = x(t)y(t)\Big|_{t_0}^T - \int_{t_0}^T [x(t)\mathrm{d}y(t) + \mathrm{d}x(t)\mathrm{d}y(t)]. \tag{1.3.30}$$

当 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$ 时，公式(1.3.29)与(1.3.30)分别重合于通常的积微分公式与分部积分公式.

(iv) **商规则**. 取 $V = y/x$，由式(1.3.27)得

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\left(\frac{y}{x}\right) &= \left(\frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2}\right)\left(1 - \frac{\mathrm{d}x}{x}\right)\\
&= \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2} + \frac{y(\mathrm{d}x)^2 - x\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^3}.
\end{aligned} \tag{1.3.31}
$$

当 $(\mathrm{d}x)^2 = 0 = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 时，式(1.3.31)重合于通常的商微分规则.

(v) 设 $V \in C^2(\mathbf{R}^d)$，则依式(1.3.18)与(1.3.19)有

$$
\begin{cases}
\mathrm{d}V(t,x) = LV(t,x)\mathrm{d}t + V_x g\mathrm{d}w,\\
LV(t,x) = V_x f + (1/2)\mathrm{tr}(g^{\mathrm{T}}V_{xx}g).
\end{cases} \tag{1.3.32}
$$

下面给出应用 Itô 公式的若干例子，仍设 $x = x(t)$ 依式(1.3.15).

例 1.3.5 (i) 设 $V = (x^{\mathrm{T}}Qx)^{p/2}$，$Q$ 是一个正定矩阵. 算出

$$V_x = p(x^{\mathrm{T}}Qx)^{p/2-1}x^{\mathrm{T}}Q,$$

$$V_{xx} = p(x^{\mathrm{T}}Qx)^{p/2-1}Q + p(p-2)(x^{\mathrm{T}}Qx)^{p/2-2}Qxx^{\mathrm{T}}Q,$$

然后套用公式(1.3.32)得

$$\begin{cases} dV(t,x) = LV(t,x)dt + p(x^TQx)^{p/2-1}x^TQgdw, \\ LV(t,x) = (p/2)(x^TQx)^{p/2-1}[2x^TQf + tr(g^TQg) \\ \qquad + (p-2)(x^TQx)^{-1}|x^TQg|^2]. \end{cases} \tag{1.3.33}$$

常用的两种特殊情况是(分别取 $p = 2$ 与 $Q = I$)

$$\begin{cases} d(x^TQx) = L(x^TQx)dt + 2x^TQgdw, \\ L(x^TQx) = 2x^TQf + tr(g^TQg), \end{cases} \tag{1.3.34}$$

$$\begin{cases} d|x|^p = L|x|^pdt + p|x|^{p-2}x^Tgdw, \\ L|x|^p = (p/2)|x|^{p-2}[2x^Tf + |g|^2 + (p-2)|x|^{-2}|x^Tg|^2]. \end{cases} \tag{1.3.35}$$

(ii) 设 $V = (1+|x|^2)^{p/2}$, 则类似于式(1.3.35)有

$$\begin{cases} dV(t,x) = LV(t,x)dt + p(1+|x|^2)^{p/2-1}x^Tgdw, \\ LV(t,x) = \dfrac{p}{2}(1+|x|^2)^{p/2-1}\left[2x^Tf + |g|^2 + \dfrac{(p-2)|x^Tg|^2}{1+|x|^2}\right]. \end{cases} \tag{1.3.36}$$

(iii) 设 $V(t,x) \in C^{1,2}(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d)$, 则以 $\ln V$ 代 V, 用公式(1.3.18)得

$$d\ln V = \frac{LV}{V}dt + Z\,dw - \frac{1}{2}|Z|^2dt, \quad Z = \frac{V_xg}{V}. \tag{1.3.37}$$

(iv) 设 $g \in C(J, \mathbf{R}^{1\times m})$, $t_0 \leqslant a \leqslant s < t \leqslant T$, 今建立

$$E_a\left[\exp\int_s^t g(r)dw(r)\right] = \exp\left[\frac{1}{2}\int_s^t |g(r)|^2dr\right], \tag{1.3.38}$$

$$Ee^{\sigma w(t)} = e^{\sigma^2t/2}, \quad \sigma \in \mathbf{R}. \tag{1.3.39}$$

只需验证式(1.3.38). 固定 s, 以 $\varphi(t)$ 记式(1.3.38)之左端,则

$$\begin{aligned} \varphi(r)\Big|_a^t &= E_a\int_a^t d\left[\exp\int_s^r g(\lambda)dw(\lambda)\right] &&\text{(用(1.3.17))} \\ &= E_a\int_a^t e^{(\cdots)}\left[g(\lambda)dw(\lambda) + \frac{|g(\lambda)|^2}{2}d\lambda\right] &&\text{(用(1.3.25a))} \\ &= \frac{1}{2}\int_a^t |g(r)|^2\varphi(r)dr, &&\text{(用定理 1.3.2(ii))} \end{aligned}$$

故得

$$\dot\varphi(t) = \frac{1}{2}|g(t)|^2\varphi(t).$$

注意到 $\varphi(s) = 1$, 从上面的线性微分方程解出 $\varphi(t)$, 即得式(1.3.38).

1.3.3　某些不等式

在随机微分方程理论中,相当一部分内容基于运用适当不等式对所涉及的随机函数进行各种估计(包括矩估计与轨道估计),因此运用不等式的技巧居于重要地位. 常用的不等式有两个主要来源:其一是一些通用不等式,如 Hölder 不等式、

Chebyshev 不等式以及各种初等不等式;其二则是涉及 Itô 积分的一些不等式,多半是鞅不等式的推论.本段重点处理后一类不等式,但为引用方便,同时也汇集了一些并不涉及 Itô 积分的不等式.所有这些不等式在本书中都是常用的.

鉴于此处及今后均大量涉及迹范数,下面概括一下关于迹范数的一些基本结论.首先回忆一下**迹范数**的定义:对任给 $A=[a_{ij}]\in\mathbf{R}^{d\times m}$(不必 $d=m$!),有

$$|A|^2=\mathrm{tr}(A^{\mathrm{T}}A)=\mathrm{tr}(AA^{\mathrm{T}})=\sum_{i,j}a_{ij}^2. \qquad (1.3.40)$$

注意当 A 是行或列向量时,$|A|$ 重合于 Euclid 范数.与 $|A|$ 相对照,A 的**算子范数** $\|A\|$ 决定于下式:

$$\|A\|^2=\sup_{|x|=1}|Ax|^2=\lambda_{\max}(A^{\mathrm{T}}A). \qquad (1.3.41)$$

命题 1.3.6 设 A,B,C 为适当阶数的实矩阵,则以下结论成立:

(i) $|AB|\leqslant|A||B|$;$|\mathrm{tr}(AB)|\leqslant|A||B|$.

(ii) $\|A\|\leqslant|A|$;若 A 为方阵,则 A 的谱半径 $\leqslant\|A\|$;若 A 是半正定矩阵,则 $\|A\|=\lambda_{\max}(A)$.

(iii) 若 B 是正交矩阵,则 $|AB|=|A|$,$|BA|=|A|$.

(iv) 若 A,B 是对称矩阵且 A 半正定,则

$$\lambda_{\min}(B)\mathrm{tr}(A)\leqslant\mathrm{tr}(AB)\leqslant\lambda_{\max}(B)\mathrm{tr}(A).$$

(v) 若 B 是对称矩阵,则

$$\lambda_{\min}(B)|A|^2\leqslant\mathrm{tr}(A^{\mathrm{T}}BA)\leqslant\lambda_{\max}(B)|A|^2.$$

(vi) 若 $A\in\mathbf{R}^{d\times d}$ 是半正定矩阵,$x\in\mathbf{R}^d$,则 $x^{\mathrm{T}}Ax\leqslant|x|^2\mathrm{tr}(A)$.

证 (i) 设 $A=[a_{ij}]$,B 仿此,则由 Hölder 不等式有

$$|AB|^2=\sum_{i,j}\Big(\sum_k a_{ik}b_{kj}\Big)^2\leqslant\sum_{i,j,k,l}a_{ik}^2b_{lj}^2=|A|^2|B|^2,$$

$$|\mathrm{tr}(AB)|^2=\Big(\sum_{i,j}a_{ij}b_{ji}\Big)^2\leqslant\sum_{i,j}a_{ij}^2\sum_{i,j}b_{ji}^2=|A|^2|B|^2.$$

(ii) $A^{\mathrm{T}}A$ 必为半正定,故 $\lambda_{\max}(A^{\mathrm{T}}A)\leqslant\mathrm{tr}(A^{\mathrm{T}}A)$.

(iii) 易证.

(iv) 取正交矩阵 Q,使 $Q^{\mathrm{T}}BQ=D=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$,则

$$\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(Q^{\mathrm{T}}AQD)\leqslant\max_i\lambda_i\mathrm{tr}(Q^{\mathrm{T}}AQ)=\lambda_{\max}(B)\mathrm{tr}(A).$$

同理有 $\mathrm{tr}(AB)\geqslant\lambda_{\min}(B)\mathrm{tr}(A)$.

(v) 由(iv)推出,注意 AA^{T} 是半正定矩阵.(vi) 由(v)推出. □

下面进入本小节的重点:积分不等式.这种不等式之中一类直接源于鞅不等式,另一类则与 Itô 公式有关.下面分别予以考虑.

定理 1.3.7 设 $g(t)\in\mathscr{M}^2(J,\mathbf{R}^{d\times m})$,$\varepsilon,\delta>0$,则

$$P\Big(\sup_J\Big|\int_{t_0}^t g(s)\mathrm{d}w(s)\Big|\geqslant\varepsilon\Big)\leqslant\varepsilon^{-2}\int_{t_0}^T\mathrm{E}|g(t)|^2\mathrm{d}t, \qquad (1.3.42)$$

$$\mathrm{E}\left[\sup_J\left|\int_{t_0}^t g(s)\,\mathrm{d}w(s)\right|^2\right]\leqslant 4\int_{t_0}^T \mathrm{E}\,|\,g(t)\,|^2\mathrm{d}t, \tag{1.3.43}$$

$$P\left(\sup_J\left|\int_{t_0}^t g(s)\,\mathrm{d}w(s)\right|\geqslant\varepsilon\right)\leqslant P\left(\int_{t_0}^T|\,g(t)\,|^2\mathrm{d}t\geqslant\delta\right)+\frac{\delta}{\varepsilon^2}. \tag{1.3.44}$$

证　因 $x(t)\triangleq\int_{t_0}^t g(s)\,\mathrm{d}w(s)$ 是连续鞅(定理1.3.2(iv)),故 $|\,x(t)\,|$ 是非负连续下鞅(命题1.2.5(iii)),于是分别由鞅不等式(1.2.19)与(1.2.24)推出式(1.3.42)与(1.3.43).

不等式(1.3.44)较特殊. 令 $\tau=\inf\left\{t\geqslant t_0:\int_{t_0}^t|\,g(s)\,|^2\mathrm{d}s\geqslant\delta\right\}$, 则必有

$$\int_{t_0}^{\tau\wedge T}|\,g(s)\,|^2\mathrm{d}s\leqslant\delta.$$

于是

$$\begin{aligned}(1.3.44)\text{之左端}&\leqslant P\left(\sup_{t\in J}\left|\int_{t_0}^t g(s)\,\mathrm{d}w(s)-\int_{t_0}^{\tau\wedge t}g(s)\,\mathrm{d}w(s)\right|>0\right)\\&\quad+P\left(\sup_{t\in J}\left|\int_{t_0}^{\tau\wedge t}g(s)\,\mathrm{d}w(s)\right|\geqslant\varepsilon\right)\\&\leqslant P\left(\int_{t_0}^T|\,g(t)\,|^2\geqslant\delta\right)+\frac{1}{\varepsilon^2}\mathrm{E}\int_{t_0}^{\tau\wedge T}|\,g(t)\,|^2\mathrm{d}t\quad(\text{用}(1.3.42))\\&\leqslant P\left(\int_{t_0}^T|\,g(t)\,|^2\geqslant\delta\right)+\frac{\delta}{\varepsilon^2}.\end{aligned}$$

□

为使不等式(1.3.44)成立,只需 $g(t)\in\mathscr{L}^2(J,\mathbf{R}^{d\times m})$ 就行了.

下面一组不等式的推导要用到 Itô 公式.

定理1.3.8　设 $g\in\mathscr{M}^p(J,\mathbf{R}^{d\times m}),p\geqslant 2$, 则成立如下**矩不等式**:

$$\mathrm{E}\left|\int_{t_0}^T g(t)\mathrm{d}w(t)\right|^p\leqslant\left[\frac{p(p-1)}{2}\right]^{\frac{p}{2}}(T-t_0)^{\frac{p}{2}-1}\int_{t_0}^T\mathrm{E}\,|\,g(t)\,|^p\mathrm{d}t, \tag{1.3.45}$$

$$\mathrm{E}\left[\sup_{t\in J}\left|\int_{t_0}^t g(s)\mathrm{d}w(s)\right|^p\right]\leqslant\left[\frac{p^3}{2(p-1)}\right]^{\frac{p}{2}}(T-t_0)^{\frac{p}{2}-1}\int_{t_0}^T\mathrm{E}\,|\,g(t)\,|^p\mathrm{d}t. \tag{1.3.46}$$

若 $g\in\mathscr{L}^2(J,\mathbf{R}^{1\times m}),\varepsilon,\delta>0$, 则成立如下**指数鞅不等式**:

$$P\left(\sup_{t\in J}\left[\int_{t_0}^t g(s)\,\mathrm{d}w(s)-\frac{\delta}{2}\int_{t_0}^t|\,g(s)\,|^2\mathrm{d}s\right]\geqslant\varepsilon\right)\leqslant\mathrm{e}^{-\delta\varepsilon}. \tag{1.3.47}$$

证　令 $x(t)=\int_{t_0}^t g(s)\,\mathrm{d}w(s)$, 以 I 记式(1.3.45)之左端,则

$$I=\mathrm{E}\,|\,x(T)\,|^p=\mathrm{E}\int_{t_0}^T L\,|\,x(t)\,|^p\mathrm{d}t\qquad(\text{用}(1.3.23))$$

$$=\mathrm{E}\int_{t_0}^T\frac{p}{2}[\,|\,x(t)\,|^{p-2}\,|\,g(t)\,|^2$$

$$+(p-2)|x(t)|^{p-4}|x^{\mathrm{T}}(t)g(t)|^2]\mathrm{d}t \qquad (用(1.3.35))$$

$$\leqslant \frac{p(p-1)}{2}\mathrm{E}\int_{t_0}^{T}|x(t)|^{p-2}|g(t)|^2\mathrm{d}t$$

$$\leqslant \frac{p(p-1)}{2}\left[\mathrm{E}\int_{t_0}^{T}|x(t)|^p\mathrm{d}t\right]^{\frac{p-2}{p}}\left[\mathrm{E}\int_{t_0}^{T}|g(t)|^p\mathrm{d}t\right]^{\frac{2}{p}} \quad (用\text{ Hölder }不等式)$$

$$\leqslant \frac{p(p-1)}{2}[(T-t_0)\mathrm{E}|x(T)|^p]^{\frac{p-2}{p}}\left[\int_{t_0}^{T}\mathrm{E}|g(t)|^p\mathrm{d}t\right]^{\frac{2}{p}}, \qquad (*)$$

最后一步用到 $\mathrm{E}|x(t)|^p$ 对 t 单调增，这可由式($*$)看出. 由以上不等式推出(1.3.45)；结合(1.3.45)与(1.2.24)推出(1.3.46).

对于不等式(1.3.47)的证明，不妨设 $x(t)$ 与 $\int_{t_0}^{t}|g(s)|^2\mathrm{d}s$ 有界(否则用一停时论证). 关键是注意到，若令

$$y(t)=\delta\int_{t_0}^{t}g(s)\mathrm{d}w(s)-\frac{\delta^2}{2}\int_{t_0}^{t}|g(s)|^2\mathrm{d}s,$$

则用式(1.3.25a)易验证 $\mathrm{e}^{y(t)}$ 是鞅，于是

$$(1.3.47)\text{ 左端 }=P\left(\sup_{t\in J}\mathrm{e}^{y(t)}\geqslant \mathrm{e}^{\delta\varepsilon}\right)\leqslant \mathrm{e}^{-\delta\varepsilon}\mathrm{E}\mathrm{e}^{y(T)}=\mathrm{e}^{-\delta\varepsilon}. \quad (用(1.2.19))\ \square$$

有时用到如下更精细的 Burkholder-Davis-Gundy 不等式(**BDG 不等式**).

定理 1.3.9 设 $g\in\mathscr{L}^2(J,\mathbf{R}^{d\times m})$，$p>0$，则

$$c_p\mathrm{E}\left[\int_{t_0}^{T}|g(t)|^2\mathrm{d}t\right]^{\frac{p}{2}}\leqslant \mathrm{E}\left[\sup_{t\in J}\left|\int_{t_0}^{t}g(s)\mathrm{d}w(s)\right|^p\right]\leqslant C_p\mathrm{E}\left[\int_{t_0}^{T}|g(t)|^2\mathrm{d}t\right]^{\frac{p}{2}}, \quad (1.3.48)$$

其中

$$c_p=\begin{cases}\left(\frac{p}{2}\right)^p, & 0<p<2,\\ 1, & p=2,\\ (2p)^{-p/2}, & p>2,\end{cases}\qquad C_p=\begin{cases}(32/p)^{p/2}, & 0<p<2,\\ 4, & p=2,\\ \left[\frac{p^{p+1}}{2(p-1)^{p-1}}\right]^{\frac{p}{2}}, & p>2.\end{cases} \qquad (1.3.49)$$

证 $p=2$ 时不等式(1.3.48)蕴涵于(1.3.43). 下面考虑 $p>2$ 的情况 ($0<p<2$ 的情况参看文献(Mao, 1997)). 令

$$x(t)=\int_{t_0}^{t}g(s)\mathrm{d}w(s),\ y(t)=\sup_{t_0\leqslant s\leqslant t}|x(s)|,\ G(t)=\int_{t_0}^{t}|g(s)|^2\mathrm{d}s,$$

不妨设 $x(t)$ 与 $G(t)$ 均有界(否则用一停时论证). 不等式(1.3.48)可写成

$$c_p\mathrm{E}G^{p/2}(T)\leqslant \mathrm{E}y^p(T)\leqslant C_p\mathrm{E}G^{p/2}(T).$$

首先证第一个不等号成立.

$$\mathrm{E}G^{\frac{p}{2}}(T)=\mathrm{E}\int_{t_0}^{T}\frac{p}{2}[G(t)]^{\frac{p}{2}-1}|g(t)|^2\mathrm{d}t$$

$$= \mathrm{E}\int_{t_0}^{T} |gh|^2 \mathrm{d}t \qquad \left(h = \sqrt{\frac{p}{2}}G^{\frac{p}{4}-\frac{1}{2}}\right)$$

$$= \mathrm{E}\left|\int_{t_0}^{T} gh\mathrm{d}w\right|^2 = \mathrm{E}\left|\int_{t_0}^{T} h\mathrm{d}x\right|^2 \qquad (用(1.3.11))$$

$$= \mathrm{E}\left|h(T)x(T) - \int_{t_0}^{T} x\mathrm{d}h\right|^2 \qquad (分部积分)$$

$$= \mathrm{E}\left|\int_{t_0}^{T} [x(T) - x(t)]\mathrm{d}h(t)\right|^2$$

$$\leqslant 4\mathrm{E}[y^2(T)h^2(T)] \qquad (用 |x(t)| \leqslant y(T))$$

$$= 2p\mathrm{E}[y^2(T)G(T)^{p/2-1}]$$

$$\leqslant 2p[\mathrm{E}y^p(T)]^{2/p}[\mathrm{E}G(T)^{p/2}]^{1-2/p}, \qquad (用 Hölder 不等式)$$

由此推出 $c_p\mathrm{E}G(T)^{p/2} \leqslant \mathrm{E}y^p(T)$. 其次,

$$\mathrm{E}y^p(T) \leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathrm{E}|x(T)|^p \qquad (用(1.2.24))$$

$$\leqslant \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \frac{p(p-1)}{2}\mathrm{E}\int_{t_0}^{T} |x(t)|^{p-2}|g(t)|^2\mathrm{d}t$$

$$\leqslant \frac{p^{p+1}}{2(p-1)^{p-1}}\mathrm{E}[y^{p-2}(T)G(T)]$$

$$\leqslant \frac{p^{p+1}}{2(p-1)^{p-1}}[\mathrm{E}y^p(T)]^{\frac{p-2}{p}}[\mathrm{E}G(T)^{\frac{p}{2}}]^{\frac{2}{p}}, \qquad (用 Hölder 不等式)$$

由此推出 $\mathrm{E}y^p(T) \leqslant C_p\mathrm{E}G(T)^{p/2}$. □

注意与式(1.3.46)比较,(1.3.48)的优点是系数 c_p, C_p 与 T 无关.

下面汇集本书中将用到的某些初等不等式. 首先给出一些常用记号. 以 $\|x\|_p$ 记 $x \in \mathbf{R}^d$ 的 p 范数,即

$$\|x\|_p = \left(\sum_i |x_i|^p\right)^{1/p}, \quad 0 < p < \infty, \qquad \|x\|_\infty = \max_i |x_i|.$$

$|x| = \|x\|_2$ 就是 x 的 Euclid 范数. 任给 $p > 0$, 约定

$$V_p(x) = \sum_i x_i^p = \|x\|_p^p, \quad x \in \mathbf{R}_+^d. \tag{1.3.50}$$

记 $V_p^r(x) = [V_p(x)]^r$. 用初等方法不难证明

$$\left(\sum_i x_i\right)^p \leqslant d^{(p-1)\vee 0}V_p(x), \quad x \in \mathbf{R}_+^d, \tag{1.3.51}$$

其中 $p > 0$. 利用式(1.3.51)进而可推出

$$d^{(1-p/2)\wedge 0}|x|^p \leqslant V_p(x) \leqslant d^{(1-p/2)\vee 0}|x|^p, \quad x \in \mathbf{R}_+^d, \tag{1.3.52}$$

$$d^{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)\wedge 0}|x| \leqslant \|x\|_p \leqslant d^{\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\right)\vee 0}|x|, \quad x \in \mathbf{R}^d. \tag{1.3.53}$$

分别取 $p = 1$ 与令 $p \to \infty$ 由式(1.3.53)推出

$$|x|/\sqrt{d} \leqslant \|x\|_{\infty} \leqslant |x| \leqslant \|x\|_1 \leqslant \sqrt{d}\,|x|, \quad x \in \mathbf{R}^d. \tag{1.3.54}$$

若 $\alpha,\beta \geqslant 0, \alpha+\beta > 0$, 则用微分法易证

$$x^{\alpha}y^{\beta} \leqslant \frac{\alpha x^{\alpha+\beta} + \beta y^{\alpha+\beta}}{\alpha+\beta}, \quad x,y \geqslant 0. \tag{1.3.55}$$

设 $\varepsilon > 0$, 分别以 εx 与 $\varepsilon^{-\alpha/\beta}y$(设 $\beta > 0$) 取代 x 与 y 从(1.3.55)得出

$$x^{\alpha}y^{\beta} \leqslant \frac{\alpha(\varepsilon x)^{\alpha+\beta} + \beta(\varepsilon^{-\alpha/\beta}y)^{\alpha+\beta}}{\alpha+\beta}, \quad x,y \geqslant 0. \tag{1.3.55$'$}$$

特别,取 $\alpha = \beta = 1$,并以 ε 取代 ε^2 得到简单而常用的不等式:

$$2xy \leqslant \varepsilon x^2 + \varepsilon^{-1}y^2, \quad \varepsilon > 0, x,y \in \mathbf{R}.$$

若 $1 \leqslant p = q/(q-1) < \infty, \varepsilon > 0$, 则分别以 $x^p, y^q, 1/p, 1/q, \varepsilon^p$ 取代 $x,y,\alpha,\beta,\varepsilon$, 由(1.3.55)′得

$$xy \leqslant p^{-1}(\varepsilon x)^p + q^{-1}(\varepsilon^{-1}y)^q, \quad x,y \geqslant 0. \tag{1.3.55$''$}$$

设 $p \geqslant 1$, 则取 $d = 2$, 由式(1.3.51)得到如下常用不等式:

$$(x+y)^p \leqslant 2^{p-1}(x^p + y^p), \quad x,y \geqslant 0.$$

此不等式十分简便但不够精细,可改造为以下两个实质上等价的不等式:

$$(x+y)^p \leqslant (1-\varepsilon)^{1-p}x^p + \varepsilon^{1-p}y^p, \quad 0 < \varepsilon < 1, \tag{1.3.56a}$$

$$(x+y)^p \leqslant (1+\varepsilon)^{p-1}(x^p + \varepsilon^{1-p}y^p), \quad \varepsilon > 0, \tag{1.3.56b}$$

其中 $p \geqslant 1, x,y \geqslant 0$. 特别,取 $p = 2$, 由式(1.3.56a)得到很常用的不等式:

$$(x+y)^2 \leqslant \frac{x^2}{1-\varepsilon} + \frac{y^2}{\varepsilon}, \quad 0 < \varepsilon < 1, x,y \in \mathbf{R}. \tag{1.3.57}$$

对于不等式(1.3.55)′,(1.3.56)与(1.3.57),通常如此选取“调节参数”ε, 使之极小化不等式之右端,从而使该不等式的运用达到最佳效果. 这一做法,在本书中是一个起很大作用的基本技巧.

如所熟知,在常微分方程理论中,**Gronwall 不等式**起很大作用. 这类不等式在本书中亦有很多应用机会,今给出它的几种常用形式. 设 $\varphi(\cdot)$ 是 J 上的有界非负 Borel 可测函数, $k(\cdot)$ 与 $\beta(\cdot)$ 是 J 上的非负可积函数,则

$$\begin{cases} \varphi(t) \leqslant k(t) + \int_{t_0}^{t}\beta(s)\varphi(s)\,\mathrm{d}s, \quad t \in J \\ \Rightarrow \varphi(t) \leqslant k(t) + \int_{t_0}^{t}\beta(s)k(s)\exp\left(\int_s^t \beta(r)\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s. \end{cases} \tag{1.3.58}$$

依次取 $\beta(\cdot) \equiv \beta, k(\cdot) \equiv k, k(\cdot) \equiv 0$, 得到以下几个特例:

$$\begin{cases}\varphi(t) \leqslant k(t) + \beta\int_{t_0}^{t} \varphi(s)\mathrm{d}s, \quad t \in J, \\ \Rightarrow \varphi(t) \leqslant k(t) + \beta\int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{\beta(t-s)} k(s)\mathrm{d}s,\end{cases} \tag{1.3.59}$$

$$\begin{cases}\varphi(t) \leqslant k + \int_{t_0}^{t} \beta(s)\varphi(s)\mathrm{d}s, \quad t \in J, \\ \Rightarrow \varphi(t) \leqslant k \exp\left(\int_{t_0}^{t} \beta(s)\mathrm{d}s\right),\end{cases} \tag{1.3.60}$$

$$\varphi(t) \leqslant \int_{t_0}^{t} \beta(s)\varphi(s)\mathrm{d}s \Rightarrow \varphi(t) \equiv 0, \quad t \in J. \tag{1.3.61}$$

(1.3.59)～(1.3.61)的倒向形式是

$$\begin{cases}\varphi(t) \leqslant k(t) + \beta\int_{t}^{T} \varphi(s)\mathrm{d}s, \quad t \in J \\ \Rightarrow \varphi(t) \leqslant k(t) + \beta\int_{t}^{T} \mathrm{e}^{\beta(s-t)} k(s)\mathrm{d}s,\end{cases} \tag{1.3.62}$$

$$\begin{cases}\varphi(t) \leqslant k + \beta\int_{t}^{T} \varphi(s)\mathrm{d}s, \quad t \in J, \\ \Rightarrow \varphi(t) \leqslant k\mathrm{e}^{\beta(T-t)}\end{cases}, \tag{1.3.63}$$

$$\varphi(t) \leqslant \beta\int_{t}^{T} \varphi(s)\mathrm{d}s \Rightarrow \varphi(t) \equiv 0, \quad t \in J. \tag{1.3.64}$$

第 2 章　随机微分方程

从现在开始进入本书的主题:随机微分方程(SDE).对于这个有待熟悉的新领域,最初的印象似乎是:它是常微分方程(ODE)的某种推广.这种认识有助于接受某种套路:如同对待 ODE 一样,依次去考虑 SDE 的解的存在唯一性、解的性质,尤其是解的稳定性等.这一发展线索确实不坏,它导向颇为丰富的成果.然而,沿这一路径走过不长的一段之后就会发现,现在所面对的是一个真正新的领域,而非一个老课题的重复.随机因素的出现,一方面使问题显著的复杂化,另一方面使得有大量基于现代概率论的新工具可供选择.在本章内容展开过程中,会自然地形成一些思路与方法,我们将力求从中归纳出某些模式,使其在后面两章中提供有效的导引.

对本章所用记号约定如下.如同已多次提到的,$(\Omega,\mathscr{F},P)$ 是给定的完备概率空间,$\{\mathscr{F}_t: t\in\mathbf{R}_+\}$ 是 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上给定的 σ 代数流,满足通常条件;随机过程的适应性总是对 $\mathscr{F}_t$ 而言的.$w=(w_1,w_2,\cdots,w_m)^{\mathrm{T}}$ 记给定的 m 维标准 Brown 运动.所有问题都在区间 $J=[t_0,T](\subset\mathbf{R}_+)$ 或 $\mathbf{R}_+$ 上考虑;时间区间的选定通常依上下文自明,并不处处说明.约定

$$L^p_{\mathscr{F}_t}(\Omega,\mathbf{R}^d)=\{X\in L^p(\Omega,\mathbf{R}^d): X \text{ 为 } \mathscr{F}_t \text{ 可测}\}.$$

§2.1　一般结论

如所熟知,ODE 的一般形式是

$$\dot{x}=f(t,x) \text{ 或 } \mathrm{d}x(t)=f(t,x(t))\mathrm{d}t,\quad t\in J,\tag{2.1.1}$$

其中 $f: J\times\mathbf{R}^d\to\mathbf{R}^d$. 凡确定地依赖于初始状态的时间系统,通常可表为某个形如(2.1.1)的 ODE 模型.然而,在现实生活中,由于随机干扰的作用,时间系统通常表现出不确定性,致使形如(2.1.1)的方程不再是正确描述这类系统的有效工具.这就需要对方程(2.1.1)进行适当改造,使之能反映随机干扰的作用.最简单的办法或许是,在方程(2.1.1)右端加入一个随机干扰项,将其转化为如下的随机微分方程(SDE)[①]:

$$\mathrm{d}x(t)=f(t,x(t))\mathrm{d}t+g(t,x(t))\mathrm{d}w(t),\quad t\in J,\tag{2.1.2}$$

---

① 准确地说,是 Itô 型 SDE,它只是更一般的 SDE 的特例.本书限于考虑 Itô 型 SDE,它无疑是应用上最具价值的 SDE.

其中 $f: J\times\mathbf{R}^d\to\mathbf{R}^d$ 与 $g: J\times\mathbf{R}^d\to\mathbf{R}^{d\times m}$ 是给定的 Borel 可测函数(注意 f 与 g 都是普通函数!), $w=(w_1,w_2,\cdots,w_m)^{\mathrm{T}}$ 是给定的 m 维标准 Brown 运动. 当 f 与 g 不显含 t 时称(2.1.2)为**自治系统**或时齐方程. 参照 ODE 理论的经验,对 SDE(2.1.2)自然提出以下问题:

(i) 在什么条件下方程(2.1.2)的解存在且唯一?

(ii) 方程(2.1.2)的解具有哪些性质(包括分析性质与统计性质)? 尤其是(2.1.2)的解是否具有某种稳定性?

(iii) 可否或如何求出方程(2.1.2)的解(准确解或近似解)?

本章将逐个考虑这些问题,至少给出部分解答. 我们将看到,对于上述问题的解答,ODE 理论的经验提供了重要启示. 本节给出 SDE 理论的最基本的概念与结论,包括存在定理、解的估计、解过程的性质等,中心结果无疑是存在定理.

2.1.1 存在定理

首先得界定 SDE 的解概念,此处面对的情况比 ODE 要稍复杂些,因而必要给出一个正式的定义.

定义 2.1.1 若 $\mathbf{R}^d$ 值随机过程 $x(t)\,(t\in J)$ 满足以下条件:

(i) $x(t)$ 是连续适应过程;

(ii) $f(t,x(t))\in\mathscr{L}^1(J,\mathbf{R}^d)$, $g(t,x(t))\in\mathscr{L}^2(J,\mathbf{R}^{d\times m})$;

(iii) $x(t)$ 满足如下随机积分方程[①]:

$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,x(s))\,\mathrm{d}s+\int_{t_0}^{t}g(s,x(s))\,\mathrm{d}w(s),\quad t\in J. \tag{2.1.3}$$

则称 $x(t)$ 为方程(2.1.2)的具初值 x_0 的解或解过程. 若 $x(t)$ 与方程(2.1.2)的任何其他亦具初值 x_0 的解 $\bar{x}(t)$ 无差别,则说 $x(t)$ 是方程(2.1.2)的具初值 x_0 的唯一解.

本节中总假定 $x_0\in L^2_{\mathscr{F}_{t_0}}(\Omega,\mathbf{R}^d)$, 这一点将不再处处说明. 还需注意,依定义 2.1.1,方程(2.1.2)的解必须是连续的! 当然,对 SDE 的解还可作多种不同的理解,但定义 2.1.1 对于展开 SDE 理论的核心内容看来是最方便的.

尽管方程(2.1.2)已明显地不同于方程(2.1.1),但对于方程(2.1.2)仍然可得到如下基本存在定理,它所需要的条件与 ODE 存在定理是高度类似的.

定理 2.1.2 设函数 $f(t,x)$ 与 $g(t,x)$ 在 $J\times\mathbf{R}^d$ 上满足以下条件:

(i) **一致 Lipschitz 条件**:存在正常数 $\bar{K}$, 使得

---

① 鉴于不定积分 $\int_{t_0}^{t}g(s,x(s))\,\mathrm{d}w(s)$ 仅在 a.s. 的意义上确定,对于方程(2.1.3),自然亦只要求它在 a.s. 的意义上满足. 这一点,今后在类似情况下将不再说明,也不在记号上体现出来,仅存于心中而已.

$$|f(t,x)-f(t,y)|^2 \vee |g(t,x)-g(t,y)|^2 \leqslant \bar{K}|x-y|^2; \quad (2.1.4)$$

(ii) **线性增长条件**:存在正常数 K,使得

$$|f(t,x)|^2 \vee |g(t,x)|^2 \leqslant K(1+|x|^2), \quad (2.1.5)$$

则对任给 $x_0 \in L^2_{\mathscr{F}_{t_0}}(\Omega,\mathbf{R}^d)$,方程(2.1.2)存在唯一解 $x(t)$,且 $x(t) \in \mathscr{M}^2(J,\mathbf{R}^d)$.

注 若$f(t,0)$ 与 $g(t,0)$ 对 $t \in J$ 有界(当f与 g 对 t 连续,特别当(2.1.2)为自治系统时就是如此),则条件(2.1.4)推出(2.1.5):

$$\begin{aligned}|f(t,x)|^2 &\leqslant 2|f(t,0)|^2+2|f(t,x)-f(t,0)|^2\\ &\leqslant \text{const}+2\bar{K}|x|^2 \leqslant \text{const}(1+|x|^2),\end{aligned}$$

对 $g(t,x)$ 亦有类似结论.因此不妨说,Lipschitz 条件是存在定理的主要条件.

如同在 ODE 理论中一样,存在定理的证明既可基于迭代法,亦可用某个不动点定理,二者各有优点.我们将在下一章中详细描述迭代法,此处则用一个较简洁的不动点论证.

证 证明依据如下几个标准步骤进行.

(i) 构成空间.在 $\mathscr{M}^2(J,\mathbf{R}^d)$ 中定义范数:

$$\|x\| = \sup_{t\in J} e^{-\alpha t}\left[E\int_{t_0}^t |x(s)|^2 ds\right]^{1/2}, \quad (2.1.6)$$

其中 α 是一个适当大的正常数.验证(2.1.6)确定义一个范数是平凡的.设范数 $\|x\|_2$ 依(1.3.1),则易看出

$$e^{-\alpha T}\|x\|_2 \leqslant \|x\| \leqslant \|x\|_2.$$

这表明范数 $\|\cdot\|$ 与 $\|\cdot\|_2$ 等价,因而 $\mathscr{M}^2(J,\mathbf{R}^d)$ 依范数(2.1.6)为 Banach 空间.

(ii) 定义映射 $F: \mathscr{M}^2(J,\mathbf{R}^d) \to \mathscr{M}^2(J,\mathbf{R}^d)$.任给 $x \in \mathscr{M}^2(J,\mathbf{R}^d)$,由条件(2.1.5)及引理1.3.3,有$f(t,x(t)) \in \mathscr{M}^2(J,\mathbf{R}^d)$,$g(t,x(t)) \in \mathscr{M}^2(J,\mathbf{R}^{d\times m})$,因此可定义

$$\hat{x}(t) = x_0+\int_{t_0}^t f(s,x(s))ds+\int_{t_0}^t g(s,x(s))dw(s), \quad t \in J.$$

$\hat{x}(t)$ 是连续的适应过程(参考定理1.3.2).用 Hölder 不等式、条件(2.1.5)及(1.3.11)得

$$\begin{aligned}E\left|\int_{t_0}^t f(s,x(s))ds\right|^2 &\leqslant (t-t_0)\int_{t_0}^t E|f(s,x(s))|^2 ds\\ &\leqslant K(T-t_0)\int_{t_0}^T(1+E|x(s)|^2)ds,\end{aligned}$$

$$E\left|\int_{t_0}^t g(s,x(s))dw(s)\right|^2 = \int_{t_0}^t E|g(s,x(s))|^2 ds$$

$$\leqslant K\int_{t_0}^{T}(1+\mathrm{E}|x(s)|^2)\mathrm{d}s.$$

综上知 $\mathrm{E}|\hat{x}(t)|^2$ 对 $t\in J$ 有界,因此 $\hat{x}(t)\in\mathscr{M}^2(J,\mathbf{R}^d)$. 定义 $Fx=\hat{x}$, 则 F 是一个从 $\mathscr{M}^2(J,\mathbf{R}^d)$ 到自身的映射.

(iii) 证 F 为压缩映射. 取定 $x,y\in\mathscr{M}^2(J,\mathbf{R}^d)$, 令 $z=x-y, v=\hat{x}-\hat{y}$. 则

$$\begin{aligned}\mathrm{E}|v(t)|^2 &=\mathrm{E}\left|\int_{t_0}^{t}[f(s,x(s))-f(s,y(s))]\mathrm{d}s\right.\\&\qquad\left.+\int_{t_0}^{t}[g(s,x(s))-g(s,y(s))]\mathrm{d}w(s)\right|^2\\&\leqslant 2\mathrm{E}\left|\int_{t_0}^{t}[f(s,x(s))-f(s,y(s))]\mathrm{d}s\right|^2\\&\qquad+2\mathrm{E}\left|\int_{t_0}^{t}[g(s,x(s))-g(s,y(s))]\mathrm{d}w(s)\right|^2 &&(\text{用(1.3.51)})\\&\leqslant 2(T-t_0)\int_{t_0}^{t}\mathrm{E}|f(s,x(s))-f(s,y(s))|^2\mathrm{d}s &&(\text{用 Hölder 不等式})\\&\qquad+2\int_{t_0}^{t}\mathrm{E}|g(s,x(s))-g(s,y(s))|^2\mathrm{d}s &&(\text{用(1.3.11)})\\&\leqslant M\int_{t_0}^{t}\mathrm{E}|z(s)|^2\mathrm{d}s\leqslant M\|z\|^2\mathrm{e}^{2\alpha t}, &&(M=2\bar{K}(T-t_0+1))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|v\|^2 &=\sup_{t\in J}\mathrm{e}^{-2\alpha t}\int_{t_0}^{t}\mathrm{E}|v(s)|^2\mathrm{d}s &&(\text{用(2.1.6)})\\&\leqslant M\|z\|^2\sup_{t\in J}\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{2\alpha(s-t)}\mathrm{d}s\leqslant r\|z\|^2,\end{aligned}$$

其中 $r=M[1-\mathrm{e}^{-2\alpha(T-t_0)}]/2\alpha$. 故得 $\|Fx-Fy\|\leqslant\sqrt{r}\|x-y\|$. 因已设 α 充分大, 故不妨设 $r<1$, 这就证明了 F 是压缩映射. 由熟知的压缩映射原理, F 有唯一不动点 x. 由 Fx 的定义直接看出 x 满足方程(2.1.3),因而 x 是方程(2.1.2)的解.

(iv) 证唯一性. 首先应注意, F 有唯一不动点并不自动推出方程(2.1.2)解的唯一性. 问题在于尚未排除(2.1.2)在 $\mathscr{M}^2(J,\mathbf{R}^d)$ 之外可能有解(注意这一考虑在本书它处亦适用). 今设 $x(t)$ 是方程(2.1.2)的具初值 x_0 的解(不假定它是 F 的不动点),今证 $x(t)\in\mathscr{M}^2(J,\mathbf{R}^d)$. 为此,只要证明不等式:

$$\mathrm{E}|x(t)|^2\leqslant(1+3\mathrm{E}|x_0|^2)\mathrm{e}^{\beta(t-t_0)},\quad \beta=3K(T-t_0+1),\quad t\in J.\qquad(2.1.7)$$

形式上,似乎可用如下论证:

$$\begin{aligned}\mathrm{E}|x(t)|^2 &=\mathrm{E}\left|x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,x(s))\mathrm{d}s+\int_{t_0}^{t}g(s,x(s))\mathrm{d}w(s)\right|^2 &&(\text{用(2.1.3)})\\&\leqslant 3\mathrm{E}|x_0|^2+3\mathrm{E}\left|\int_{t_0}^{t}f(s,x(s))\mathrm{d}s\right|^2\end{aligned}$$

$$+ 3\mathrm{E}\left|\int_{t_0}^{t} g(s,x(s))\mathrm{d}w(s)\right|^2 \qquad (用(1.3.51))$$

$$\leqslant 3\mathrm{E}|x_0|^2 + 3(T-t_0)\int_{t_0}^{t}\mathrm{E}|f(s,x(s))|^2\mathrm{d}s$$

$$+ 3\int_{t_0}^{t}\mathrm{E}|g(s,x(s))|^2\mathrm{d}s$$

$$\leqslant 3\mathrm{E}|x_0|^2 + \beta\int_{t_0}^{t}[1+\mathrm{E}|x(s)|^2]\mathrm{d}s, \qquad (用(2.1.5))$$

$$h(t) \triangleq 1 + \mathrm{E}|x(t)|^2 \leqslant 1 + 3|x_0|^2 + \beta\int_{t_0}^{t} h(s)\mathrm{d}s,$$

然后用 Gronwall 不等式((1.3.60)),即得出所要的不等式(2.1.7).

细心观察会发现,以上论证是通不过的.问题在于,为应用(1.3.11),要求 $g(t,x(t)) \in \mathscr{M}^2(J,\mathbf{R}^{d\times m})$,而在尚未证明 $x(t) \in \mathscr{M}^2(J,\mathbf{R}^d)$ 的情况下,这是无法确认的.幸而有一个简单的补救方法,即用一个**停时论证**.鉴于此方法在本书其他类似情况下将多次使用,故下面作稍细的说明.作停时

$$\tau_n = T \wedge \inf\{t \in J: |x(t)| \geqslant n\}.$$

对给定的 $\omega \in \Omega$,因连续函数 $x(t)$ 在 J 上有界,故当 n 充分大时 $|x(t)| < n(\forall t \in J)$,因而 $\tau_n = T$(注意 $\inf\varnothing = \infty$!).这表明 $\tau_n \to T; t\wedge\tau_n \to t(n\to\infty, \forall t \in J)$.若以 $t\wedge\tau_n$ 取代 t,则方程(2.1.3)变为

$$x(t\wedge\tau_n) = x_0 + \int_{t_0}^{t\wedge\tau_n} f(s,x(s))\mathrm{d}s + \int_{t_0}^{t\wedge\tau_n} g(s,x(s))\mathrm{d}w(s),$$

因而前面估计 $\mathrm{E}|x(t)|^2$ 时所用的论证同样可用于 $t\wedge\tau_n$ 代 t 的情况,而且因当 $s\in[0,t\wedge\tau_n]$ 时 $|x(s)|\leqslant n$,故应用(1.3.11)已不成问题.这就可证得

$$\mathrm{E}|x(t\wedge\tau_n)|^2 \leqslant (1+3\mathrm{E}|x_0|^2)\mathrm{e}^{\beta(t-t_0)}.$$

于是由 Fatou 定理有

$$\mathrm{E}|x(t)|^2 = \mathrm{E}\left[\lim_n |x(t\wedge\tau_n)|^2\right] \leqslant \varliminf_n \mathrm{E}|x(t\wedge\tau_n)|^2$$

$$\leqslant (1+3\mathrm{E}|x_0|)\mathrm{e}^{\beta(t-t_0)}.$$

这就完成了定理的证明. □

现在对已证的定理作点评述.就其与 ODE 基本存在定理高度对应而言,可以说定理 2.1.2 是令人满意的.不过其缺陷还是明显可见.首先,一致 Lipschitz 条件显然过强,即使像 $f(x) = |x|^2$ 这样高度简单的函数也不能满足.其次,线性增长条件同样过强,它排除了任何"高于 1 次"的函数,例如函数 $f(x) = |x|^p (p>1)$.最后,限定在一个紧区间 J 上考虑方程(2.1.2)的解显然不能满足实际需要.以上缺陷都可通过适当放宽条件而得到一定弥补,但都需要更精细的论证.我们不拟写出有关细节,只是给出一个较一般的结果,其基本思想是用一族类似于(2.1.4),

(2.1.5)但强度递变的条件代替条件(2.1.4),(2.1.5),解的存在性结论则通过某一极限程序得出.

定理 2.1.3 设 I 是以 t_0 为左端点的一个有限或无限区间,f 与 g 在 $I \times \mathbf{R}^d$ 上有定义且满足以下条件:

(i) **局部 Lipschitz 条件**:任给紧区间 $J \subset I$ 与 $n \geq 1$,存在正常数 K_{Jn},使得当 $t \in J, x, y \in \mathbf{R}^d, |x| \vee |y| \leq n$ 时有

$$|f(t,x) - f(t,y)|^2 \vee |g(t,x) - g(t,y)|^2 \leq K_{Jn} |x - y|^2; \quad (2.1.8)$$

(ii) **单调性条件**:任给紧区间 $J \subset I$,存在正常数 K_J,使得在 $J \times \mathbf{R}^d$ 上成立

$$2x^{\mathrm{T}} f(t,x) + |g(t,x)|^2 \leq K_J(1 + |x|^2), \quad (2.1.9)$$

则对任给 $x_0 \in L^2_{\mathscr{F}_{t_0}}(\Omega, \mathbf{R}^d)$,方程(2.1.2)存在定义于 I 上具初值 x_0 的唯一解 $x(t)$,且 $x(t) \in \mathscr{M}^2(I, \mathbf{R}^d)$,这意味着对任给紧区间 $J \subset I$ 有 $x(t) \in \mathscr{M}^2(J, \mathbf{R}^d)$.

若 f, g 满足线性增长条件(2.1.5),则易推出

$$2x^{\mathrm{T}} f(t,x) + |g(t,x)|^2 \leq (2\sqrt{K} + K)(1 + |x|^2),$$

可见条件(2.1.5)蕴涵了条件(2.1.9). 对于一维方程

$$\mathrm{d}x(t) = (x(t) - x^3(t))\mathrm{d}t + x^2(t)\mathrm{d}w(t)$$

而言,$f(x) = x - x^3$ 与 $g(x) = x^2$ 满足单调性条件:

$$2xf(x) + g^2(x) = 2x^2 - x^4 \leq 2(1 + x^2),$$

但不满足线性增长条件. 可见,单调性条件是线性增长条件的一个真正放宽.

与定理 2.1.2 比较,定理 2.1.3 的条件已经有很大的放宽,但仍然不能完全令人满意,新的改进依然是可能的. ODE 的经验也提示,不太可能得出某种"至善"的结果. 今后我们总是假定,方程(2.1.2)具初值 x_0 的解的存在唯一性已由某组条件保证,并以 $x(t, x_0)$ 记这个唯一解;至于所用的条件,则不予确指. 其次,只要我们关注的问题在某个区间 I 上考虑,就假定 $x(t) = x(t, x_0)$ 在整个 I 上定义,且 $x(t) \in \mathscr{M}^2(I, \mathbf{R}^d)$. 在进入新的论题之前,如上的总设定使我们处于比较有利的地位.

2.1.2 解的估计

现在开始研究方程(2.1.2)解的性质,包括分析性质与统计性质. 首要的问题无疑是:在所考虑的区间内,$x(t, x_0)$ 的增长受到什么限制? 这就需要对 $x(t) = x(t, x_0)$ 进行估计. 我们有兴趣于估计

$$\mathrm{E}|x(t)|^p, \ |x(t)| \text{ 及 } \overline{\lim_{t \to \infty}} t^{-1} \ln |x(t)|$$

等,这分别涉及**矩估计**、**轨道估计**与**渐近估计**,每种估计都是必要且有用的,不过最基本的还是矩估计. 注意前面所得的不等式(2.1.7)即是一个有用的矩估计. 对解 $x(t)$ 的估计通常基于 $|x(t)|$ 的某个适当表示,下面这些式子都是有用的:

$$|x(t)|^p \leqslant 3^{p-1}\left[|x_0|^p + \left|\int_{t_0}^t f(s,x(s))\mathrm{d}s\right|^p + \left|\int_{t_0}^t g(s,x(s))\mathrm{d}w(s)\right|^p\right], \tag{2.1.10a}$$

$$\mathrm{E}|x(t)|^p = \mathrm{E}|x_0|^p + \mathrm{E}\int_{t_0}^t L|x(s)|^p\mathrm{d}s, \tag{2.1.10b}$$

$$\mathrm{E}[1+|x(t)|^2]^{p/2} = \mathrm{E}[1+|x_0|^2]^{p/2} + \mathrm{E}\int_{t_0}^t L[1+|x(s)|^2]^{p/2}\mathrm{d}s, \tag{2.1.10c}$$

其中(2.1.10a)基于式(2.1.3)与(1.3.51),$p \geqslant 1$;(2.1.10b)与(2.1.10c)则基于(1.3.23)与(1.3.19).

鉴于今后经常要结合方程(2.1.2)运用(1.3.19),引入记号

$$\mathscr{L}V(t,x) = V_t(t,x) + V_x(t,x)f(t,x) + (1/2)\mathrm{tr}[g^{\mathrm{T}}(t,x)V_{xx}(t,x)g(t,x)], \tag{2.1.11}$$

这相当于用如下线性微分算子 $\mathscr{L}$ 作用于函数 $V(t,x)$:

$$\mathscr{L} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_i f_i(t,x)\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j}[g(t,x)g^{\mathrm{T}}(t,x)]_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}. \tag{2.1.11$'$}$$

注意 $\mathscr{L}$ 唯一地决定于函数 f 与 g,称为结合方程(2.1.2)的微分算子或**扩散算子**.若 $x(t)$ 是方程(2.1.2)的解(注意这是要点!),则结合式(2.1.11)与(1.3.19)有

$$LV(t,x(t)) = \mathscr{L}V(t,x(t)). \tag{2.1.12}$$

必须强调,与 $LV(t,x(t))$ 中的 $(t,x(t))$ 不同,$\mathscr{L}V(t,x)$ 中的 t,x 是独立变量①!

应用式(2.1.10b)或(2.1.10c)时,一个容易疏忽的条件是 $V_xg \in \mathscr{M}^2(J,\mathbf{R}^{1\times m})$(参看对(1.3.23)的说明),其中 $V=|x|^p$ 或 $(1+|x|^2)^{p/2}$. 在 $p=2$ 的情况下,以上条件可由 g 满足线性增长条件保证;在其他情况下,可能要采取一些特殊的措施.

定理 2.1.4 设 $x(t) = x(t,x_0)$,$x_0 \in L^2 \cap L^p$,$p>0$.

(i) 若存在正常数 α,使得在 $J\times\mathbf{R}^d$ 上成立:

$$x^{\mathrm{T}}f(t,x) + \frac{1\vee(p-1)}{2}|g(t,x)|^2 \leqslant \alpha(1+|x|^2), \tag{2.1.13}$$

则对 $t\in J$ 有

$$\mathrm{E}|x(t)|^p \leqslant 2^{(p/2-1)\vee 0}(1+\mathrm{E}|x_0|^p)\mathrm{e}^{\alpha p(t-t_0)}, \tag{2.1.14}$$

---

① 从概念上说,$LV(t,x(t))$ 与 $\mathscr{L}V(t,x)$ 是应严格区别的. 但文献中常用同一记号 $LV(t,x)$,且 1.3.2 节中对 $LV(t,x(t))$ 所建立的公式(1.3.32) ~ (1.3.37)形式上亦可用于 $\mathscr{L}V(t,x)$. 还可注意:即使 V 与 t 无关(如 $V=|x|^p$),$\mathscr{L}V(t,x)$ 一般依赖于 t,仅当 V,f,g 均不显含 t 时可将 $\mathscr{L}V(t,x)$ 简写作 $\mathscr{L}V(x)$.

(ii) 若线性增长条件(2.1.5)满足,则估计式(2.1.14)成立,其中

$$\alpha = \sqrt{K} + \frac{1 \vee (p-1)}{2}K. \tag{2.1.15}$$

证　当取 α 如式(2.1.15)时,条件(2.1.5)直接推出式(2.1.13),故只要证结论(i).考虑到条件(2.1.13)右端的形式,拟用式(2.1.10c).令 $y = \sqrt{1+|x|^2}$,则由(1.3.36)有

$$\begin{aligned}\mathscr{L}y^p &= (p/2)y^{p-2}[2x^{\mathrm{T}}f+|g|^2+(p-2)y^{-2}|x^{\mathrm{T}}g|^2]\\ &\leqslant py^{p-2}\left(x^{\mathrm{T}}f+\frac{p-1}{2}|g|^2\right)\leqslant \alpha py^p. \qquad (\text{用}(2.1.13))\end{aligned}$$

因此只要式(2.1.10c)可用,就有

$$\begin{aligned}\mathrm{E}y^p(t) &= \mathrm{E}y^p(t_0) + \int_{t_0}^t \mathrm{E}Ly^p(s)\,\mathrm{d}s\\ &\leqslant \mathrm{E}y^p(t_0) + \alpha p\int_{t_0}^t \mathrm{E}y^p(s)\,\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

然后用 Gronwall 不等式((1.3.60))立得

$$\mathrm{E}[1+|x(t)|^2]^{p/2} \leqslant 2^{(p/2-1)\vee 0}(1+\mathrm{E}|x_0|^p)\mathrm{e}^{\alpha p(t-t_0)},\quad t\in J. \tag{2.1.16}$$

不等式(2.1.16)严格地强于所要证的不等式(2.1.14)(后面我们将用到(2.1.16)).

以上论证确实很简捷.但如我们已预先警告的,应用式(2.1.10c)可能隐含缺陷!需要验证 $y^{p-2}x^{\mathrm{T}}g \in \mathscr{M}^2(J,\mathbf{R}^{1\times m})$,而这未必容易验证.适当的方法是用证不等式(2.1.7)的技巧回避以上验证,即令 $\tau_n = T\wedge \inf\{t\in J: |x(t)|\geqslant n\}$,以 $t\wedge\tau_n$ 取代 t,余下的论证与上面的处理并无区别,细节从略. □

如果不用式(2.1.10c)而改用式(2.1.10b),则可得类似的估计(对于 $p\geqslant 2$):

$$\mathrm{E}|x(t)|^p \leqslant (1+\mathrm{E}|x_0|^p)\mathrm{e}^{\beta(t-t_0)},\quad \beta = \alpha p 2^{p/2-1}. \tag{2.1.14$'$}$$

这一估计似乎稍弱于式(2.1.14).若用式(2.1.10a),则可得到一个类似于式(2.1.7)的估计.注意式(2.1.7)与 T 有关,右端随 T 增大而很快增长,这就不如估计式(2.1.14)好.

仔细分析定理 2.1.4 之证明,不难得出如下更一般的矩估计结果.

定理 2.1.5　设 $p>0$,存在 $V(t,x)\in C^{1,2}(J\times\mathbf{R}^d)$ 与常数 $\alpha>0$,使得

$$|x|^p \vee \alpha^{-1}\mathscr{L}V(t,x) \leqslant V(t,x),\quad t\in J, x\in\mathbf{R}^d.$$

则对任给 $x_0\in L^2\cap L^p$,方程(2.1.2)的解 $x(t,x_0)$ 满足:

$$\mathrm{E}|x(t,x_0)|^p \leqslant \mathrm{E}V(t_0,x_0)\mathrm{e}^{\alpha(t-t_0)},\quad t\in J.$$

特别,若 $p\geqslant 2$ 且条件(2.1.13)满足,则取 $V=(1+|x|^2)^{p/2}$ 与 $V=1+|x|^p$ 分别得到估计式(2.1.14)与(2.1.14)′.

如上的矩估计方法虽然简单,但已包含了作各种拓广的基本要素.

下面建立的"极大不等式"较之不等式(2.1.14)稍强,论证也复杂些.

定理 2.1.6 设 $p>0, x(t)=x(t,x_0), x_0 \in L^2 \cap L^p$. 若线性增长条件(2.1.5)满足,则有以下估计:

$$\begin{cases} \mathrm{E}\left(\sup\limits_{t_0 \leqslant s \leqslant t} |x(s)|^p\right) \leqslant 2\mathrm{E}(1+|x_0|^2)^{p/2} \mathrm{e}^{\beta(t-t_0)}, \quad t \in J, \\ \beta = p[2\sqrt{K} + K(32p+1+|p-2|)]. \end{cases} \tag{2.1.17}$$

因此,在线性增长条件下,对任何 $p>0$ 与 $x_0 \in L^2 \cap L^p$,有

$$\mathrm{E}\left(\sup_{t_0 \leqslant s \leqslant t} |x(s,x_0)|^p\right) < \infty, \quad t \in J.$$

证 仍令 $y=\sqrt{1+|x|^2}$. 注意在定理条件下可用估计(2.1.14),因而可验证 $y^{p-2}x^{\mathrm{T}}g \in \mathscr{M}^2(J,\mathbf{R}^{1\times m})$,这就无需如前一定理一样考虑一个停时论证. 作估计:

$$\begin{aligned} h(t) &\triangleq \mathrm{E}\left(\sup_{t_0 \leqslant s \leqslant t} y^p(s)\right) \\ &\leqslant \mathrm{E}y^p(t_0) + \frac{p}{2}\mathrm{E}\int_{t_0}^t y^{p-2}(s)[2|x^{\mathrm{T}}(s)f(s,x(s))| \\ &\quad + (1+|p-2|)|g(s,x(s))|^2]\mathrm{d}s \\ &\quad + p\mathrm{E}\left[\sup_{t_0 \leqslant s \leqslant t}\left|\int_{t_0}^s y^{p-2}(r)x^{\mathrm{T}}(r)g(r,x(r))\mathrm{d}w(r)\right|\right] \quad (\text{用}(1.3.36)) \\ &\leqslant \mathrm{E}y^p(t_0) + \frac{p}{2}[2\sqrt{K}+K(1+|p-2|)]\int_{t_0}^t \mathrm{E}y^p(s)\mathrm{d}s \\ &\quad + \mathrm{E}\left[32p^2\int_{t_0}^t y^{2p-2}(s)|g(s,x(s))|^2\mathrm{d}s\right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{用}(1.3.48)) \\ &\leqslant \mathrm{E}y^p(t_0) + c_1\int_{t_0}^t \mathrm{E}y^p(s)\mathrm{d}s \quad \left(c_1 = \frac{p}{2}[2\sqrt{K}+K(1+|p-2|)]\right) \\ &\quad + \mathrm{E}\left[\sup_{t_0 \leqslant s \leqslant t} y^p(s) \cdot 32Kp^2\int_{t_0}^t y^p(s)\mathrm{d}s\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant \mathrm{E}y^p(t_0) + c_1\int_{t_0}^t h(s)\mathrm{d}s + \frac{1}{2}h(t) + 16Kp^2\int_{t_0}^t h(s)\mathrm{d}s \\ &= \mathrm{E}y^p(t_0) + \frac{1}{2}h(t) + \frac{\beta}{2}\int_{t_0}^t h(s)\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

将 $(1/2)h(t)$ 移向不等式左端,然后用 Gronwall 不等式即得出式(2.1.17). □

为估计 $\mathrm{E}\left(\sup\limits_{t_0 \leqslant s \leqslant t} |x(s)|^p\right)$,可用多种方法,所得估计的精细度亦互有差异. 例如,用类似于式(2.1.10b)的公式可得

$$\begin{cases} \mathrm{E}\left(\sup\limits_{t_0 \leqslant s \leqslant t} |x(s)|^p\right) \leqslant (1 + 2\mathrm{E}|x_0|^p)\mathrm{e}^{\beta(t-t_0)}, \\ \beta = p[2\sqrt{K} + 2K(33p-1)], \quad p \geqslant 2, \end{cases} \tag{2.1.18a}$$

这已稍逊于估计式(2.1.17). 不过,当 $p = 2$ 时将上述方法改进后能得

$$\begin{cases} \mathrm{E}\left(\sup\limits_{t_0 \leqslant s \leqslant t} |x(s)|^2\right) \leqslant (1 + 2\mathrm{E}|x_0|^2)\mathrm{e}^{\beta(t-t_0)}, \\ \beta = 4\sqrt{K} + 130K, \end{cases} \tag{2.1.18b}$$

这就稍优于(2.1.17). 若用式(2.1.10a),则得到与式(2.1.17)相距较远的结果($p \geqslant 2$):

$$\begin{cases} \mathrm{E}\left(\sup\limits_{t_0 \leqslant s \leqslant t} |x(s)|^p\right) \leqslant (1 + 3^{p-1}\mathrm{E}|x_0|^p)\mathrm{e}^{\beta(t-t_0)}, \\ \beta = \dfrac{1}{6}(18K)^{\frac{p}{2}}(T-t_0)^{\frac{p}{2}-1}\left[(T-t_0)^{\frac{p}{2}} + \left(\dfrac{p^3}{2(p-1)}\right)^{\frac{p}{2}}\right]. \end{cases} \tag{2.1.19a}$$

若取 $p = 2$, 则从(2.1.19a)得到

$$\mathrm{E}\left(\sup_{t_0 \leqslant s \leqslant t} |x(s)|^2\right) \leqslant (1 + 3\mathrm{E}|x_0|^2)\mathrm{e}^{3K(T-t_0+4)(t-t_0)}. \tag{2.1.19b}$$

注意其右端非常接近于不等式(2.1.7)的右端.

对于如式(2.1.17)的估计,不难建立一个类似于定理 2.1.5 的结果.

用矩估计的方法可得出解的矩连续性(参考 1.2.1 节).

定理 2.1.7　设线性增长条件(2.1.5)满足, $x(t) = x(t,x_0)$, $x_0 \in L^2 \cap L^p$, $p > 0$, 则

$$\mathrm{E}|x(t) - x(s)|^p \leqslant C_p |t-s|^{p/2}, \quad t,s \in J,$$

其中 C_p 是与 t,s 无关的正常数. 因此, $x(t)$ 在 J 上 p 阶矩连续.

证　不妨设 $p \geqslant 2$. 固定 $t_0 \leqslant s < t \leqslant T$, 则

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}|x(t) - x(s)|^p \\
&= \mathrm{E}\left|\int_s^t f(r,x(r))\mathrm{d}r + \int_s^t g(r,x(r))\mathrm{d}w(r)\right|^p && (\text{用}(2.1.3)) \\
&\leqslant 2^{p-1}\mathrm{E}\left|\int_s^t f(r,x(r))\mathrm{d}r\right|^p + 2^{p-1}\mathrm{E}\left|\int_s^t g(r,x(r))\mathrm{d}w(r)\right|^p \\
&\leqslant 2^{p-1}(t-s)^{p-1}\mathrm{E}\int_s^t |f(r,x(r))|^p\mathrm{d}r && (\text{用 Hölder 不等式}) \\
&\quad + \mathrm{const}\ (t-s)^{\frac{p}{2}-1}\mathrm{E}\int_s^t |g(r,x(s))|^p\mathrm{d}r && (\text{用}(1.3.45)) \\
&\leqslant \mathrm{const}\ (t-s)^{\frac{p}{2}-1}\int_s^t \mathrm{E}(1 + |x(r)|^2)^{\frac{p}{2}}\mathrm{d}r && (\text{用}(2.1.5)) \\
&\leqslant \mathrm{const}\ (t-s)^{\frac{p}{2}-1}\int_s^t \mathrm{e}^{\alpha p(r-t_0)} \leqslant \mathrm{const}\ (t-s)^{p/2}. && (\text{用}(2.1.16))
\end{aligned}$$

□

现在设 $x(t)=x(t,x_0)$ 是方程(2.1.2)在 $[t_0,\infty)$ 上的解，关于 f,g 的适当条件已保证 $x(t)\in\mathscr{M}^2([t_0,\infty),\mathbf{R}^d)$. 我们感兴趣的问题是：当 $t\to\infty$ 时，$|x(t)|$ 或其 p 阶矩 $\mathrm{E}|x(t)|^p$ 的增长至多有多快？这需要用适当的数量指标来刻画. 约定

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\, t^{-1}\ln|x(t)| \quad 与 \quad \overline{\lim_{t\to\infty}}\, t^{-1}\ln \mathrm{E}|x(t)|^p$$ [①]

分别为 $x(t)$ 的 **Liapunov 指数**与 **p 阶矩 Liapunov 指数**，前者也称为轨道 Liapunov 指数. 于是问题在于：求出 Liapunov 指数的某种上界.

矩 Liapunov 指数自然联系于一定的矩估计. 例如，若定理 2.1.4 的条件对 $t\in[t_0,\infty)$ 满足，则从矩估计(2.1.14)直接推出

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\, t^{-1}\ln \mathrm{E}|x(t)|^p\leqslant \alpha p.$$

确定 Liapunov 指数的方法更具多样性. 利用一定的矩估计是主要方法之一，现在来勾画一下一般思路，如下思路本书中将反复用到. 设 $p>0,\gamma\in\mathbf{R}$. 为证

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\, t^{-1}\ln|x(t)|^p\leqslant\gamma,\text{a.s.}, \tag{2.1.20}$$

只要指明，对几乎所有 $\omega\in\Omega$, $\forall\varepsilon>0$, 有

$$|x(t)|^p\leqslant \text{const}\ \mathrm{e}^{(\gamma+\varepsilon)t},\quad t\ 充分大.$$

取定 $\tau>0$, 将以上不等式转化为如下离散不等式[②]：

$$\sup_{n\tau-\tau\leqslant t\leqslant n\tau}|x(t)|^p\leqslant \text{const}\ \mathrm{e}^{n\tau(\gamma+\varepsilon)},\quad n\ 充分大. \tag{2.1.21}$$

而这就可能应用 Borel-Cantelli 引理 1.1.4：因(用(1.1.21))

$$P\Big(\sup_{n\tau-\tau\leqslant t\leqslant n\tau}|x(t)|^p\geqslant \mathrm{e}^{n\tau(\gamma+\varepsilon)}\Big)\leqslant \mathrm{e}^{-n\tau(\gamma+\varepsilon)}\mathrm{E}\Big(\sup_{n\tau-\tau\leqslant t\leqslant n\tau}|x(t)|^p\Big)\triangleq b_n,$$

故若能得出矩估计

$$\mathrm{E}\Big(\sup_{n\tau-\tau\leqslant t\leqslant n\tau}|x(t)|^p\Big)\leqslant \text{const}\ \mathrm{e}^{n\gamma\tau}, \tag{2.1.22}$$

则 $b_n\leqslant \text{const}\ \mathrm{e}^{-n\tau\varepsilon}$, 从而 $\sum b_n<\infty$, 于是得出式(2.1.21)a.s.成立. 为得出估计(2.1.22)，可直接应用定理 2.1.6，亦可用其他方法.

以下定理概括了几种典型情况. 或许更重要的是，证明以下定理的方法有很大的代表性，今后将在类似情况下多次用到.

定理 2.1.8 设 $p>0,\gamma\in\mathbf{R},x(t)=x(t,x_0),x_0\in L^2\cap L^p$. 则以下每个条件保证式(2.1.20)成立：

(i) f 与 g 在 $[t_0,\infty)\times\mathbf{R}^d$ 上满足线性增长条件(2.1.5)，$p=2$,

$$\gamma=4\sqrt{K}+130K.$$

(ii) 对 $x(t)$ 有矩估计 $\mathrm{E}|x(t)|^p\leqslant \text{const}\ \mathrm{e}^{\gamma t}(t\geqslant t_0)$；$f$ 与 g 在 $[t_0,\infty)\times\mathbf{R}^d$

---

① 总约定 $\ln 0=-\infty$，因此不必排除 $x(t)$ 可能取零值的情况. 本书今后概依此解释.

② 用将在下一章中引入的记号，式(2.1.21)左端可表成 $\|x_{n\tau}\|^p$（参看定理之证）.

上满足如下条件：

$$| x^{\mathrm{T}}f(t,x) | \vee | g(t,x) |^2 \leqslant K | x |^2. \tag{2.1.23}$$

(iii) $p = 2$, f 与 g 在 $[t_0,\infty) \times \mathbf{R}^d$ 上满足条件

$$2x^{\mathrm{T}}f(t,x) + | g(t,x) |^2 \leqslant \gamma(1 + | x |^2). \tag{2.1.24}$$

证　当条件(i)满足时可直接用定理 2.1.6 得出估计(2.1.22).

其次设条件(ii)满足. 取 $\tau = 1$, 今直接估计

$$h_n \triangleq \mathrm{E}\Big(\sup_{n\leqslant t\leqslant n+1} | x(t) |^p\Big),$$

得出(2.1.22). 用(1.3.35)有

$$\begin{aligned}
h_n &\leqslant \mathrm{E} | x(n) |^p + p\mathrm{E}\int_n^{n+1} | x(t) |^{p-2} \\
&\quad \times \Big[| x^{\mathrm{T}}(t)f(t,x(t)) | + \frac{1 + | p-2 |}{2} | g(t,x(t)) |^2 \Big]\mathrm{d}t \\
&\quad + p\mathrm{E}\Big[\sup_{n\leqslant t\leqslant n+1}\Big|\int_n^t | x(s) |^{p-2}x^{\mathrm{T}}(s)g(s,x(s))\mathrm{d}w(s)\Big|\Big] \\
&\leqslant \mathrm{E} | x(n) |^p + \mathrm{const}\cdot\int_n^{n+1}\mathrm{E} | x(t) |^p\mathrm{d}t \qquad (\text{用}(2.1.23)) \\
&\quad + \mathrm{E}\Big[\sup_{n\leqslant t\leqslant n+1} | x(t) |^p \cdot \mathrm{const}\cdot\int_n^{n+1} | x(s) |^p\mathrm{d}s\Big]^{\frac{1}{2}} \qquad (\text{用}(1.3.48)) \\
&\leqslant \mathrm{E} | x(n) |^p + \frac{1}{2}h_n + \mathrm{const}\cdot\int_n^{n+1}\mathrm{E} | x(t) |^p\mathrm{d}t \\
&\leqslant \frac{1}{2}h_n + \mathrm{const}\cdot \mathrm{e}^{n\gamma}, \qquad (\text{用矩估计})
\end{aligned}$$

由此显然得出式(2.1.22)(以 n 代 $n-1$).

最后设条件(iii)满足，则用定理 2.1.4 可得矩估计

$$\mathrm{E} | x(t) |^2 \leqslant (1 + \mathrm{E} | x_0 |^2)\mathrm{e}^{\gamma(t-t_0)},$$

但因缺少条件(2.1.23)，并不能直接归于(ii)的情况. 下面所用的论证是更精细的，关键是利用(1.3.37)与指数鞅不等式：

$$\begin{aligned}
&\ln[1 + | x(s) |^2]\Big|_{t_0}^{t} \\
&= \int_{t_0}^t \frac{L(1 + | x(s) |^2)}{1 + | x(s) |^2}\mathrm{d}s + \int_{t_0}^t\Big[Z(s)\mathrm{d}w(s) - \frac{1}{2} | Z(s) |^2\mathrm{d}s\Big] \\
&= I_1 + I_2,
\end{aligned}$$

其中 $Z = 2x^{\mathrm{T}}g/(1 + | x |^2)$. 首先对 I_1 有(用(2.1.24))

$$I_1 = \int_{t_0}^t \frac{2x^{\mathrm{T}}(s)f(s,x(s)) + | g(s,x(s)) |^2}{1 + | x(s) |^2}\mathrm{d}s \leqslant \gamma(t - t_0).$$

其次用指数鞅不等式((1.3.47))估计 I_2：

$$P\Big(\sup_{t_0\leqslant t\leqslant n} I_2(t)\geqslant 2\ln n\Big)\leqslant \mathrm{e}^{-2\ln n}=\frac{1}{n^2},$$

于是由 Borel-Cantelli 引理得出,对几乎所有 $\omega\in\Omega$, 有

$$I_2(t)<2\ln n,\quad t_0\leqslant t\leqslant n, n\text{ 充分大}.$$

设 $n-1\leqslant t\leqslant n$, 则几乎必然地,当 t 充分大时有

$$\ln(1+|x(t)|^2)\leqslant \ln(1+|x_0|^2)+\gamma(t-t_0)+2\ln(t+1),$$

由此显然推出(2.1.20)(取 $p=2$). □

因线性增长条件(2.1.5)蕴涵了式(2.1.24),现在可在条件(2.1.5)之下比较定理 2.1.8(i)与(iii)的结果. 由 2.1.8(i)得出

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\, t^{-1}\ln|x(t)|\leqslant 2\sqrt{K}+65K.$$

另一方面,(2.1.5)推出(2.1.24)(取 $\gamma=2\sqrt{K}+K$, 参看定理 2.1.6 后的说明),因而由定理 2.1.8(iii)得

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\, t^{-1}\ln|x(t)|\leqslant \sqrt{K}+K/2.$$

由此可见,在定理 2.1.8 的三种情况中,基于指数鞅不等式的(iii)要比基于矩估计的(i)精细得多,这是很值得注意的. 至于定理 2.1.8(ii),条件中的矩估计不必源于定理 2.1.4 或定理 2.1.6,且亦未限定 $\gamma>0$, 因此尚留下作多种应用的余地.

鉴于指数鞅不等式已有得出精细结果的纪录,我们不妨举一些应用它的进一步的例子. 从结论上看,下面的估计也是很有趣的.

定理 2.1.9 设 f 与 g 在 $[t_0,\infty)\times\mathbf{R}^d$ 上满足条件:

$$x^{\mathrm{T}}f(t,x)\leqslant\gamma|x|^2+a,\quad \|g(t,x)\|^2\leqslant b, \tag{2.1.25}$$

其中 $a,b\geqslant 0$. 则对于方程(2.1.2)的解 $x(t)$ 有以下估计:

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\gamma t}|x(t)|}{\sqrt{\ln\ln t}}=0,\text{a.s.},\quad \gamma>0, \tag{2.1.26a}$$

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{|x(t)|}{\sqrt{2t\ln\ln t}}\leqslant\sqrt{b\mathrm{e}},\text{a.s.},\quad \gamma=0, \tag{2.1.26b}$$

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{|x(t)|}{\sqrt{\ln t}}\leqslant\sqrt{\frac{b\mathrm{e}}{|\gamma|}},\text{a.s.},\quad \gamma<0. \tag{2.1.26c}$$

证 三种情况下的结论颇不相同,但证明的基本思想是一样的:关键在于估计 $h(t)\triangleq \mathrm{e}^{-2\gamma t}|x(t)|^2$. 注意

$$h(s)\Big|_{t_0}^{t}=\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{-2\gamma s}[L|x(s)|^2-2\gamma|x(s)|^2]\mathrm{d}s+M(t)$$

$$\leqslant(2a+b\rho)\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{-2\gamma s}\mathrm{d}s+M(t),\qquad (\text{用(2.1.25)}) \tag{2.1.27}$$

其中

$$M(t) = \int_{t_0}^{t} Z(s)\mathrm{d}w(s), \quad Z(s) = 2\mathrm{e}^{-2\gamma s}x^{\mathrm{T}}(s)g(s,x(s)),$$

常数 $\rho > 0$ 决定于 $|A|^2 \leqslant \rho \|A\|^2 (A \in \mathbf{R}^{d\times m})$. 其次有

$$\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} |Z(s)|^2\mathrm{d}s \leqslant 2b\int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-4\gamma s}|x(s)|^2\mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t} 2b\mathrm{e}^{-2\gamma s}h(s)\mathrm{d}s. \quad (2.1.28)$$

观察式(2.1.27)与(2.1.28)容易想到要用指数鞅不等式,下面的用法在本书中颇具典型性. 取 $t_0 < t_1 < \cdots < t_n \to \infty, \delta_n > 0, \theta > 1$. 对任何 $n \geqslant 1$, 由指数鞅不等式有

$$P\left(\sup_{t_0\leqslant t\leqslant t_{n+1}}\left[M(t) - \frac{\delta_n}{2}\int_{t_0}^{t} |Z(s)|^2\mathrm{d}s\right] \geqslant \frac{\ln n^{\theta}}{\delta_n}\right) \leqslant \frac{1}{n^{\theta}}.$$

由 Borel-Cantelli 引理 1.1.4 及式(2.1.28), a. s. 地, 当 n 充分大, $t_0 \leqslant t \leqslant t_{n+1}$ 时有

$$M(t) \leqslant \frac{\theta \ln n}{\delta_n} + 2b\,\delta_n\int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-2\gamma s}h(s)\mathrm{d}s.$$

代入式(2.1.27)后得, a. s. 地, 当 n 充分大, $t_0 \leqslant t \leqslant t_{n+1}$ 时有

$$h(t) \leqslant h(t_0) + \frac{\theta \ln n}{\delta_n} + (2a + b\rho)\int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-2\gamma s}\mathrm{d}s + 2b\delta_n\int_{t_0}^{t} \mathrm{e}^{-2\gamma s}h(s)\mathrm{d}s. \quad (2.1.27)'$$

但 t_n, δ_n 有待选择, 下面就 γ 的三种情况分别考虑.

(i)　设 $\gamma > 0$. 取 $t_n = \exp n^k (k > 0), \delta_n = 1, \theta = 2$, 则由式(2.1.27)′有

$$h(t) \leqslant c + 2\ln n + \int_{t_0}^{t} 2b\mathrm{e}^{-2\gamma s}h(s)\mathrm{d}s, \text{a. s.}, \quad t_0 \leqslant t \leqslant t_{n+1},$$

其中 c 与 t, n 无关. 用 Gronwall 不等式解出 $h(t)$, 并注意当 $t_n \leqslant t \leqslant t_{n+1}$ 时 $\ln n^k \leqslant \ln\ln t$, 知 a. s. 地, 当 t 充分大时有

$$h(t) \leqslant \mathrm{e}^{b/\gamma}(c + 2k^{-1}\ln\ln t).$$

上式两端除以 $\ln\ln t$, 然后令 $k \to \infty$ 即得式(2.1.26a).

(ii)　设 $\gamma = 0$. 取 $t_n = \theta^n, \delta_n = \delta\theta^{-n}, \theta > 1, \delta > 0$. 则由式(2.1.27)′有

$$h(t) \leqslant h(t_0) + \frac{\theta^{n+1}\ln n}{\delta} + \theta^{n+1}(2a + b\rho) + \frac{2b\delta}{\theta^n}\int_{t_0}^{t} h(s)\mathrm{d}s, \text{a. s.}, \quad t_0 \leqslant t \leqslant \theta^{n+1},$$

解出 $h(t)$, 并注意当 $t_n \leqslant t \leqslant t_{n+1}$ 时 $\ln n \leqslant \ln\ln t - \ln\ln\theta$, 知 a. s. 地, 当 t 充分大时

$$h(t) \leqslant \mathrm{e}^{2b\delta\theta}[h(t_0) + \theta t(\delta^{-1}\ln\ln t - \delta^{-1}\ln\ln\theta + 2a + b\rho)].$$

上式两边除以 $2t\ln\ln t$, 取上极限得

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{|x(t)|^2}{2t\ln\ln t} \leqslant \frac{\theta\mathrm{e}^{2b\delta\theta}}{2\delta}, \quad \text{a. s.};$$

然后令 $\theta \to 1$ 并取 $\delta = 1/2b$ 即得式(2.1.26b).

(iii)　设 $\gamma < 0$. 取 $t_n = n\varepsilon, \delta_n = \delta\mathrm{e}^{2n\gamma\varepsilon}, \varepsilon, \delta > 0, \theta > 1$, 则由式(2.1.27)′有

$$h(t) \leqslant h(t_0) + \frac{\theta}{\delta}\mathrm{e}^{-2n\gamma\varepsilon}\ln n + \frac{2a + b\rho}{2|\gamma|}\mathrm{e}^{-2\gamma\varepsilon(n+1)}$$

$$+2b\delta\,\mathrm{e}^{2n\gamma\varepsilon}\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{-2\gamma s}h(s)\,\mathrm{d}s,\text{a. s.},\quad t_0\leqslant t\leqslant t_{n+1}.$$

解出 $h(t)$，并注意当 $t_n\leqslant t\leqslant t_{n+1}$ 时 $\ln n\leqslant\ln t-\ln\varepsilon$，知 a. s. 地，当 t 充分大时有

$$h(t)\leqslant\exp\left(\frac{b\delta\mathrm{e}^{-2\gamma\varepsilon}}{|\gamma|}\right)\left[h(t_0)+\frac{\theta}{\delta}\mathrm{e}^{-2\gamma t}\ln(t/\varepsilon)+\frac{2a+b\rho}{2|\gamma|}\mathrm{e}^{-2\gamma(t+\varepsilon)}\right].$$

上式两边乘以 $\mathrm{e}^{2\gamma t}/\ln t$，取上极限得

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{|x(t)|^2}{\ln t}\leqslant\frac{\theta}{\delta}\exp(b\delta\mathrm{e}^{-2\gamma\varepsilon}/|\gamma|),\text{a. s.},$$

然后令 $\varepsilon\to0,\theta\to1,\delta=|\gamma|/b$，即得式(2.1.26c)． □

若令 $f\equiv0,g\equiv I$，则取 $\gamma=a=0,b=1$ 使条件(2.1.25)满足，此时方程(2.1.2)成为 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}w$；取 $x_0=0$ 得 $x(t)=w(t)$，于是应用式(2.1.26b)得

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{|w(t)|}{\sqrt{2t\ln\ln t}}\leqslant\sqrt{\mathrm{e}},\text{a. s.}.$$

这与重对数律((1.2.35)′)比较固然尚有差距，但已很接近. 像定理 2.1.9 这样颇具一般性的结果，用在很特殊的场合仍不失其精确性是颇令人惊奇的. 这一事实很能说明，基于指数鞅不等式的方法是高度有效的.

2.1.3 Markov 性

我们已考虑过 SDE 解的增长界限与矩连续性等，这些都主要带有分析特征. 现在转而考虑解过程的统计特性，下面是一个非常令人满意的结果.

定理 2.1.10 设 f,g 在 $\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^d$ 上满足存在定理(如定理 2.1.3)之条件，以 $\xi_{t,x}(s)$ 记方程(2.1.2)在 $[t,\infty)$ 上的解，$t\geqslant0,x=\xi_{t,x}(t)\in\mathbf{R}^d,\xi(s)=\xi_{0,x_0}(s)$. 则有结论：

(i) $\xi(s)(s\geqslant0)$ 是一个 Markov 过程，其转移概率为

$$P(t,x,s,B)=P(\xi_{t,x}(s)\in B),\quad B\in\mathscr{B}^d.\tag{2.1.29}$$

(ii) 若 f 与 g 不显含 t，则 $\xi(s)$ 是齐次的.

(iii) $\xi(s)$ 是扩散过程，分别以 f 与 gg^{T} 为其漂移系数与扩散系数.

证 严格的证明需要较精细的分析，下面的论证只是一个粗略的勾画.

(i) 取定 $0\leqslant t<s<\infty,B\in\mathscr{B}^d$，令 $\mathscr{A}_t=\sigma(w(r)-w(t),r\geqslant t)$. 由

$$\xi(s)=\xi(t)+\int_t^s f(r,\xi(r))\,\mathrm{d}r+\int_t^s g(r,\xi(r))\,\mathrm{d}w(r)$$

看出 $\xi(s)-\xi(t)$ 为 $\mathscr{A}_t$ 可测. 因 $\mathscr{A}_t$ 与 $\mathscr{F}_t$ 独立(依定义 1.2.15)，故

$$\begin{aligned}P(\xi(s)\in B\,|\,\mathscr{F}_t)&=P(\xi(s)-x\in B-x,x=\xi(t)\,|\,\mathscr{F}_t)\\&=P(\xi(s)\in B\,|\,\xi(t)),\end{aligned}$$

这表明 $\xi(s)$ 具有 Markov 性质(看定义 1.2.12). 其次，$\forall x\in\mathbf{R}^d$，有

$$P(t,x,s,B)=P(\xi(s)\in B\,|\,\xi(t)=x)$$

$$= P(\xi_{t,x}(s) \in B \mid \xi(t) = x) \quad (\text{用唯一性})$$

$$= P(\xi_{t,x}(s) \in B),$$

这就得出式(2.1.29)成立.

(ii) 取定 $t, \tau \in \mathbf{R}_+, x \in \mathbf{R}^d$, 令 $x(s) = \xi_{t+\tau,x}(s+\tau)$, 则

$$\begin{aligned} x(s) &= x + \int_{t+\tau}^{s+\tau} f(\xi_{t+\tau,x}(r))\,\mathrm{d}r + \int_{t+\tau}^{s+\tau} g(\xi_{t+\tau,x}(r))\,\mathrm{d}w(r) \\ &= x + \int_t^s f(x(r))\,\mathrm{d}r + \int_t^s g(x(r))\,\mathrm{d}w(r), \end{aligned}$$

可见 $x(s) = \xi_{t,x}(s)$. 于是用式(2.1.29)得

$$\begin{aligned} P(t+\tau, x, s+\tau, B) &= P(\xi_{t+\tau,x}(s+\tau) \in B) \\ &= P(\xi_{t,x}(s) \in B) = P(t,x,s,B), \end{aligned}$$

这正表明 $\xi(t)$ 是齐次的.

(iii) 今要利用式(2.1.29)验证条件(1.2.31),其中取 $\alpha(t,x) = f(t,x)$, $\beta(t,x) = g(t,x)g^{\mathrm{T}}(t,x)$. 这是定理证明的难点,下面只能给出一个更粗略的推理. 取定 $t \geqslant 0, x \in \mathbf{R}^d$. 对于(1.2.31a)不妨只验证

$$\int_{\mathbf{R}^d} |y-x|^4 P(t,x,t+h,\mathrm{d}y) = o(h), \quad h \downarrow 0,$$

这由以下推理得出

$$\begin{aligned} &\frac{1}{h}\int_{\mathbf{R}^d} |y-x|^4 P(t,x,t+h,\mathrm{d}y) \\ &= \frac{1}{h}\mathrm{E}|\xi_{t,x}(t+h) - \xi_{t,x}(t)|^4 \leqslant (\mathrm{const})h. \quad (\text{用定理 } 2.1.7) \end{aligned}$$

为验证(1.2.31b),设 f, g 连续,则

$$\begin{aligned} &\frac{1}{h}\int_{\mathbf{R}^d} (y-x)P(t,x,t+h,\mathrm{d}y) \\ &= \frac{1}{h}\mathrm{E}[\xi_{t,x}(t+h) - x] \\ &= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \mathrm{E}f(r,x(r))\,\mathrm{d}r \qquad (x(r) = \xi_{t,x}(r)) \\ &= \int_0^1 \mathrm{E}f(t+hr, x(t+hr))\,\mathrm{d}r \to f(t,x), \quad h \downarrow 0. \end{aligned}$$

类似地

$$\begin{aligned} &\frac{1}{h}\int_{\mathbf{R}^d} (y-x)(y-x)^{\mathrm{T}} P(t,x,t+h,\mathrm{d}y) \\ &= \frac{1}{h}\mathrm{E}[(x(t+h)-x)(x(t+h)-x)^{\mathrm{T}}] \quad (x(\cdot) = \xi_{t,x}(\cdot)) \\ &= \frac{1}{h}\mathrm{E}\int_t^{t+h} \mathrm{d}[(x(r)-x)(x(r)-x)^{\mathrm{T}}] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{h} \mathrm{E}\int_t^{t+h} [f(r,x(r))(x(r)-x)^{\mathrm{T}} + (x(r)-x)f^{\mathrm{T}}(r,x(r)) \\
&\quad + g(r,x(r))g^{\mathrm{T}}(r,x(r))]\mathrm{d}r \\
&\to g(t,x)g^{\mathrm{T}}(t,x), \quad h \downarrow 0,
\end{aligned}
$$

这就验证了(1.2.31c). □

2.1.4 Feynman-Kac 公式

SDE 理论的一个颇令人惊异的成果是,某些偏微分方程(PDE)的解可用某个对应的 SDE 的解表示出来,这类表达式就是著名的 **Feynman-Kac 公式**,它们因沟通了 SDE 与 PDE 这两大领域而具有重大意义. 让我们粗略地分析一下,PDE 与 SDE 这样两个看来相距甚远的领域如何能建立起联系. 给定偏微分算子

$$
A = \sum_i f_i(t,x) \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij}(t,x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}. \tag{2.1.30}
$$

假定 A 是一致椭圆的,这意味着 $a(t,x) = [a_{ij}(t,x)]$ 为对称矩阵,且

$$
\mu \triangleq \inf_{t,x} \lambda_{\min}(a(t,x)) > 0. \tag{2.1.31}
$$

当条件(2.1.31)满足时亦可以说 $a(t,x)$ 是一致正定的. 以 $g(t,x)$ 记 $a(t,x)$ 的正平方根,则对照式(2.1.30)与(2.1.11)′看出, $\mathscr{L} \triangleq \partial/\partial t + A$ 正是结合 SDE:

$$
\begin{cases}
\mathrm{d}\xi(s) = f(s,\xi(s))\mathrm{d}s + g(s,\xi(s))\mathrm{d}w(s), & t \leqslant s \leqslant T, \\
\xi(t) = x \in \mathbf{R}^d
\end{cases} \tag{2.1.32}
$$

的微分算子,式(2.1.32)中 $f = (f_1, f_2, \cdots, f_d)^{\mathrm{T}}$, $f_i (1 \leqslant i \leqslant d)$ 依式(2.1.30), w 是一个 d 维标准 Brown 运动. 如同在 2.1.3 节中一样,以 $\xi_{t,x}(s)$ 记方程(2.1.32)的解. 其次设函数 $u(t,x)$ 满足 PDE:

$$
u_t + Au + c(t,x)u = \varphi(x). \tag{2.1.33}
$$

则

$$
\begin{aligned}
u(t,x) &= \mathrm{E}u(s,\xi_{t,x}(s)) - \mathrm{E}u(r,\xi_{t,x}(r)) \Big|_t^s \\
&= \mathrm{E}u(s,\xi_{t,x}(s)) - \mathrm{E}\int_t^s Lu(r,\xi_{t,x}(r))\mathrm{d}r \\
&= \mathrm{E}u(s,\xi_{t,x}(s)) + \mathrm{E}\int_t^s [c(r,\xi_{t,x}(r))u(r,\xi_{t,x}(r)) - \varphi(\xi_{t,x}(r))]\mathrm{d}r.
\end{aligned}
$$

现在已看出,方程(2.1.32)与(2.1.33)的解互有联系是很自然的了. 当然,要建立准确的结果尚需要稍严格的分析. 下面考虑一个例子以作说明.

设 A 依式(2.1.30),考虑 Cauchy 问题:

$$
\begin{cases}
u_t + Au + cu = \varphi(t,x), & (t,x) \in [0,T) \times \mathbf{R}^d, \\
u(T,x) = \psi(x), & x \in \mathbf{R}^d.
\end{cases} \tag{2.1.34}
$$

定理 2.1.11 设以下条件满足:

(i) 函数 $a_{ij}(t,x)$ 与 $f_i(t,x)$ 在 $J\times\mathbf{R}^d$(其中 $J=[0,T]$)上有界且满足局部 Lipschitz 条件；$a_{ij}(t,x)$ 关于 $(t,x)\in J\times\mathbf{R}^d$ 一致地对 x 为 Hölder 连续；$c(t,x)$ 在 $J\times\mathbf{R}^d$ 上有界、局部一致 Hölder 连续.

(ii) $a(t,x)$ 在 $J\times\mathbf{R}^d$ 上满足一致椭圆条件(2.1.31).

(iii) $\varphi(t,x)$ 在 $J\times\mathbf{R}^d$ 上连续，关于 $(t,x)\in J\times\mathbf{R}^d$ 一致地对 x 为 Hölder 连续，$\psi\in C(\mathbf{R}^d)$；存在正常数 $\alpha,\beta>0$，使得

$$|\varphi(t,x)|\vee|\psi(x)|\leqslant\beta(1+|x|^{\alpha}),\quad (t,x)\in J\times\mathbf{R}^d.$$

则 Cauchy 问题(2.1.34)存在唯一解，可表为

$$u(t,x)=\mathrm{E}\left[\psi(\xi_{t,x}(T))\exp\left(\int_t^T c(s,\xi_{t,x}(s))\mathrm{d}s\right)\right]-\mathrm{E}\int_t^T\varphi(s,\xi_{t,x}(s))\exp\left(\int_t^s c(r,\xi_{t,x}(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s,\tag{2.1.35}$$

其中 $\xi_{t,x}(s)$ 是方程(2.1.32)的解.

只说明式(2.1.35)的推导，它是前面分析中所作推演的一个改进：

$$\begin{aligned}
u(t,x)&=\mathrm{E}\left[u(s,\xi_{t,x}(s))\exp\left(\int_t^s c(r,\xi_{t,x}(r))\mathrm{d}r\right)\right]\Bigg|_{s=t}\\
&=\mathrm{E}\left[u(T,\xi_{t,x}(T))\exp\left(\int_t^T c(r,\xi_{t,x}(r))\mathrm{d}r\right)\right]\\
&\quad-\mathrm{E}\int_t^T L\left[u(s,\xi_{t,x}(s))\exp\left(\int_t^s c(r,\xi_{t,x}(r))\mathrm{d}r\right)\right]\mathrm{d}s\\
&=\mathrm{E}\left[\psi(\xi_{t,x}(T))\exp\left(\int_t^T c(r,\xi_{t,x}(r))\mathrm{d}r\right)\right]\\
&\quad-\mathrm{E}\int_t^T[Lu(s,\xi_{t,x}(s))+c(s,\xi_{t,x}(s))u(s,\xi_{t,x}(s))]\\
&\quad\times\exp\left(\int_t^s c(r,\xi_{t,x}(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s\\
&=\mathrm{E}\left[\psi(\xi_{t,x}(T))\exp\left(\int_t^T c(r,\xi_{t,x}(r))\mathrm{d}r\right)\right]\\
&\quad-\mathrm{E}\int_t^T\varphi(s,\xi_{t,x}(s))\exp\left(\int_t^s c(r,\xi_{t,x}(r))\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

现在将公式(2.1.35)用于热传导方程：

$$\begin{cases}u_t+\Delta u=0, & (t,x)\in[0,T]\times\mathbf{R}^d,\\ u(T,x)=\psi(x), & x\in\mathbf{R}^d.\end{cases}\tag{2.1.36}$$

因 $A=\Delta=\sum(\partial/\partial x_i)^2$，故 $a=g=I$；对应于(2.1.36)的 SDE(2.1.32)现在应写成

$$\mathrm{d}\xi(s)=\mathrm{d}w(s)\,(t\leqslant s\leqslant T),\quad \xi(t)=x\in\mathbf{R}^d.$$

于是 $\xi_{t,x}(s) = x + w(s) - w(t)$，因而由公式(2.1.35)得出方程(2.1.36)的解为

$$u(t,x) = \mathrm{E}\psi(x + w(T) - w(t)).$$

§2.2 线性方程

到现在为止，我们尚未明显求出一个 SDE 的解，这无论如何是一件极令人尴尬的事. 但如果考虑到，即使对于 ODE 求出显式解的机会也不多，那么对于求解 SDE 大概不会抱太大希望. 不过，如同在 ODE 理论中一样，至少应试着去求出线性 SDE 的解，而这正是本节的目标. 线性方程的主要优势之一就是在很一般的条件下，任何线性 SDE 的解都可表为某个公式(至于用这样的公式是否能最终求出方程的显式解，则是另一个问题)，这一点部分地决定了线性方程在应用中被最优先考虑. 线性方程的重要性还在于在非线性方程的研究中常常作为辅助工具而起作用，这是后面将经常看到的.

本节内容依如下自然顺序安排：一般情形、特殊情形与具体实例.

2.2.1 一般情形

线性 ODE 的一般形式是

$$dx(t) = [A(t)x(t) + f(t)]dt. \tag{2.2.1}$$

在方程(2.2.1)右端附加一个对 x 为线性的随机干扰项，即得到本节要考虑的线性 SDE：

$$dx(t) = [A(t)x(t) + f(t)]dt + \sum_{k=1}^{m}[B_k(t)x(t) + g_k(t)]dw_k(t). \tag{2.2.2}$$

以下总假定：$J = [t_0, T] \subset \mathbf{R}_+$，$A(\cdot), B_k(\cdot): J \to \mathbf{R}^{d\times d}$ 与 $f(\cdot), g_k(\cdot): J \to \mathbf{R}^d$ $(1 \le k \le m)$ 是**有界** Borel 可测函数，$w = (w_1, w_2, \cdots, w_m)^{\mathrm{T}}$ 是 m 维标准 Brown 运动，$x_0 \in L^2_{\mathscr{F}_{t_0}}(\Omega, \mathbf{R}^d)$. 在以上设定下，$f(t,x) = A(t)x + f(t)$ 与

$$g(t,x) = [B_1(t)x + g_1(t), \cdots, B_m(t)x + g_m(t)]$$

在 $J \times \mathbf{R}^d$ 上满足一致 Lipschitz 条件与线性增长条件(依(2.1.4)，(2.1.5))．于是由定理 2.1.2，方程(2.2.2)有唯一具初值 x_0 的解 $x(t) = x(t, x_0)$，且 $x(t) \in \mathscr{M}^2(J, \mathbf{R}^d)$. 因此，在本节中不必考虑解的存在唯一性问题，而只需致力于求出某种解公式.

求解方程(2.2.2)的基本思想来自线性 ODE 理论. 让我们回顾一下如何求得方程(2.2.1)的解公式. 对应于方程(2.2.1)，可写出一个齐次线性方程

$$dx(t) = A(t)x(t)dt \tag{2.2.3}$$

与一个齐次矩阵方程

$$\mathrm{d}\Phi(t) = A(t)\Phi(t)\mathrm{d}t, \quad \Phi(t_0) = I \in \mathbf{R}^{d\times d}. \tag{2.2.4}$$

方程(2.2.4)有唯一解 $\Phi(t)$，它的诸列构成方程(2.2.3)的一个基本解组，因而称 $\Phi(t)$ 为方程(2.2.3)的**基本矩阵**. 利用 $\Phi(t)$，可将方程(2.2.1)的解 $x(t)$ 表为如下公式：

$$x(t) = \Phi(t)\left[x_0 + \int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)f(s)\mathrm{d}s\right]. \tag{2.2.5}$$

今用类似的方法来构成方程(2.2.2)的解公式. 首先，仿照方程(2.2.3)与(2.2.4)，写出对应于方程(2.2.2)的齐次线性 SDE：

$$\mathrm{d}x(t) = \left[A(t)\mathrm{d}t + \sum_k B_k(t)\mathrm{d}w_k(t)\right]x(t) \tag{2.2.6}$$

与矩阵方程

$$\mathrm{d}\Phi(t) = \left[A(t)\mathrm{d}t + \sum_k B_k(t)\mathrm{d}w_k(t)\right]\Phi(t), \quad \Phi(t_0) = I. \tag{2.2.7}$$

由存在定理 2.1.2，方程(2.2.7)有唯一解 $\Phi(t)$，且 $\Phi(t) \in \mathscr{M}^2(J,\mathbf{R}^{d\times d})$. $\Phi(t)$ 的诸列均为方程(2.2.6)的解，$\Phi(t)$ 也称为方程(6)的**基本矩阵**. 现在自然期待，方程(2.2.2)的解 $x(t)$ 可表为一个类似于(2.2.5)的公式. 实际上，为求得类似于(2.2.5)的公式，可推广线性 ODE 理论中的**常数变易法**. 首先容易看出，对任何常向量 $C \in \mathbf{R}^d$，$x(t) = \Phi(t)C$ 必满足齐次方程(2.2.6). 现在预定 $x(t) = \Phi(t)C$ 是方程(2.2.2)的解，只是 $C = C(t)$ 需"变易"为适当的随机函数. 设定

$$\mathrm{d}C = F\mathrm{d}t + \sum G_k\mathrm{d}w_k, \quad F, G_k (1 \leqslant k \leqslant m)$$

待定. $x = \Phi C$ 满足方程(2.2.2)意味着(下面演算中省去 t)

$$\begin{aligned}
&(Ax+f)\mathrm{d}t + \sum_k (B_k x + g_k)\mathrm{d}w_k \\
&= \mathrm{d}(\Phi C) = \mathrm{d}\Phi \cdot C + \Phi\mathrm{d}C + \mathrm{d}\Phi\mathrm{d}C \qquad (\text{用}(1.3.29)) \\
&= \Big(A\mathrm{d}t + \sum_k B_k\mathrm{d}w_k\Big)\Phi C + \Phi\Big(F\mathrm{d}t + \sum_k G_k\mathrm{d}w_k\Big) \\
&\quad + \Big(A\mathrm{d}t + \sum_k B_k\mathrm{d}w_k\Big)\Phi\Big(F\mathrm{d}t + \sum_k G_k\mathrm{d}w_k\Big) \\
&= \Big(Ax + \Phi F + \sum_k B_k\Phi G_k\Big)\mathrm{d}t + \sum_k (B_k x + \Phi G_k)\mathrm{d}w_k. \qquad (\text{用}(1.3.20))
\end{aligned}$$

比较上式两端得

$$\Phi F + \sum_k B_k\Phi G_k = f, \quad \Phi G_k = g_k, \quad 1 \leqslant k \leqslant m.$$

这就解出

$$G_k = \Phi^{-1}g_k, F = \Phi^{-1}\Big(f - \sum_k B_k g_k\Big).$$

其次有

$$C(t_0) = \Phi(t_0)C(t_0) = x(t_0) = x_0.$$

代入

$$C = C(t_0) + \int_{t_0}^{t} \mathrm{d}C(s)$$

得

$$C = x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\Big[f(s)\mathrm{d}s - \sum_k B_k(s)g_k(s)\mathrm{d}s + \sum_k g_k(s)\mathrm{d}w_k(s)\Big].$$

这就得到方程(2.2.2)的解公式：

$$x(t) = \Phi(t)\Big\{x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\Big[f(s) - \sum_k B_k(s)g_k(s)\Big]\mathrm{d}s + \int_{t_0}^{t} \Phi^{-1}(s)\sum_k g_k(s)\mathrm{d}w_k(s)\Big\}. \tag{2.2.8}$$

当然，以上推导并不严格，准确的结果是：

定理 2.2.1 方程(2.2.7)的解 $\Phi(t)$ 几乎必然有逆矩阵 $\Phi^{-1}(t)$；方程(2.2.2)的解 $x(t)$ 可表为公式(2.2.8).

证 首先假定式(2.2.8)右端有意义，并将其写成 $\Phi(t)C(t)$，则应用 Itô 公式求微分可直接验证 $x(t) = \Phi(t)C(t)$ 满足方程(2.2.2)；计算过程实际上与前面所做的一样，不必重复. 因此，余下的事情只是说明 $\Phi^{-1}(t)$ a. s. 存在且(2.2.8)右端之积分有定义. 这件事做起来有点琐碎，但其思路并不复杂. 关键在于说明 $W(t) \triangleq \det\Phi(t) > 0$, a. s.. 令 $\Phi = [\varphi_{ij}]$, $A = [a_{ij}]$, $B_k = [b_{ij}^k]$（皆省去 t）. $\Phi(t)$ 满足方程(2.2.7)意味着

$$\mathrm{d}\varphi_{ij} = \sum_\alpha a_{i\alpha}\varphi_{\alpha j}\mathrm{d}t + \sum_{k,\alpha} b_{i\alpha}^k\varphi_{\alpha j}\mathrm{d}w_k, \quad 1 \leqslant i,j \leqslant d. \tag{2.2.9}$$

现在求 $\mathrm{d}W$. W 看作其 d 行的函数是 d 重线性的，其结构类似于 d 个因子的连乘积，因而不妨套用对乘积的微分规则（参考(1.3.28)，(1.3.29)）：

$$\mathrm{d}W = \sum_i \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathrm{d}\varphi_{i1} & \mathrm{d}\varphi_{i2} & \cdots & \mathrm{d}\varphi_{id} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} \quad \text{（未写出的行与行列式 } W \text{ 同）}$$

$$+ \sum_{i<\alpha} \begin{vmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathrm{d}\varphi_{i1} & \mathrm{d}\varphi_{i2} & \cdots & \mathrm{d}\varphi_{id} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathrm{d}\varphi_{\alpha1} & \mathrm{d}\varphi_{\alpha2} & \cdots & \mathrm{d}\varphi_{\alpha d} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

$$= W\cdot \mathrm{tr}A\mathrm{d}t + W\sum_k(\mathrm{tr}B_k)\mathrm{d}w_k + \frac{W}{2}\sum_{i,j,k}(b_{ii}^k b_{jj}^k - b_{ij}^k b_{ji}^k)\mathrm{d}t$$

$$= W\Big\{\Big[\mathrm{tr}A + \frac{1}{2}\sum_k((\mathrm{tr}B_k)^2 - \mathrm{tr}(B_kB_k^{\mathrm{T}}))\Big]\mathrm{d}t + \sum_k(\mathrm{tr}B_k)\mathrm{d}w_k\Big\}$$

$$\triangleq W\Big[M\mathrm{d}t+\sum_k(\mathrm{tr}\,B_k)\,\mathrm{d}w_k\Big],$$

这就导出了 W 所满足的齐次线性 SDE. 直接计算易验知

$$\overline{W}(t)=\exp\Big\{\int_{t_0}^t\Big[M(s)-\frac{1}{2}\sum_k(\mathrm{tr}\,B_k(s))^2\Big]\mathrm{d}s+\int_{t_0}^t\sum_k\mathrm{tr}\,B_k(s)\mathrm{d}w_k(s)\Big\}$$

是该方程的解且 $\overline{W}(t_0)=1$. 由解的唯一性得 $W(t)=\overline{W}(t)$, a.s., 因此

$$W(t)=\exp\Big\{\int_{t_0}^t\Big[\mathrm{tr}A(s)-\frac{1}{2}\sum_k|B_k(s)|^2\Big]\mathrm{d}s+\int_{t_0}^t\sum_k(\mathrm{tr}B_k(s))\mathrm{d}w_k(s)\Big\},\text{a. s.}. \tag{2.2.10}$$

由式(2.2.10)看出 $W(t)>0$, a. s. ,因此 $\Phi(t)$ 为 a. s. 可逆. 利用式(2.2.10)及逆矩阵的构造易看出式(2.2.8)右端之积分有意义,于是定理得证. □

仿照 ODE 理论中的术语,称 $W(t)=\det\Phi(t)$ 为**随机 Wronski 行列式**,而称式(2.2.10)为**随机 Liouville 公式**,它首先由 Mao(1983)得到. 若 $B_k(t)\equiv0(1\leqslant k\leqslant m)$, 则式(2.2.10)简化为通常的 Liouville 公式.

在公式(2.2.8)中取 $f(t)\equiv0, g_k(t)\equiv0$, 得到齐次线性方程(2.2.6)的解公式:

$$x(t)=\Phi(t)x_0,\quad x_0=x(t_0)\in L^2_{\mathscr{F}_0}(\Omega,\mathbf{R}^d). \tag{2.2.11}$$

从形式上看,公式(2.2.11)已够简单的了. 但应注意,我们并无计算基本矩阵 $\Phi(t)$ 的一般方法,因而在很大的程度上式(2.2.11)只是一个理论结果.

2.2.2　特殊情形

一般的解公式(2.2.8)无疑是一个令人鼓舞的结果. 但对于公式(2.2.8)的实际运用却并不特别看好. 且不说其中包含了一个尚不知如何求出的基本矩阵 $\Phi(t)$, 即使 $\Phi(t)$ 是已知的,公式(2.2.8)也因其过于复杂而并不便于实际运用. 这就促使我们去考虑那些能使式(2.2.8)有所简化的特殊情况. 齐次方程(2.2.6)当然是这类特殊情况之一. 下面考虑其他几种常见的特殊情况.

(i) **狭义线性方程**. 其一般形式为

$$\mathrm{d}x(t)=[A(t)x(t)+f(t)]\mathrm{d}t+G(t)\mathrm{d}w(t), \tag{2.2.12}$$

其中 $G=[g_1,g_2,\cdots,g_m]$. 这相当于在(2.2.2)中取 $B_k(t)\equiv0(1\leqslant k\leqslant m)$. 在这种情况下,对应于(2.2.12)的齐次方程(2.2.6),(2.2.7)分别与(2.2.3),(2.2.4)一致,因此,基本矩阵 $\Phi(t)$ 与 Wronski 行列式如同在 ODE 理论中一样;解公式(2.2.8)则简化为

$$x(t)=\Phi(t)\Big\{x_0+\int_{t_0}^t\Phi^{-1}(s)[f(s)\mathrm{d}s+G(s)\mathrm{d}w(s)]\Big\}. \tag{2.2.13}$$

为更好地与方程(2.2.1)对照,不妨将方程(2.2.12)改写成

$$dx = A(t)xdt + dv, \quad dv = f(t)dt + G(t)dw(t). \tag{2.2.12$'$}$$

相应地,解公式(2.2.13)可改写成

$$x(t) = \Phi(t)\left[x_0 + \int_{t_0}^{t}\Phi^{-1}(s)dv(s)\right]. \tag{2.2.13$'$}$$

这就得出结论:对于狭义线性方程(2.2.12),可套用 ODE 的解公式(2.2.5),只是将其中的$f(s)ds$ 改换成 $dv(s)$. 明白这一点,对于公式(2.2.13)的记忆与运用都是方便的. 若进而设 $A(t) \equiv A \in \mathbf{R}^{d\times d}$, 则由方程(2.2.4)解出 $\Phi(t) = e^{A(t-t_0)}$, 于是解公式(2.2.13)′成为

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^{t}e^{A(t-s)}dv(s). \tag{2.2.14}$$

（ii）**自治线性方程**. 设 $A, B_k \in \mathbf{R}^{d\times d}(1 \leqslant k \leqslant m)$, 考虑线性方程

$$dx(t) = [Ax(t) + f(t)]dt + \sum_k [B_k x(t) + g_k(t)]dw_k(t). \tag{2.2.15}$$

因$f(\cdot)$ 与 $g_k(\cdot)(1 \leqslant k \leqslant m)$ 不必为常数,(2.2.15)并非完全的自治方程. 但与方程(2.2.15)对应的矩阵方程(2.2.7)则完全成为自治方程

$$d\Phi(t) = \left(Adt + \sum_k B_k dw_k\right)\Phi(t), \quad \Phi(t_0) = I. \tag{2.2.16}$$

这就使得求出基本矩阵 $\Phi(t)$ 的机会显著增加. 例如,若矩阵 $A, B_1, \cdots, B_m$ 两两可换,则可直接验证方程(2.2.16)的解为

$$\Phi(t) = \exp\left[\left(A - \frac{1}{2}\sum_k B_k^2\right)(t - t_0) + \sum_k B_k(w_k(t) - w_k(t_0))\right]. \tag{2.2.17}$$

以此代入式(2.2.8),即得到方程(2.2.15)的解公式,但它过长,此处并无写出之必要. 下面只是写出对应于方程(2.2.15)的齐次方程的解,以便引用.

$$x(t) = \left\{\exp\left[\left(A - \frac{1}{2}\sum_k B_k^2\right)t + \sum_k B_k w_k(t)\right]\right\}x_0. \tag{2.2.18}$$

（iii）**标量线性方程**. 在 $d = 1$ 的情况下,方程(2.2.2)可改写成

$$dx(t) = [a(t)x(t) + f(t)]dt + \sum_k [b_k(t)x(t) + g_k(t)]dw_k(t), \tag{2.2.19}$$

其中 $a(\cdot), f(\cdot), b_k(\cdot), g_k(\cdot)(1 \leqslant k \leqslant m)$ 均为有界实值 Borel 可测函数. 现在,方程(2.2.7)成为(已改 Φ 为 φ)

$$d\varphi(t) = \varphi(t)[a(t)dt + b(t)dw(t)], \quad \varphi(t_0) = 1,$$

其中 $b = (b_1, b_2, \cdots, b_m)$. 这是一个标量齐次线性方程,不难求出其显式解. 实际上,此时有 $W(t) = \varphi(t)$, 因而可用 Liouville 公式(2.2.10):

$$\varphi(t) = \exp\left\{\int_{t_0}^{t}\left[a(s) - \frac{S(s)}{2}\right]ds + \int_{t_0}^{t}b(s)dw(s)\right\}, \tag{2.2.20}$$

其中已设

$$S(s)=|b(s)|^2=\sum_k b_k^2(s). \tag{2.2.21}$$

将公式(2.2.8)用于方程(2.2.19)得出

$$x(t)=\varphi(t)\left\{x_0+\int_{t_0}^t\varphi^{-1}(s)\left[\left(f(s)-\sum_k b_k(s)g_k(s)\right)\mathrm{d}s+\sum_k g_k(s)\mathrm{d}w_k(s)\right]\right\}. \tag{2.2.22}$$

公式(2.2.22)已不算短;若将式(2.2.20)代入,则所得公式更长,以致不便写出.若想得到较简短便用的解公式,尚需考虑更特殊的情况.

首先,对于一维齐次线性方程

$$\mathrm{d}x(t)=x(t)[a(t)\mathrm{d}t+b(t)\mathrm{d}w(t)], \tag{2.2.23}$$

其中 $b=(b_1,b_2,\cdots,b_m)$,结合式(2.2.11)与(2.2.20)得到一个完全的解公式:

$$x(t)=x_0\exp\left\{\int_{t_0}^t\left[a(s)-\frac{S(s)}{2}\right]\mathrm{d}s+\int_{t_0}^t b(s)\mathrm{d}w(s)\right\}, \tag{2.2.24}$$

其中 S 依式(2.2.21).其次考虑一维狭义线性方程

$$\mathrm{d}x(t)=[a(t)x(t)+f(t)]\mathrm{d}t+g(t)\mathrm{d}w(t), \tag{2.2.25}$$

其中 $g=(g_1,g_2,\cdots,g_m)$. 在式(2.2.20)中令 $b(t)\equiv 0$, 得 $\varphi(t)=\exp\int_{t_0}^t a(s)\mathrm{d}s$. 以此代替式(2.2.13)中的 $\Phi(t)$,得到方程(2.2.25)的解公式:

$$x(t)=x_0\mathrm{e}^{\int_{t_0}^t a(s)\mathrm{d}s}+\int_{t_0}^t\mathrm{e}^{\int_s^t a(r)\mathrm{d}r}[f(s)\mathrm{d}s+g(s)\mathrm{d}w(s)]. \tag{2.2.26}$$

若 $a(t)\equiv a,b(t)\equiv b$, 即对于方程

$$\mathrm{d}x(t)=[ax(t)+f(t)]\mathrm{d}t+\sum_k[b_kx(t)+g_k(t)]\mathrm{d}w_k(t), \tag{2.2.27}$$

公式(2.2.20)与(2.2.22)分别成为

$$\varphi(t)=\exp[(a-S/2)(t-t_0)+bw(t)-bw(t_0)], \tag{2.2.28}$$

$$\begin{aligned}x(t)=&\,x_0\exp[(a-S/2)(t-t_0)+bw(t)-bw(t_0)]\\&+\int_{t_0}^t\exp\left[\left(a-\frac{S}{2}\right)(t-s)+bw(t)-bw(s)\right]\\&\times[(f(s)-bg^{\mathrm{T}}(s))\mathrm{d}s+g(s)\mathrm{d}w(s)],\end{aligned} \tag{2.2.29}$$

其中 $S=|b|^2,b=(b_1,b_2,\cdots,b_m),g=(g_1,g_2,\cdots,g_m)$. 特别,对应于方程(2.2.27)的齐次方程与狭义线性方程的解分别为

$$x(t)=x_0\exp[(a-S/2)(t-t_0)+bw(t)-bw(t_0)], \tag{2.2.30}$$

$$x(t) = x_0 e^{a(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} e^{a(t-s)} [f(s)\mathrm{d}s + g(s)\mathrm{d}w(s)]. \qquad (2.2.31)$$

2.2.3 某些例子

下面考虑的线性 SDE 固然很简单,但在历史上曾受到充分注意,它们的解是一些著名的随机过程. 以下 $w(t)$ 记给定的一维标准 Brown 运动.

(i) **Ornstein-Uhlenbeck 过程**. 界定为如下 SDE 的解:

$$\mathrm{d}x(t) = -\alpha x(t)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}w(t), \quad t \geqslant 0. \qquad (2.2.32)$$

方程(2.2.32)称为 **Langevin 方程**,它用于描述摩擦作用下粒子的运动, $x(t)$ 表示粒子速度的某个分量, α,σ 是正常数. 用公式(2.2.31),得方程(2.2.32)的解为

$$x(t) = x_0 e^{-\alpha t} + \sigma \int_0^t e^{\alpha(s-t)} \mathrm{d}w(s). \qquad (2.2.33)$$

直接由(2.2.33)得出 $\mathrm{E}x(t) = e^{-\alpha t}\mathrm{E}x_0$,

$$\mathrm{Var}(x(t)) = e^{-2\alpha t}\mathrm{Var}(x_0) + \frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha t}).$$

注意到式(2.2.33)右端两项独立,而 $\mathrm{Var}(x_0 e^{-\alpha t}) = e^{-2\alpha t}\mathrm{Var}(x_0)$, 故有

$$\sigma \int_0^t e^{\alpha(s-t)} \mathrm{d}w(t) \sim N\left(0, \frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha t})\right).$$

因此,当 $t \to \infty$ 时 $x(t)$ 渐近于正态变量 $N(0,\sigma^2/2\alpha)$. 若以 $y(t)$ 记粒子的位置,则

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 + \int_0^t x(s)\mathrm{d}s \\ &= y_0 + \frac{x_0}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t}) + \frac{\sigma}{\alpha}\int_0^t [1 - e^{\alpha(s-t)}]\mathrm{d}w(s) \\ &= y_0 + \alpha^{-1}[x_0 + \sigma w(t) - x(t)]; \\ \mathrm{E}y(t) &= \mathrm{E}y_0 + \alpha^{-1}(1 - e^{-\alpha t})\mathrm{E}x_0. \end{aligned}$$

对于较(2.2.32)稍一般的方程(其解称为回归均值的 Ornstein-Uhlenbeck 过程)

$$\mathrm{d}x(t) = -\alpha(x(t) - \mu)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}w(t),$$

其中 μ 是常数,只需作代换 $\tilde{x} = x - \mu$, 即可沿用关于方程(2.2.32)的结论.

(ii) **圆周上的 Brown 运动**. 定义为如下二维线性 SDE 的解:

$$\mathrm{d}x(t) = -(1/2)x(t)\mathrm{d}t + Bx(t)\mathrm{d}w(t)\,(t \geqslant 0), \quad x(0) = (1,0)^{\mathrm{T}}, \quad (2.2.34)$$

其中 $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. 注意到 $B^2 = -I$, 用公式(2.2.18)求出

$$x(t) = \exp\left[\left(-\frac{1}{2}I - \frac{1}{2}B^2\right)t + Bw(t)\right]x_0$$

$$= e^{Bw(t)}x_0 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B^n w^n(t)}{n!}x_0$$
$$= [I\cos w(t) + B\sin w(t)]x_0$$
$$= (\cos w(t), \sin w(t))^{\mathrm{T}} = e^{iw(t)}. \tag{2.2.35}$$

(iii) **Brown 桥.** 定义为如下方程的解：

$$dx = \frac{b-x}{1-t}dt + dw(t), \quad 0 \leqslant t < 1, \quad x(0) = a, \tag{2.2.36}$$

其中 a,b 是实常数. 用公式(2.2.26)求得

$$x(t) = a(1-t) + \int_0^t \frac{1-t}{1-s}\Big[\frac{b}{1-s}ds + dw(s)\Big]$$
$$= a(1-t) + bt + \int_0^t \frac{1-t}{1-s}dw(s), \quad 0 \leqslant t < 1. \tag{2.2.37}$$

由式(2.2.37)直接得 $Ex(t) = a(1-t) + bt$，$\mathrm{Var}(x(t)) = t(1-t)$，因此得

$$x(t) \sim N(a(1-t) + bt, t(1-t)).$$

(iv) **几何 Brown 运动.** 界定为一维齐次线性方程

$$dx(t) = x(t)[\alpha dt + \sigma dw(t)] \tag{2.2.38}$$

的非零解，其中 α,σ 是常数，$\sigma > 0$. 由公式(2.2.30)有

$$x(t) = x_0\exp[(\alpha - \sigma^2/2)t + \sigma w(t)], \quad t \geqslant 0. \tag{2.2.39}$$

注意到 $x_0 \in L^2_{\mathcal{F}_0}(\Omega)$ 与 $w(t)(t>0)$ 独立，直接由式(2.2.39)及(1.3.39)求出

$$E|x(t)|^p = E|x_0|^p\exp\Big[pt\Big(\alpha + \frac{\sigma^2}{2}(p-1)\Big)\Big],$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln|x(t)| = \alpha - \frac{\sigma^2}{2}, \text{a.s.}, \quad (\text{用}(1.2.36)) \tag{2.2.40}$$

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\ln E|x(t)|^p = \alpha p + \frac{p(p-1)}{2}\sigma^2. \tag{2.2.41}$$

§2.3　稳　定　性

简单地说，稳定性理论解决这样的问题：一个微分方程的解 $x(t,x_0)$ 在 $t\to\infty$ 时具有什么样的极限状态，以及极限状态如何依赖于初值 x_0? 这一问题的解答关联着方程所描述的发展系统的长期行为，自然为各领域的研究者所关注. 这就毫不奇怪，无论在 ODE 理论中还是在 SDE 理论中，稳定性都是备受关注的中心课题，有关的文献大概占据了微分方程理论的相当大的部分. 在本节中我们要阐明，在 ODE 理论中行之有效的那些稳定性概念与判定方法，在适当改造之后可移用于 SDE. 在这样做时，我们将尽可能形成某些一般的思路，使之对于本书后面将处理的更一般的随机微分方程，亦将起到某种启示作用.

2.3.1 一般概念

给定如下 SDE：

$$dx(t) = f(t,x(t))dt + g(t,x(t))dw(t)(t \geqslant 0), \tag{2.3.1}$$

其中$f: \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$ 与 $g: \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^{d\times m}$ 是 Borel 可测函数，$w = (w_1, w_2, \cdots, w_m)^{\mathrm{T}}$ 是 m 维 Brown 运动. 总假定加于f与 g 的一定条件已保证方程(2.3.1)的初值问题的解 $x(t) = x(t,x_0)$ 唯一地存在，且 $x(t) \in \mathcal{M}^2(\mathbf{R}_+, \mathbf{R}^d)$. 设定初始时间 $t_0 = 0$, 只是为了方便，这显然并不损一般性. 设定

$$f(t,0) \equiv 0, \quad g(t,0) \equiv 0, \quad t \geqslant 0. \tag{2.3.2}$$

因而 $x(t,0) \equiv 0$, 即方程(2.3.1)有**零解**或平凡解，这意味着最初具零状态的系统将永远停留在该状态. 这样，零点是方程(2.3.1)的某种均衡态，亦称为**均衡解**[①].

关于零解的稳定性问题，简单说来就是：

(i) 当 x_0 充分邻近原点时，解 $x(t,x_0)$ 的轨道是否亦充分邻近原点？

(ii) 当 $t \to \infty$ 时，解 $x(t,x_0)$ 是否能依预定速度收敛于零？或是否依预定速度离开原点？

为解决上述问题，首先应给出所提问题的严格表述，这就引出一系列有关稳定性的概念，它们可看作相应的 ODE 概念的随机推广.

下面约定以 B_r 记球 $\{x \in \mathbf{R}^d : |x| < r\}$.

定义 2.3.1 (i) 若 $\forall r > 0, \forall \varepsilon \in (0,1), \exists \delta > 0$, 使得

$$P(x(t,x_0) \in B_r(\forall t \geqslant 0)) \geqslant 1 - \varepsilon, \quad \forall x_0 \in B_\delta, \tag{2.3.3}$$

则称方程(2.3.1)的零解**随机稳定**.

(ii) 设方程(2.3.1)的零解随机稳定(这是前提!). 若 $\forall \varepsilon \in (0,1), \exists \delta > 0$, 使得

$$P\left(\lim_{t\to\infty} x(t,x_0) = 0\right) \geqslant 1 - \varepsilon, \quad \forall x_0 \in B_\delta, \tag{2.3.4}$$

则称方程(2.3.1)的零解**随机渐近稳定**. 若

$$P\left(\lim_{t\to\infty} x(t,x_0) = 0\right) = 1, \quad \forall x_0 \in \mathbf{R}^d, \tag{2.3.5}$$

则称方程(2.3.1)的零解**全局随机渐近稳定**.

(i)与(ii)中定义的稳定性亦合称为**依概率稳定**.

(iii) 若 $\forall x_0 \in \mathbf{R}^d, x(t,x_0)$ 有负 Liapunov 指数，即

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} t^{-1}\ln|x(t,x_0)| < 0, \text{a.s.}, \quad \forall x_0 \in \mathbf{R}^d, \tag{2.3.6}$$

---

① 原则上，当然亦可考虑非零的均衡解，但简单的平移变换即可将任何非零均衡解转化为零解. 因此，限于考虑零均衡解并不失一般性.

则称方程(2.3.1)的零解 **a.s. 指数稳定**;若

$$\underline{\lim}_{t\to\infty} t^{-1}\ln|x(t,x_0)| > 0,\text{a.s.},\quad 0 \neq x_0 \in \mathbf{R}^d, \tag{2.3.7}$$

则称方程(2.3.1)的零解 **a.s. 指数不稳定**.

(iv) 设 $p > 0$. 若 $\forall x_0 \in \mathbf{R}^d$,$x(t,x_0)$ 有负的 p 阶矩 Liapunov 指数,即

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} t^{-1}\ln \mathrm{E}|x(t,x_0)|^p < 0,\quad \forall x_0 \in \mathbf{R}^d, \tag{2.3.8}$$

则称方程(2.3.1)的零解 ***p* 阶矩指数稳定**;若

$$\underline{\lim}_{t\to\infty} t^{-1}\ln \mathrm{E}|x(t,x_0)|^p > 0,\quad 0 \neq x_0 \in \mathbf{R}^d, \tag{2.3.9}$$

则称方程(2.3.1)的零解 p 阶矩指数不稳定. 二阶矩指数稳定(不稳定)亦称为**均方指数稳定**(不稳定).

如果用较直观但稍粗略的语言,那么可将定义 2.3.1 所定义的诸概念解释得更形象些:条件(2.3.3)意味着,起于原点邻近的解,以充分大的概率保持在原点邻近;条件(2.3.4)意味着,起于原点邻近的解,以充分大的概率趋于原点;条件(2.3.5)意味着,起于任何点的解均几乎必然趋于原点;条件(2.3.6)意味着,起于任何点的解均几乎必然指数衰减至零;条件(2.3.7)意味着,任何非零解均几乎必然指数增长至无穷;对于条件(2.3.8)与(2.3.9)可作类似解释. 当条件(2.3.6)满足时, $\forall x_0 \in \mathbf{R}^d$, 有

$$-\gamma \triangleq \overline{\lim_{t\to\infty}} t^{-1}\ln|x(t,x_0)| < 0,\text{a.s.}.$$

但通常 γ 既可能与 $\omega \in \Omega$ 有关,又可能与 x_0 有关. 不过,常用的指数稳定判别法往往能得出强于(2.3.6)的结论:

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} t^{-1}\ln|x(t,x_0)| \leqslant -\gamma,\text{a.s.}, \tag{2.3.6$'$}$$

其中 γ 是与 x_0,ω 无关的正常数;有时甚至可得到更强的

$$|x(t,x_0)| \leqslant c\mathrm{e}^{-\gamma t},\quad t \geqslant 0, \tag{2.3.6$''$}$$

其中 $c > 0$ 与 t 无关(但可能与 x_0,ω 有关),γ 是与 t,x_0,ω 无关的正常数. 在(2.3.6)$'$或(2.3.6)$''$成立时,可以说 $-\gamma$ 是 $x(t,x_0)$ 的 Liapunov 指数的一个上界. 今后谈到 a.s. 指数稳定时,具体确指(2.3.6),(2.3.6)$'$或(2.3.6)$''$中的哪一种理解,我们持一种灵活态度,以适应情况的多样性. 对条件(2.3.7)~(2.3.9)亦可作类似的讨论.

在定义 2.3.1 中限定了 $x_0 \in \mathbf{R}^d$, 而不像在 §2.1 中一样亦容许 $x_0 \in L^2_{\mathscr{F}_0}(\Omega,\mathbf{R}^d)$,这并不失一般性. 例如,设条件(2.3.3)已满足,而现在取 $x_0 \in L^2_{\mathscr{F}_0}(\Omega,\mathbf{R}^d)$, $x_0 \in B_\delta$, a.s.,则(2.3.3)中的不等式亦必对这样的 x_0 满足:设 P_{x_0} 是 x_0 的分布,则

$$P(x(t,x_0) \in B_r) = \int_{|y|<\delta} P(x(t,y) \in B_r)P_{x_0}(\mathrm{d}y) \quad (\text{用}(1.1.51))$$

$$\geqslant (1-\varepsilon)\int_{|y|<\delta} P_{x_0}(\mathrm{d}y) = 1-\varepsilon, \quad \forall t \geqslant 0.$$

对于条件(2.3.4)~(2.3.7)亦可作类似说明. 若已建立

$$\mathrm{E}|x(t,x_0)|^p \leqslant c|x_0|^p \mathrm{e}^{-\gamma t}, \quad \forall x_0 \in \mathbf{R}^d,$$

其中 c,γ 是常数,现在设 $x_0 \in L^p_{\mathscr{F}_0}(\Omega,\mathbf{R}^d)$, 则

$$\mathrm{E}|x(t,x_0)|^p = \int_{\mathbf{R}^d} \mathrm{E}|x(t,y)|^p P_{x_0}(\mathrm{d}y) \qquad (\text{用}(1.1.50))$$

$$\leqslant \int_{\mathbf{R}^d} c|y|^p \mathrm{e}^{-\gamma t} P_{x_0}(\mathrm{d}y) = c\mathrm{E}|x_0|^p \mathrm{e}^{-\gamma t}.$$

类似的论证可说明条件(2.3.8),(2.3.9)中限定 $x_0 \in \mathbf{R}^d$ 亦不失一般性.

直接从定义 2.3.1 看出

a. s. 指数稳定 ⇒ 全局随机渐近稳定 ⇒ 随机渐近稳定 ⇒ 随机稳定.

仅用 ODE 中的例子就可说明,以上蕴涵关系都是不可逆的. 形式上,a. s. 指数稳定与矩指数稳定高度互成对应,但实际上它们之间并无必然联系. 不过,附加一定条件之后,从 p 阶矩指数稳定确能推出 a. s. 指数稳定(参看定理 2.3.7).

定义 2.3.1 还有一个值得指出的重要特点:除了设定 $x(t,x_0)$ 是方程(2.3.1)的解之外,条件(2.3.3)~(2.3.9)的表述并不直接关联方程(2.3.1). 这就使得定义 2.3.1 自动地适用于其他类型的方程,只要这种方程的解唯一地依赖于初值且有零解. 例如第 3 章中考虑的方程就是如此. 以上事实,今后将自动认可而不再作解释.

稳定性理论的任务,就是要开发出某些系统的方法,用以判定条件(2.3.3)~(2.3.9)在什么情况下被满足. 这件事做起来当然不会很容易,此处并无简单的现成答案. 但不妨现在就来初步解释一下,我们将循什么样的思路. 令 $x(t) = x(t, x_0)$, 条件(2.3.3)~(2.3.9)中任一个的验证都依赖于对 $|x(t)|$ 的一定估计,包括轨道估计与矩估计. 直接估计 $|x(t)|$ 通常难以奏效. 一个来自 ODE 理论的基本技巧是:通过将函数 $|x(t)|$ 与某个适当选定的函数 $V(t,x(t))$ 进行比较,可能较易得出所需的估计. 这样的 $V(t,x)$ 就是所谓 **Liapunov 函数**. 我们将看到,基于 Liapunov 函数的方法对于 SDE 如同对于 ODE 一样,仍然十分有效.

下面给出与 Liapunov 函数有关的一些常用术语,它们均直接来自 ODE 理论.

定义 2.3.2 (i) 若 $\varphi \in C(\mathbf{R}_+)$ 为增函数且满足 $0 = \varphi(0) < \varphi(t)(\forall t > 0)$, 则称 φ 为 ***K* 型函数**,其全体记作 $\mathscr{K}$.

(ii) 设 $V(t,x) \in C(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d)$, $V(t,0) \equiv 0$. 若存在 $\varphi \in \mathscr{K}$, 使得

$$V(t,x) \geqslant \varphi(|x|), \quad (t,x) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d. \tag{2.3.10}$$

则称 $V(t,x)$ 是正定的,而称 $-V(t,x)$ 是负定的. 若将不等式(2.3.10)改换成

$$0 \leqslant V(t,x) \leqslant \varphi(|x|), \quad (t,x) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d, \tag{2.3.11}$$

则称 $V(t,x)$ 有任意小上界(或有无限小上界). 若

$$\lim_{|x| \to \infty} \inf_{t \geqslant 0} V(t,x) = \infty, \tag{2.3.12}$$

则称 $V(t,x)$ **径向无界**.

K 型函数甚为普遍,例如 $t^p(p>0), t \wedge 1, t/(1+t), \ln(1+t)$ 等均是. 通常尽可能使用最简单的函数 $\varphi(t) = t^p(p>0)$. 满足条件(2.3.10) ~ (2.3.12)的函数 $V(t,x)$ 甚多,但恰好适应于所考虑的稳定性问题的函数则常常不易寻找,需要相当的经验与技巧去构造. 值得特别提到的一种简单选择是取

$$V(t,x) = (x^{\mathrm{T}}Qx)^{p/2}, \quad x \in \mathbf{R}^d, \tag{2.3.13}$$

其中 $Q \in \mathbf{R}^{d \times d}$ 是正定矩阵, $p > 0$. 由明显的不等式

$$\lambda_{\min}(Q)|x|^2 \leqslant x^{\mathrm{T}}Qx \leqslant \lambda_{\max}(Q)|x|^2$$

看出,依式(2.3.13)定义的函数 V 满足条件(2.3.10) ~ (2.3.12). 分别取 $Q = I$ 与 $p = 2$, 得到(2.3.13)的两种常用的特例: $V = |x|^p$ 与 $V = x^{\mathrm{T}}Qx$. 这类不显含 t 的 Liapunov 函数因其较简单而常常被优先考虑,对于自治方程尤其如此. 但对于较精细的讨论,显含 t 的 Liapunov 函数仍然是必要的. 两种最简单的选择是

$$V_1(t,x) = |x|^p\varphi(t) \text{ 与 } V_2(t,x) = |x|^p + \varphi(t),$$

其中 $p > 0, \varphi(\cdot) \in C^1(\mathbf{R}_+)$. 若存在常数 α, β, 使得 $0 < \alpha \leqslant \varphi(t) \leqslant \beta (t \geqslant 0)$, 则 $V_1(t,x)$ 满足条件(2.3.10) ~ (2.3.12),且显然

$$\mathscr{L}V_1(t,x) = |x|^p\varphi'(t) + \varphi(t)\mathscr{L}|x|^p.$$

若 $\varphi(t) \geqslant 0(\forall t \geqslant 0)$, 则 $V_2(t,x)$ 满足条件(2.3.10),(2.3.12),且

$$\mathscr{L}V_2(t,x) = \varphi'(t) + \mathscr{L}|x|^p.$$

如上两类 Liapunov 函数,今后都有使用的机会.

现在重点分析一下如何借助于函数 $V(t,x)$ 来判定解的收敛性. 设条件(2.3.10)满足,则判定 $|x(t)| \to 0$ 归于判定 $V(t,x(t)) \to 0(t \to \infty)$;若 $x(t)$ 是 ODE(2.1.1)的解,后者通常依赖于验明

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(t,x(t)) = V_t(t,x(t)) + V_x(t,x(t))f(t,x(t)) < 0, \tag{2.3.14}$$

即 $V(t,x(t))$ 对 t 严格单调下降;式(2.3.14)左端称为 $V(t,x)$ 沿方程(2.1.1)的解 $x(t)$ 的导数. 在 SDE 理论中,与式(2.3.14)相当的条件是 $LV(t,x(t)) < 0$. 依(1.3.23)有

$$\mathrm{E}V(r,x(r))\big|_s^t = \mathrm{E}\int_s^t LV(r,x(r))\,\mathrm{d}r, \quad 0 \leqslant s < t < \infty. \tag{2.3.15}$$

可见条件 $LV(t,x(t)) < 0$ 推出 $\mathrm{E}V(t,x(t))$ 对 t 严格单调下降. 这样,类似于(2.3.14)中的 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}V(t,x(t))$, $LV(t,x(t))$ 可看作函数 $V(t,x)$ 沿方程(2.3.1)的解

$x(t)$ 的某种"导数". 这就不难理解,在 SDE 的稳定性理论中,关于 $\mathscr{L}V(t,x)$ 的适当不等式条件将起重要作用.

本节所建立的各种稳定性判别法,将首先用于线性方程(依(2.2.6))

$$\mathrm{d}x(t) = \left[A\mathrm{d}t + \sum_k B_k \mathrm{d}w_k\right]x(t), \tag{2.3.16}$$

以检验其有效性,这种检验当然并不充分,但无疑是基本的. 下面导出几个相关的公式以备应用. 令

$$f(t,x) = Ax, \quad g(t,x) = [B_1 x, \cdots, B_m x].$$

取 $V = (x^{\mathrm{T}}Qx)^{p/2}$, Q 是正定矩阵, $p > 0$, 则依(1.3.33)有

$$\mathscr{L}V(x) = \frac{p}{2}(x^{\mathrm{T}}Qx)^{\frac{p}{2}-1}\left[2x^{\mathrm{T}}QAx + \sum_k x^{\mathrm{T}}B_k^{\mathrm{T}}QB_k x + (p-2)\sum_k \frac{(x^{\mathrm{T}}QB_k x)^2}{x^{\mathrm{T}}Qx}\right]. \tag{2.3.17}$$

特别,取 $V = x^{\mathrm{T}}Qx$ 得

$$\mathscr{L}V(x) = x^{\mathrm{T}}Mx, \quad M = QA + A^{\mathrm{T}}Q + \sum_k B_k^{\mathrm{T}}QB_k. \tag{2.3.18}$$

取 $V = |x|^p$ 得

$$\begin{cases} \mathscr{L}V(x) = \dfrac{p}{2}|x|^{p-2}\left[2x^{\mathrm{T}}Ax + \sum_k |B_k x|^2 + (p-2)|x|^{-2}\sum_k (x^{\mathrm{T}}B_k x)^2\right] \\ \qquad \leqslant (p/2)|x|^{p-2}x^{\mathrm{T}}Mx, \\ M = A + A^{\mathrm{T}} + (1 + |p-2|)S, \qquad S = \sum_k B_k^{\mathrm{T}}B_k. \end{cases} \tag{2.3.19}$$

取 $V = |x|^2$ 得

$$\mathscr{L}V(x) = x^{\mathrm{T}}Mx, \quad M = A + A^{\mathrm{T}} + S. \tag{2.3.20}$$

以上公式在本节中将反复使用,且此处约定的记号将一直保持有效.

作了上述准备之后,下面依次考虑各种稳定性,即矩指数稳定,a. s. 指数稳定与依概率稳定.

2.3.2 矩指数稳定

给定 $p > 0$. 为得到 p 阶矩指数稳定(或不稳定)的结论,常不免要估计解的矩 $\mathrm{E}|x(t,x_0)|^p$,而这通常依赖于估计 $\mathrm{E}V(t,x(t))$, $V(t,x)$ 是某个适当选定的 Liapunov 函数.

定理 2.3.3 设存在 $V(t,x) \in C^{1,2}(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d)$ 与正常数 c_1, c_2,使得

$$c_1|x|^p \leqslant V(t,x) \leqslant c_2|x|^p, \quad t \geqslant 0, x \in \mathbf{R}^d. \tag{2.3.21}$$

(i) 若存在正常数 γ,使得

$$\mathscr{L}V(t,x) \leqslant -\gamma V(t,x), \quad t \geqslant 0, x \in \mathbf{R}^d, \tag{2.3.22a}$$

则方程(2.3.1)的零解 p 阶矩指数稳定,且成立

$$\mathrm{E}|x(t,x_0)|^p \leqslant (c_2/c_1)|x_0|^p \mathrm{e}^{-\gamma t}, \quad t \geqslant 0, x_0 \in \mathbf{R}^d. \tag{2.3.23a}$$

(ii) 若存在正常数 γ,使得

$$\mathscr{L}V(t,x) \geqslant \gamma V(t,x), \quad t \geqslant 0, x \in \mathbf{R}^d, \tag{2.3.22b}$$

则方程(2.3.1)的零解 p 阶矩指数不稳定,且成立

$$\mathrm{E}|x(t,x_0)|^p \geqslant (c_1/c_2)|x_0|^p \mathrm{e}^{\gamma t}, \quad t \geqslant 0, x_0 \in \mathbf{R}^d. \tag{2.3.23b}$$

证　(i) 对 $x(t) = x(t,x_0)$,只需证 $h(t) \triangleq \mathrm{e}^{\gamma t}\mathrm{E}|x(t)|^p \leqslant (c_2/c_1)|x_0|^p$. 因

$$\begin{aligned} c_1\mathrm{e}^{\gamma t}|x(t)|^p &\leqslant \mathrm{e}^{\gamma t}V(t,x(t)) = V(0,x_0) + \int_0^t \mathrm{d}[\mathrm{e}^{\gamma s}V(s,x(s))] \\ &\leqslant c_2|x_0|^p + \int_0^t \mathrm{e}^{\gamma s}[LV(s,x(s)) + \gamma V(s,x(s))]\mathrm{d}s + M(t) \\ &\leqslant c_2|x_0|^p + M(t), \end{aligned}$$

其中 $M(t)$ 是连续局部鞅, $M(0) = 0$,故由定理1.2.11(iii)有 $c_1 h(t) \leqslant c_2|x_0|^p$, 如所要证.

(ii)的证明是类似的(用定理1.2.11(iv)). □

若取 $V = (x^{\mathrm{T}}Qx)^{p/2}, Q \in \mathbf{R}^{d\times d}$ 为正定矩阵,则易见条件(2.3.21)满足. 条件(2.3.22a)与(2.3.22b)分别相当于 $\alpha \triangleq \mathscr{L}V/V$ 有负上界与有正下界. 依(1.3.33)有

$$\alpha = \frac{p}{2}\frac{2x^{\mathrm{T}}Qf + \mathrm{tr}(g^{\mathrm{T}}Qg)}{x^{\mathrm{T}}Qx} + \frac{p(p-2)}{2}\frac{|x^{\mathrm{T}}Qg|^2}{(x^{\mathrm{T}}Qx)^2}.$$

若有常数 $\alpha_i (0 \leqslant i \leqslant 3)$,使得

$$\alpha_0 \leqslant \frac{2x^{\mathrm{T}}Qf + \mathrm{tr}(g^{\mathrm{T}}Qg)}{2x^{\mathrm{T}}Qx} \leqslant \alpha_1, \quad 0 \leqslant \alpha_2 \leqslant \frac{|x^{\mathrm{T}}Qg|}{x^{\mathrm{T}}Qx} \leqslant \alpha_3, \tag{2.3.24}$$

则易得出

$$2\alpha \leqslant \begin{cases} p[2\alpha_1 + (p-2)\alpha_3^2], & p \geqslant 2, \\ p[2\alpha_1 + (p-2)\alpha_2^2], & 0 < p < 2, \end{cases}$$

$$2\alpha \geqslant \begin{cases} p[2\alpha_0 + (p-2)\alpha_2^2], & p \geqslant 2, \\ p[2\alpha_0 + (p-2)\alpha_3^2], & 0 < p < 2. \end{cases}$$

利用以上不等式立即从定理2.3.3得到

推论2.3.4　设 $p > 0$, 存在正定矩阵 Q 使条件(2.3.24)满足. 若

$$2\alpha_1 < \alpha_2^2(2-p)^+ - \alpha_3^2(p-2)^+,$$

则方程(2.3.1)的零解 p 阶矩指数稳定;若

$$2\alpha_0 > \alpha_3^2(2-p)^+ - \alpha_2^2(p-2)^+,$$

则方程(2.3.1)的零解 p 阶矩指数不稳定.

应用推论 2.3.4 的困难在于,未必容易得到使条件(2.3.24)满足的常数 α_i.

例 2.3.5 考虑线性方程(2.3.16). 令 $V = |x|^p$, 用式(2.3.19)得

$$\alpha = \frac{\mathscr{L}V}{V} \leqslant \frac{px^{\mathrm{T}}Mx}{2|x|^2}, \quad M = A + A^{\mathrm{T}} + (1 + |p-2|)S, \quad p > 0,$$

$$\alpha \geqslant \frac{px^{\mathrm{T}}Nx}{2|x|^2}, \quad N = A + A^{\mathrm{T}} + (p-1)S, \quad 0 < p \leqslant 2,$$

其中 $S = \sum B_k^{\mathrm{T}}B_k$. 于是应用定理 2.3.3 得出结论:若 M 负定,则方程(2.3.16)的零解 p 阶矩指数稳定;若 $0 < p \leqslant 2$, 矩阵 N 正定,则方程(2.3.16)的零解 p 阶矩指数不稳定. 若取 $p = 2$,则从 $A + A^{\mathrm{T}} + S$ 负定与正定分别推出方程(2.3.16)的零解均方指数稳定与不稳定. 这样,对于线性方程(2.3.16)的矩稳定性判定,仅用线性代数方法就够了.

特别,将上述结论应用于方程(2.3.16)的特例

$$\mathrm{d}x(t) = Ax(t)\mathrm{d}t + Bx(t)\mathrm{d}w(t) \tag{2.3.25}$$

得出:由矩阵 $A + A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}B$ 负定与正定分别推出方程(2.3.25)的零解均方指数稳定与不稳定.

例 2.3.6 考虑一维线性方程

$$\mathrm{d}x(t) = x(t)\left[a(t)\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{m} b_k(t)\mathrm{d}w_k(t)\right]. \tag{2.3.26}$$

令 $V = |x|^p$, 利用(1.3.35)易算出

$$\mathscr{L}V/V = p[2a(t) + (p-1)S(t)], \quad S(t) = \sum_k b_k^2(t).$$

于是应用定理 2.3.3 得出:方程(2.3.26)的零解为 p 阶矩指数稳定与不稳定分别由以下条件推出

$$\sup_{t\geqslant 0}[2a(t) + (p-1)S(t)] < 0, \tag{2.3.27a}$$

$$\inf_{t\geqslant 0}[2a(t) + (p-1)S(t)] > 0. \tag{2.3.27b}$$

若 $a(t) \equiv a, S(t) \equiv S$, 则以上条件简化为

$$2a < (1-p)S, \tag{2.3.28a}$$

$$2a > (1-p)S. \tag{2.3.28b}$$

因条件(2.3.28a)与(2.3.28b)几乎是互补的,可见将定理 2.3.3 应用于一维自治线性方程能得出最好的结论. 至于应用条件(2.3.27)的效果,可作如下检验. 结合(2.2.24)与(1.3.38)求出

$$\mathrm{E}|x(t,x_0)|^p = |x_0|^p \exp\int_0^t \left[pa(s) + \frac{p(p-1)}{2}S(s)\right]\mathrm{d}s,$$

$$\frac{\ln \mathrm{E}|x(t,x_0)|^p}{t}=\frac{\ln|x_0|^p}{t}+\frac{p}{2t}\int_0^t[2a(s)+(p-1)S(s)]\mathrm{d}s.$$

由此看出，方程(2.3.26)的零解 p 阶矩指数稳定与不稳定的充要条件分别为

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\int_0^t[2a(s)+(p-1)S(s)]\mathrm{d}s<0, \tag{2.3.29a}$$

$$\underline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\int_0^t[2a(s)+(p-1)S(s)]\mathrm{d}s>0. \tag{2.3.29b}$$

显然，条件(2.3.27a)与(2.3.27b)分别推出条件(2.3.29a)与(2.3.29b)，而反向推理则一般不可行，除非 $a(t)$ 与 $S(t)$ 为常数.

2.3.3　几乎必然指数稳定

与矩指数稳定性不同，a.s. 指数稳定性是一种轨道稳定性，它依赖于解的轨道估计，这件事通常更困难些. 判定 a.s. 指数稳定的常用方法有三种：直接从矩指数稳定过渡到 a.s. 指数稳定；利用基于指数鞅不等式的轨道估计；利用基于定理 1.2.11(iii)的轨道估计. 这些方法在轨道稳定性的进一步研究中均起基本作用. 本小节只用到前两种方法. 首先，直接从定理 2.1.8(ii)推出

定理 2.3.7　设存在正常数 K，使得以下条件(即(2.1.23))满足：

$$|x^{\mathrm{T}}f(t,x)|\vee|g(t,x)|^2\leqslant K|x|^2,\quad t\geqslant 0,x\in\mathbf{R}^d. \tag{2.3.30}$$

若方程(2.3.1)的一个解 $x(t)$ 满足

$$\mathrm{E}|x(t)|^p\leqslant c\mathrm{e}^{-\gamma t},\quad t\geqslant 0,$$

其中 $p,c,\gamma>0$ 与 t 无关，则成立

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\,t^{-1}\ln|x(t)|^p\leqslant-\gamma,\text{a.s.}.$$

因此，条件(2.3.21)，(2.3.22a)与(2.3.30)一起推出方程(2.3.1)的零解 a.s. 指数稳定.

显然，条件(2.3.30)可代以更强的线性增长条件：

$$|f(t,x)|\vee|g(t,x)|\leqslant K|x|.\quad t\geqslant 0,x\in\mathbf{R}^d. \tag{2.3.30$'$}$$

下面转向运用指数鞅不等式. 因此时要用到式子 $LV(t,x(t))/V(t,x(t))$，故有必要排除 $x(t)=0$ 的情况.

引理 2.3.8　设条件(2.3.30)′满足；$0\neq x_0\in\mathbf{R}^d$，$x(t)=x(t,x_0)$，则

$$P(x(t)\neq 0(\forall t\geqslant 0))=1.$$

证　令 $\tau=\inf\{t\geqslant 0:x(t)=0\}$，只要证 $P(\tau<\infty)=0$. 反设 $P(\tau<\infty)>0$，则必有 $T>0$ 使 $P(\tau\leqslant T)>0$. 这又推出存在 $\gamma>1$，使得

$$P(A)>0,\quad A=\{\tau\leqslant T,\text{在}[0,\tau]\text{上}|x(t)|\leqslant\gamma-1\}.$$

当 $0\leqslant t\leqslant T$，$0<|x|\leqslant\gamma$ 时有

$$\mathscr{L}|x|^{-1}=-\frac{2x^{\mathrm{T}}f(t,x)+|g(t,x)|^2}{2|x|^3}+\frac{|x^{\mathrm{T}}g(t,x)|^2}{2|x|^5}\ (\text{用}(1.3.35))$$

$$\leqslant |x|^{-2}|f(t,x)|+|x|^{-3}|g(t,x)|^2 \leqslant \beta |x|^{-1}, \qquad (\text{用}(2.3.30)')$$

其中 $\beta = K + K^2$. $\forall \varepsilon \in (0,|x_0|)$,令 $\tau_\varepsilon = \inf\{t \geqslant 0 : |x(t)| \in (\varepsilon,\gamma)\}$,则

$$P(A)\mathrm{e}^{-\beta T} \leqslant \mathrm{E}[\varepsilon \mathrm{e}^{-\beta(T\wedge\tau_\varepsilon)}|x(T\wedge\tau_\varepsilon)|^{-1}] \qquad (\text{在 } A \text{ 上 } \tau_\varepsilon \leqslant T)$$

$$= \varepsilon |x_0|^{-1} + \varepsilon \mathrm{E}\int_0^{T\wedge\tau_\varepsilon} L[\mathrm{e}^{-\beta s}|x(s)|^{-1}]\mathrm{d}s$$

$$= \varepsilon |x_0|^{-1} + \varepsilon \mathrm{E}\int_0^{T\wedge\tau_\varepsilon} \mathrm{e}^{-\beta s}[L|x(s)|^{-1} - \beta |x(s)|^{-1}]\mathrm{d}s$$

$$\leqslant \varepsilon |x_0|^{-1},$$

得出 $P(A) \leqslant \varepsilon\, \mathrm{e}^{\beta T}|x_0|^{-1}$. 令 $\varepsilon \to 0$ 得 $P(A) = 0$, 得出矛盾. □

对于 $V(t,x) \in C^{1,2}(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d)$, 约定记号

$$\alpha(t,x) = \frac{\mathscr{L}V(t,x)}{V(t,x)}, \quad \beta(t,x) = \frac{|Z|^2}{2}, \quad Z = \frac{V_x(t,x)g(t,x)}{V(t,x)}. \qquad (2.3.31)$$

当不致误解时,也写作 $\alpha = \alpha(t,x)$, $\beta = \beta(t,x)$. 这些记号可带来明显的简化. 例如,条件(2.3.22a) 与(2.3.22b) 可分别写成 $\alpha \leqslant -\gamma$ 与 $\alpha \geqslant \gamma$;而由(1.3.37)有

$$\mathscr{L}\ln V(t,x) = \alpha(t,x) - \beta(t,x). \qquad (2.3.32)$$

约定 $\underline{\alpha} = \inf \alpha(t,x)$, $\bar{\alpha} = \sup \alpha(t,x)$, inf 与 sup 是在 $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d$ 上取的; $\underline{\beta}$ 与 $\bar{\beta}$ 仿此. 注意 α,β 既与函数 V 有关,又与方程(2.3.1) 有关; β 与 f 无关且总有 $\beta \geqslant 0$.

定理 2.3.9 设条件(2.3.30)′满足. $0 \neq x_0 \in \mathbf{R}^d$, $x(t) = x(t,x_0)$.

(i) 设存在 $V(t,x) \in C^{1,2}(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d)$ 与正常数 c,p 与 $\gamma \in \mathbf{R}$,使得

$$c|x|^p \leqslant V(t,x), \quad t \geqslant 0, \quad x \in \mathbf{R}^d, \qquad (2.3.33\text{a})$$

$$\bar{\beta} < \infty, \quad \alpha(t,x) - \beta(t,x) \leqslant -\gamma, \quad t \geqslant 0, \quad x \in \mathbf{R}^d. \qquad (2.3.34\text{a})$$

则

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\, t^{-1}\ln|x(t)|^p \leqslant -\gamma, \text{a. s.} . \qquad (2.3.35\text{a})$$

因此,当 $\gamma > 0$ 时 方程(2.3.1)的零解 a. s. 指数稳定. 条件(2.3.34a)可代以条件 $\bar{\alpha} \leqslant -\gamma$.

(ii) 设存在 $V(t,x) \in C^{1,2}(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d)$ 与正常数 c,p 与 $\gamma \in \mathbf{R}$, 使得

$$0 < V(t,x) \leqslant c|x|^p, \quad t \geqslant 0, 0 \neq x \in \mathbf{R}^d, \qquad (2.3.33\text{b})$$

$$\bar{\beta} < \infty, \quad \alpha(t,x) - \beta(t,x) \geqslant \gamma, \quad t \geqslant 0, x \in \mathbf{R}^d. \qquad (2.3.34\text{b})$$

则

$$\underline{\lim_{t\to\infty}}\, t^{-1}\ln|x(t)|^p \geqslant \gamma, \text{a. s.} . \qquad (2.3.35\text{b})$$

因此,当 $\gamma > 0$ 时方程(2.3.1)的零解 a. s. 指数不稳定.

证 (i) 由引理2.3.8 与(2.3.33a)不妨设 $V(t,x(t)) > 0$. 结合式 (2.3.33a)与(2.3.32)有

$$\ln[c|x(t)|^p] \leqslant \ln V(0,x_0) + \int_0^t [\alpha(s,x(s)) - \beta(s,x(s))]\mathrm{d}s + M(t)$$
$$\leqslant \ln V(0,x_0) - \gamma t + M(t), \quad (\text{用}(2.3.34\text{a})) \quad (2.3.36\text{a})$$

其中 $M(t) = \int_0^t Z(s)\mathrm{d}w(s)$，$Z$ 依式(2.3.31). 由指数鞅不等式，$\forall n \in \mathbf{N}, \delta \in (0,1)$，有

$$P\Big(\sup_{0\leqslant t\leqslant n+1}\Big[M(t) - \frac{\delta}{2}\int_0^t |Z(s)|^2\mathrm{d}s\Big] \geqslant \frac{2\ln n}{\delta}\Big) \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

于是由 Borel-Cantelli 引理得：a. s. 地，当 n 充分大，$n \leqslant t \leqslant n+1$ 时有

$$M(t) \leqslant \delta\int_0^t \beta(s,x(s))\mathrm{d}s + \frac{2\ln n}{\delta} \leqslant \delta\bar{\beta}t + \frac{2\ln t}{\delta}.$$

将以上不等式代入式(2.3.36a)得：a. s. 地，当 t 充分大时有

$$\frac{\ln[c|x(t)|^p]}{t} \leqslant \frac{\ln V(0,x_0)}{t} - \gamma + \bar{\beta}\delta + \frac{2\ln t}{\delta t}.$$

令 $t\to\infty$，然后令 $\delta\to 0$，即得式(2.3.35a). 若以 $\bar{\alpha} \leqslant -\gamma$ 取代条件(2.3.34a)，则 a. s. 地，当 t 充分大时有

$$\ln[c|x(t)|^p] \leqslant \ln V(0,x_0) + \int_0^t \alpha(s,x(s))\mathrm{d}s + \frac{2\ln t}{\delta}$$
$$\leqslant \ln V(0,x_0) + \bar{\alpha}t + 2\delta^{-1}\ln t,$$

这同样得出式(2.3.35a).

(ii) 类似于式(2.3.36a)，利用条件(2.3.33b)与(2.3.34b)可得

$$\ln[c|x(t)|^p] \geqslant \ln V(0,x_0) + \gamma t + M(t), \qquad (2.3.36\text{b})$$

其中 $M(t)$ 如(i)之证. 由 $\bar{\beta} < \infty$ 推出 $Z \in \mathscr{M}^2(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^{1\times m})$，因此 $M(t)$ 是一个连续鞅，且 $\langle M(t), M(t)\rangle \leqslant 2\bar{\beta}\, t$（定理 1.3.2(iv)），故可用大数定律(1.2.10(ii))得 $t^{-1}M(t) \to 0$, a. s. $(t\to\infty)$. 于是式(2.3.36b) 推出式(2.3.35b). □

一般来说，条件(2.3.34a)弱于条件 $\bar{\alpha} \leqslant -\gamma$. 不过，$\beta(t,x)$ 通常比 $\alpha(t,x)$ 更难估计，因此仅当对 $\beta(t,x)$ 便于估计时才能充分利用(2.3.34a)这个较弱条件的好处.

例 2.3.10 继续考虑线性方程(2.3.16). 取 $V = |x|^2$，则依式(2.3.20)与(2.3.31)有

$$\alpha = |x|^{-2}x^{\mathrm{T}}Mx, \quad \beta = 2|x|^{-4}\sum_k (x^{\mathrm{T}}B_kx)^2,$$

其中 $M = A + A^{\mathrm{T}} + S$，$S = \sum B_k^{\mathrm{T}}B_k$. 显然 $\bar{\beta} < \infty$. 如已预料到的，β 比 α 更难估计，以下结论未必很理想但不失为有用：

$$(x^{\mathrm{T}}B_kx)^2 \leqslant |x|^2\mathrm{tr}(B_kxx^{\mathrm{T}}B_k^{\mathrm{T}}) = |x|^2x^{\mathrm{T}}B_k^{\mathrm{T}}B_kx,$$
$$(x^{\mathrm{T}}B_kx)^2 \geqslant |x|^4\lambda_{\min}(B_k^2), \quad \text{若 } B_k \text{ 半正定}.$$

利用以上估计得

$$2\sum_k \lambda_{\min}(B_k^2) \leqslant \beta \leqslant 2|x|^{-2}x^{\mathrm{T}}Sx, \quad x \in \mathbf{R}^d, \tag{2.3.37}$$

但其中第一个不等号要求 B_k 均为半正定矩阵. 利用以上事实,从定理 2.3.9 得出结论:若 M 负定,或者 $B_k(1 \leqslant k \leqslant m)$ 均半正定,

$$\lambda_{\max}\left(A + A^{\mathrm{T}} + \sum_k B_k^2\right) < 2\sum_k \lambda_{\min}(B_k^2), \tag{2.3.38}$$

则方程(2.3.16)的零解 a.s. 指数稳定;若 $A + A^{\mathrm{T}} - S$ 正定,则方程(2.3.16)的零解 a.s. 指数不稳定. 将以上结论用到方程(2.3.25)得:方程(2.3.25)的零解 a.s. 指数稳定的充分条件是 $A + A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}B$ 负定,或者 B 半正定且

$$\lambda_{\max}(A + A^{\mathrm{T}} + B^2) < \lambda_{\min}(2B^2). \tag{2.3.39}$$

若 $A + A^{\mathrm{T}} - B^{\mathrm{T}}B$ 正定,则方程(2.3.25) 的零解 a.s. 指数不稳定.

以上条件不失为简洁,但未必很精细. 问题在于,Liapunov 函数 $V = |x|^2$ 未免过于一般化了. 若选择适当的正定矩阵 Q,取 $V = x^{\mathrm{T}}Qx$,可能得出较好的结果. 令 $M = QA + A^{\mathrm{T}}Q + B^{\mathrm{T}}QB$, 则对方程(2.3.25)有

$$\alpha = \frac{x^{\mathrm{T}}Mx}{x^{\mathrm{T}}Qx} \leqslant \frac{\lambda_{\max}(M)}{\lambda_{\min}(Q)}.$$

可见当 M 负定时 $\bar{\alpha} < 0$,从而方程(2.3.25) 的零解 a.s. 指数稳定. 例如,设

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},$$

则 $M = QA + A^{\mathrm{T}}Q + B^{\mathrm{T}}QB = -I$ 负定,因而方程(2.3.25) 的零解 a.s. 指数稳定. 但若改令 $Q = I$,则 $M = A + A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}B = \mathrm{diag}(1, -1)$, 这就得不出什么结论.

例 2.3.11 对于一维线性方程(2.3.26),取 $V = x^2$, 则

$$\alpha - \beta = 2a(t) - S(t), \quad S(t) = \sum_k b_k^2(t).$$

假定 $\bar{\beta} = \sup_{t\geqslant 0}2S(t) < \infty$,则从定理 2.3.9 推出:方程(2.3.26) 的零解 a.s. 指数稳定与不稳定的充分条件分别为

$$\sup_{t\geqslant 0}[2a(t) - S(t)] < 0, \tag{2.3.40a}$$

$$\inf_{t\geqslant 0}[2a(t) - S(t)] > 0. \tag{2.3.40b}$$

注意(2.3.27a)$\Rightarrow$(2.3.40a),(2.3.40b)$\Rightarrow$(2.3.27b). 这表明与矩指数稳定比较,a.s. 指数稳定只需较弱的条件. 从定理 2.3.7 看来,这是合理的. 若 $a(t) \equiv a$, $S(t) \equiv S$,则条件(2.3.40a) 与(2.3.40b) 分别简化为

$$2a < S, \tag{2.3.41a}$$

$$2a > S. \tag{2.3.41b}$$

比较条件(2.3.28)与(2.3.41)看出,若 $(1-p)S < 2a < S$,则方程(2.3.26) 的零解 a.s. 指数稳定但 p 阶矩指数不稳定. 这就表明,a.s. 指数稳定可能严格地弱于矩

指数稳定.

如同考虑矩稳定性一样,亦可通过解公式直接得出方程(2.3.26)零解 a.s. 指数稳定的条件. 任给 $0 \neq x_0 \in \mathbf{R}$,设 $x(t,x_0)$ 是方程(2.3.26) 的解,则由(2.2.24)易得

$$\frac{\ln|x(t,x_0)|}{t} = \frac{\ln|x_0|}{t} + \frac{1}{2t}\int_0^t [2a(s) - S(s)]\mathrm{d}s + \frac{M(t)}{t}, \quad (2.3.42)$$

其中 $M(t) = \int_0^t \sum_k b_k(s)\mathrm{d}w_k(s)$ 是一个连续鞅,因而当 $S(t)$ 有界时 $t^{-1}M(t) \to 0$, a.s. ($t \to \infty$,参考定理2.3.9(ii) 之证明). 于是由式(2.3.42)得:若 $S(t)$ 有界,则方程(2.3.26) 的零解 a.s. 指数稳定与不稳定的充要条件分别为

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\, t^{-1}\int_0^t [2a(s) - S(s)]\mathrm{d}s < 0, \quad (2.3.43a)$$

$$\underline{\lim_{t\to\infty}}\, t^{-1}\int_0^t [2a(s) - S(s)]\mathrm{d}s > 0. \quad (2.3.43b)$$

注意条件(2.3.43a)与(2.3.40a)的关系,恰如条件(2.3.29a)与(2.3.27a)的关系,且显然有(2.3.29a)⇒(2.3.43a),而逆向推理一般是不可行的.

2.3.4　随机稳定化

首先看一个颇具启发性的例子.

例 2.3.12　设 $G \in \mathbf{R}^{d\times d}, G^2 = \pm I, a, b \in \mathbf{R}$,则线性方程

$$\mathrm{d}x(t) = [aI\mathrm{d}t + b\,G\mathrm{d}w(t)]x(t) \quad (2.3.44)$$

的解为(用(2.2.18))

$$x(t) = \{\exp[(a \mp b^2/2)tI + b\,Gw(t)]\}x_0$$
$$= y(t)\exp(a \mp b^2/2)t, \quad y(t) = \mathrm{e}^{bGw(t)}x_0.$$

设 $0 \neq x_0 \in \mathbf{R}^d$. 利用 $\|\mathrm{e}^A\| \leqslant \mathrm{e}^{\|A\|}$ $(A \in \mathbf{R}^{d\times d})$ 易得

$$|\ln(|y(t)|/|x_0|)| \leqslant \|G\|\,|bw(t)|,$$

结合重对数律((1.2.35))得 $t^{-1}\ln|y(t)| \to 0$, a.s. $(t \to \infty)$, 于是

$$\lim_{t\to\infty} t^{-1}\ln|x(t)|^2 = 2a \mp b^2, \text{a.s.}.$$

这就可以指出两种有趣的情况:

(i) 设 $G = I, 0 < 2a < b^2$, 则本来不稳定的 ODE:

$$\dot{x}(t) = ax(t) \quad (2.3.45)$$

添加扰动项 $bx(t)\mathrm{d}w(t)$ 之后变成了 a.s. 指数稳定的 SDE(2.3.44).

(ii) 设 $G^2 = -I$(当 d 为偶数时这样的 G 必存在),$0 < -2a < b^2$, 则本来指数稳定的 ODE(2.3.45)添加扰动项之后变动了 a.s. 指数不稳定的 SDE(2.3.44).

以上例子启示出如下一般问题:给定 ODE:

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t)),\tag{2.3.46}$$

如何选择适当的扰动项 $g(t,x(t))\mathrm{d}w(t)$,使扰动方程(2.3.1)在某种意义下稳定(此时称(2.3.1)为方程(2.3.46)的**稳定化方程**),或者不稳定(此时称(2.3.1)为方程(2.3.46)的**不稳定化方程**)?在应用中,无论稳定化与不稳定化问题均有其实际意义.一个合理的想法是,将稳定化或不稳定化方程限定为如下半线性方程:

$$\mathrm{d}x(t)=f(t,x(t))\mathrm{d}t+\sum_{k=1}^{m}B_kx(t)\mathrm{d}w_k(t),\tag{2.3.47}$$

其中 $B_k\in\mathbf{R}^{d\times d}$. 那么,方程(2.3.46)是否有形如(2.3.47)的稳定化或不稳定化方程?如果有,如何确定其中的 B_k?为解决此问题,首先建立关于方程(2.3.47)的如下一般结果.

定理 2.3.13 设存在常数 $K,\bar{K}$, 使得以下条件满足:

$$\bar{K}|x|^2\leqslant x^{\mathrm{T}}f(t,x)\leqslant K|x|^2,\quad t\geqslant 0,x\in\mathbf{R}^d.\tag{2.3.48}$$

(i) 设 $S=\sum B_k^{\mathrm{T}}B_k$. 若 $2KI+S$ 负定,则方程(2.3.47)的零解均方指数稳定与 a.s. 指数稳定;若 $2\bar{K}I+S$ 正定(如 $\bar{K}>0$),则方程(2.3.47)的零解均方指数不稳定.

(ii) 若 $2\bar{K}I-S$ 正定,则方程(2.3.47)的零解 a.s. 指数不稳定.

(iii) 若 $B_k(1\leqslant k\leqslant m)$ 半正定,

$$2K<2\sum_k\lambda_{\min}(B_k^2)-\lambda_{\max}\Big(\sum_k B_k^2\Big),\tag{2.3.49}$$

则方程(2.3.47)的零解 a.s. 指数稳定

证 取 $V=|x|^2$,设 α,β 依式(2.3.31),则结合式(2.3.48)与(2.3.37)可得

$$2\bar{K}+|x|^{-2}x^{\mathrm{T}}Sx\leqslant\alpha\leqslant 2K+|x|^{-2}x^{\mathrm{T}}Sx,\tag{2.3.50}$$

$$2\bar{K}-|x|^{-2}x^{\mathrm{T}}Sx\leqslant\alpha-\beta\leqslant 2K+\lambda_{\max}\Big(\sum_k B_k^2\Big)-2\sum_k\lambda_{\min}(B_k^2),\tag{2.3.51}$$

但式(2.3.51)的第二个不等号要求 B_k 为半正定矩阵.结论(i)由不等式(2.3.50)、定理 2.3.3 与定理 2.3.9(i)推出;结论(ii)由不等式(2.3.51)的前一半与定理 2.3.9(ii)推出;结论(iii)由不等式(2.3.51)的后一半与 2.3.9(i)推出. □

现在利用定理 2.3.13 及其他有关结果来构成稳定化与不稳定化方程,首先限于考虑 a.s. 指数稳定性,且总设条件(2.3.48)满足.若取 $m=1,B_1=bI$,则条件(2.3.49)简化为 $2K<b^2$. 因此,方程(2.3.46)有如下简单的稳定化方程:

$$\mathrm{d}x(t)=f(t,x(t))\mathrm{d}t+bx(t)\mathrm{d}w(t),\quad b^2>2K.\tag{2.3.52}$$

不稳定化方程的情况复杂些,分三种情况考虑:

(i) 若 $d=1$,则形如(2.3.47)的不稳定化方程可能不存在.例如方程

$$\mathrm{d}x(t)=-x(t)\mathrm{d}t+\sum_k b_kx(t)\mathrm{d}w_k(t)\tag{2.3.53}$$

总是 a. s. 指数稳定的(依(2.3.41a)),因而方程“ $\dot{x}(t) = -x(t)$ ”不存在形如(2.3.53)的不稳定化方程. 这表明一维方程 $\dot{x}(t) = -x(t)$ 的稳定性是如此牢固,以致任何线性扰动都不足以破坏它. 颇为奇怪的是,这种现象对于多维系统却不会发生.

(ii) 设 $d = 2$,取 $G = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$,$b > 0$ 充分大,则

$$dx(t) = f(t,x(t))dt + bGx(t)dw(t) \tag{2.3.54a}$$

是方程(2.3.46)的不稳定化方程. 关键是注意到 $G^{\mathrm{T}} = -G, G^2 = -I, \beta = 0$,因而 $\alpha - \beta \geqslant 2\bar{K} + b^2 > 0$(记号依式(2.3.31)),于是由定理 2.3.9(ii)知方程(2.3.54a)的零解 a. s. 指数不稳定.

(iii) 设 $d \geqslant 3$. 选定 $B_k \in \mathbf{R}^{d\times d}(1 \leqslant k \leqslant d)$,使得

$$g(x) \triangleq [B_1x, B_2x, \cdots, B_dx] = b\ \mathrm{diag}(x_2, \cdots, x_d, x_1),$$

其中 $b > 0$ 充分大. 如上的 B_k 不难实际写出,但下面用不到它的表达式. 因

$$\sum_k |B_kx|^2 = |g(x)|^2 = b^2|x|^2,$$

$$\sum_k (x^{\mathrm{T}}B_kx)^2 = |g(x)x|^2 = b^2\sum_{i=1}^d x_i^2x_{i+1}^2 \qquad (x_{d+1} = x_1)$$

$$= \frac{b^2}{3}\left(2\sum_{i=1}^d x_i^2x_{i+1}^2 + \sum_{i=1}^d x_i^2x_{i+1}^2\right)$$

$$\leqslant \frac{b^2}{3}\left(2\sum_{i=1}^d x_i^2x_{i+1}^2 + \sum_{i=1}^d x_i^4\right) \leqslant \frac{b^2|x|^4}{3},$$

故取 $V = |x|^2$ 有(依式(2.3.31)的记号)

$$\alpha - \beta \geqslant 2\bar{K} + b^2 - 2b^2/3 = 2\bar{K} + b^2/3 > 0.$$

可见当如上选取 B_k 时(2.3.47)是方程(2.3.46)的不稳定化方程,此时将它明确写出来便是

$$dx(t) = f(t,x(t))dt + b[x_2(t)dw_1(t), \cdots, x_d(t)dw_{d-1}(t), x_1(t)dw_d(t)]^{\mathrm{T}}. \tag{2.3.54b}$$

综上得到

定理 2.3.14　设条件(2.3.48)满足,则在 a. s. 指数稳定的意义下,方程(2.3.46)总有形如(2.3.52)的稳定化方程,而当 $d \geqslant 2$ 时总有形如(2.3.54)的不稳定化方程.

如果改用均方指数稳定性,则问题的解法要简单得多,且结论也有所不同.

定理 2.3.15　设条件(2.3.48)满足,则在均方指数稳定的意义下,方程(2.3.46)未必有形如(2.3.47)的稳定化方程,但总有形如(2.3.47)的不稳定化方程.

证　设 $f(t,x) = x$,则取 $K = \bar{K} = 1$ 使条件(2.3.48)满足,此时方程(2.3.47)

的零解总是均方指数不稳定的(依定理2.3.13(i)). 可见,方程 $\dot{x}(t) = x(t)$ 没有均方指数稳定意义下的稳定化方程. 另一方面,用定理2.3.13(i)易知:当 $b^2 > -2\bar{K}$ 时,方程(2.3.52)即为方程(2.3.46)的(均方意义下)不稳定化方程. □

对照一下定理2.3.14与定理2.3.15的结论是有趣的. 似乎可以说,轨道意义下的稳定化比均方意义下的稳定化要容易得多;就均方稳定性而言,随机扰动项的出现似乎纯粹起负面作用,因此稳定化问题失去其意义.

2.3.5 随机渐近稳定性

最后考虑随机稳定性与随机渐近稳定性. 这两种较弱的稳定性自然仅需较弱的条件,但在寻求尽可能弱的条件时却导致颇复杂的讨论,因而不像处理指数稳定性那样遵循某种高度规则的思路. 因此不必奇怪,本小节包含某些更富技巧性的推理,尤其需要停时论证的巧妙运用.

定理2.3.16 设存在正常数 ρ 与正定的 $V(t,x) \in C^{1,2}(\mathbf{R}_+ \times B_\rho)$,使得在 $\mathbf{R}_+ \times B_\rho$ 上 $\mathscr{L}V(t,x) \leqslant 0$, 则方程(2.3.1)的零解随机稳定.

证 取 $\varphi \in \mathscr{K}$ 使条件(2.3.10)满足;取定 $\varepsilon \in (0,1)$, $r > 0$, 不妨设 $r < \rho$. 设 $\delta > 0$ 待定, $x_0 \in B_\delta$, $x(t) = x(t,x_0)$, 今证对适当选定的 δ 式(2.3.3)成立. 作停时

$$\tau = \inf\{t \geqslant 0 : |x(t)| \geqslant r\},$$

则 $\tau = \infty \Leftrightarrow \forall t \geqslant 0$, 有 $|x(t)| < r$, 故只需证 $P(\tau < \infty) \leqslant \varepsilon$. 由概率的连续性[①], 这又归于证 $P(\tau \leqslant t) \leqslant \varepsilon (\forall t > 0)$. 注意到

$$\begin{aligned} \varphi(r)P(\tau \leqslant t) &= \mathrm{E}[I_{\{\tau \leqslant t\}}\varphi(|x(\tau)|)] && (\text{用 } |x(\tau)| = r) \\ &\leqslant \mathrm{E}[I_{\{\tau \leqslant t\}}V(\tau, x(\tau))] && (\text{用}(2.3.10)) \\ &\leqslant \mathrm{E}V(\tau \wedge t, x(\tau \wedge t)) \\ &= V(0,x_0) + \mathrm{E}\int_0^{\tau \wedge t} LV(s,x(s))\mathrm{d}s && (\text{用}(1.3.23)) \\ &\leqslant V(0,x_0), && (\text{用 } LV \leqslant 0) \end{aligned}$$

只要选取 $\delta > 0$, 使在 B_δ 上 $V(0,x) \leqslant \varepsilon\,\varphi(r)$, 即得 $P(\tau \leqslant t) \leqslant \varepsilon$. 如所要证. □

鉴于以上证明中所用的停时论证经常要用到,对其运用过程的某些奥妙之处值得作点说明. 以事件 $\{\tau \leqslant t\}$ 逼近 $\{\tau < \infty\}$ 是一种简单而常用的技巧,其必要性可能因疏忽而被掩盖. 下面这个貌似合理的推理实际上是不可行的:

$$\begin{aligned} \varphi(r)P(\tau < \infty) &= \mathrm{E}[I_{\{\tau < \infty\}}\varphi(|x(\tau)|)] \leqslant \mathrm{E}V(\tau, x(\tau)) \\ &= V(0,x_0) + \mathrm{E}\int_0^{\tau} LV(s,x(s))\mathrm{d}s \leqslant V(0,x_0). \end{aligned}$$

---

① 概率的连续性可表为如下两种形式. 离散形式:若 $\{A_n\} \subset \mathscr{F}$, $A_n \subset A_{n+1}$, 则 $P(A_n) \to P(\cup A_n)$;连续参数形式:若 $\{A_t : t \geqslant 0\} \subset \mathscr{F}$, $t < s \Rightarrow A_t \subset A_s$, 则 $P(A_t) \to P(\cup A_t)(t \to \infty)$. 此处用了 $P(\tau \leqslant t) \to P(t < \infty)(t \to \infty)$. 对这类例行的应用今后将不再作解释.

你能看出其中的漏洞吗？今后遇到类似情况时均应注意及此.

现在转向下面这个更精细的结果.

定理 2.3.17　设存在正定且有任意小上界的函数 $V(t,x) \in C^{1,2}(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d)$，使得 $\mathscr{L}V(t,x)$ 在某个 $\mathbf{R}_+ \times B_\rho (\rho > 0)$ 上负定，则方程(2.3.1)的零解随机渐近稳定. 若进而设 $V(t,x)$ 径向无界且 $\mathscr{L}V(t,x)$ 在 $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d$ 上负定，则方程(2.3.1)的零解全局随机渐近稳定.

证　由假定有 $\varphi_i \in \mathscr{K}(i = 1,2,3)$，使得

$$\varphi_1(|x|) \leqslant V(t,x) \leqslant \varphi_2(|x|), \quad t \geqslant 0, \quad x \in \mathbf{R}^d, \tag{2.3.55}$$

$$\mathscr{L}V(t,x) \leqslant -\varphi_3(|x|), \quad t \geqslant 0, \quad x \in B_\rho. \tag{2.3.56}$$

取定 $\varepsilon \in (0,1)$. 取 $r \in (0,\rho)$，由定理 2.3.16，有 $\delta > 0$，使得

$$P(|x(t,x_0)| < r(\forall t \geqslant 0)) \geqslant 1 - \varepsilon/4, \quad x_0 \in B_\delta. \tag{2.3.57}$$

取定 $x_0 \in B_\delta$，令 $x(t) = x(t,x_0)$，今证式(2.3.4)成立. 为此，只需证

$$P\left(\overline{\lim_{t\to\infty}} |x(t)| \leqslant \beta\right) \geqslant 1 - \varepsilon, \quad \forall \beta > 0. \tag{2.3.58}$$

取定 $\beta > 0$，不妨设 $\beta < |x_0|$. 取 $\alpha \in (0,\beta)$，使 $4\varphi_2(\alpha) < \varepsilon\varphi_1(\beta)$. 令

$$\tau_r = \inf\{t \geqslant 0 : |x(t)| \geqslant r\}, \quad \tau_\alpha = \inf\{t \geqslant 0 : |x(t)| \leqslant \alpha\}.$$

由式(2.3.57)有 $P(\tau_r < \infty) \leqslant \varepsilon/4$. 今证 $P(\tau_\alpha = \infty) \leqslant \varepsilon/4$（这意味着 $x(t)$ 以很大的概率进入 B_α）. 因

$$P(\tau_\alpha = \infty) \leqslant P(\tau_\alpha \wedge \tau_r = \infty) + P(\tau_r < \infty),$$

故只要证 $P(\tau_\alpha \wedge \tau_r = \infty) = 0$. $\forall t > 0$，有

$$\begin{aligned} V(0,x_0) &\geqslant -\mathrm{E}\int_0^{t\wedge\tau_\alpha\wedge\tau_r} LV(s,x(s))\mathrm{d}s & &(\text{用 } V \geqslant 0) \\ &\geqslant \mathrm{E}\int_0^{t\wedge\tau_\alpha\wedge\tau_r} \varphi(|x(s)|)\mathrm{d}s & &(\text{用}(2.3.56)) \\ &\geqslant \varphi(\alpha)\mathrm{E}[t \wedge \tau_\alpha \wedge \tau_r] \geqslant \varphi(\alpha)tP(\tau_\alpha \wedge \tau_r \geqslant t), \end{aligned}$$

这推出 $P(\tau_\alpha \wedge \tau_r \geqslant t) \leqslant V(0,x_0)/t\,\varphi(\alpha) \to 0 (t \to \infty)$，故得 $P(\tau_\alpha \wedge \tau_r = \infty) = 0$，如所要证.

由 $P(\tau_\alpha < \infty) \geqslant 1 - \varepsilon/4$ 推出有 $\theta > 0$，使 $P(\tau_\alpha < \theta) \geqslant 1 - \varepsilon/2$. 于是

$$P(\tau_\alpha < \theta \wedge \tau_r) \geqslant P(\tau_\alpha < \theta) - P(\tau_r < \infty) \geqslant 1 - 3\varepsilon/4.$$

定义

$$\sigma = \begin{cases} \tau_\alpha, & \tau2_\alpha < \theta \wedge \tau_r, \\ \infty, & \text{否则}, \end{cases}$$

$$\tau_\beta = \inf\{t > \sigma : |x(t)| \geqslant \beta\}.$$

显然 $\tau_\beta = \infty > \sigma \Rightarrow \overline{\lim_{t\to\infty}} |x(t)| \leqslant \beta$，故只要证 $P(\sigma < \infty = \tau_\beta) \geqslant 1 - \varepsilon$. 因

$$P(\sigma < \infty = \tau_\beta) \geqslant P(\sigma < \infty) - P(\tau_\beta < \infty)$$

$$
\begin{aligned}
&= P(\tau_\alpha < \theta \wedge \tau_r) - P(\tau_\beta < \infty) \\
&\geqslant 1 - 3\varepsilon/4 - P(\tau_\beta < \infty),
\end{aligned}
$$

故只要证 $P(\tau_\beta < \infty) \leqslant \varepsilon/4$，即 $\forall t > 0, P(\tau_\beta \leqslant t) \leqslant \varepsilon/4$. 不妨设 $t \geqslant \theta$，则

$$
\begin{aligned}
\varphi_1(\beta)P(\tau_\beta \leqslant t) &= \mathrm{E}[I_{\{\tau_\beta \leqslant t\}}\varphi_1(|x(\tau_\beta)|)] \\
&\leqslant \mathrm{E}[I_{\{\tau_\beta \leqslant t\}}V(\tau_\beta, x(\tau_\beta))] && (\text{用}(2.3.55)) \\
&= \mathrm{E}[I_{\{\tau_\beta \leqslant t\}}V(t\wedge\tau_\beta, x(t\wedge\tau_\beta))] \\
&\leqslant \mathrm{E}[I_{\{\tau_\beta \leqslant t\}}V(t\wedge\sigma, x(t\wedge\sigma))] && (\sigma \leqslant \tau_\beta \text{ 且 } LV \leqslant 0) \\
&\leqslant \mathrm{E}[I_{\{\tau_\alpha < \theta\wedge\tau_r\}}V(t\wedge\tau_\alpha, x(t\wedge\tau_\alpha))] && (\sigma = \tau_\alpha) \\
&= \mathrm{E}[I_{\{\tau_\alpha < \theta\wedge\tau_r\}}V(\tau_\alpha, x(\tau_\alpha))] && (\tau_\alpha < \theta \leqslant t) \\
&\leqslant \varphi_2(\alpha) \leqslant \varepsilon\,\varphi_1(\beta)/4, && (\text{用}(2.3.55))
\end{aligned}
$$

得 $P(\tau_\beta \leqslant t) \leqslant \varepsilon/4$. 这就证明了定理的前一半.

其次设 $V(t,x)$ 径向无界且 $\mathscr{L}V(t,x)$ 在 $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d$ 上负定，今要证式(2.3.5) 成立. 取定 $x_0 \in \mathbf{R}^d$，令 $x(t) = x(t,x_0)$. $\forall \varepsilon \in (0,1)$，取 $r > |x_0|$，使得

$$
\inf_{|x| \geqslant r, t \geqslant 0} V(t,x) \geqslant (4/\varepsilon)V(0,x_0). \qquad (\text{用}(2.3.12))
$$

只要证式(2.3.57)，因如此则可证式(2.3.58)，然后令 $\beta \to 0, \varepsilon \to 0$ 即得式(2.3.5). 式(2.3.57) 相当于 $P(\tau_r \leqslant t) \leqslant \varepsilon/4(\forall t > 0)$，这由以下推理得出：

$$
\begin{aligned}
V(0,x_0) &\geqslant \mathrm{E}V(t\wedge\tau_r, x(t\wedge\tau_r)) && (\text{用 } LV \leqslant 0) \\
&\geqslant \mathrm{E}[I_{\{\tau_r \leqslant t\}}V(\tau_r, x(\tau_r))] \\
&\geqslant P(\tau_r \leqslant t)(4/\varepsilon)V(0,x_0).
\end{aligned}
$$

定理证毕. □

前面用于解释 a.s. 指数稳定判别法的例子，亦可用来说明定理 2.3.16 与定理 2.3.17 的应用. 此处我们将特别关注，相对于 a.s. 指数稳定而言，随机稳定与随机渐近稳定所需之条件有哪些减弱. 此外，随机稳定自然涉及局部问题.

例 2.3.18 首先考虑方程(2.3.16). 取 $V = x^{\mathrm{T}}Qx$，Q 为正定矩阵，则 V 满足条件(2.3.10) ~ (2.3.12). 由式(2.3.18)有

$$
\mathscr{L}V(t,x) = x^{\mathrm{T}}Mx, \quad M = QA + A^{\mathrm{T}}Q + \sum_k B_k^{\mathrm{T}}QB_k.
$$

若 M 负定，则由定理 2.3.17 推出方程(2.3.16) 的零解全局随机渐近稳定. 不过，当 M 负定时亦可由定理 2.3.9 推出方程(2.3.16) 的零解 a.s. 指数稳定. 可见在这种情况下，由定理 2.3.17 得不出什么新结果. 若 M 半负定，则由定理推出方程(2.3.16) 的零解随机稳定，这是一个新的结论.

就非线性方程而言，定理 2.3.17 可能有实质性的应用. 设 $|x| \to 0$ 时关于 $t \geqslant 0$ 一致地有

$$f(t,x) = Ax + o(|x|),$$
$$g(t,x) = [B_1x, B_2x, \cdots, B_mx] + o(|x|).$$

仍取 $V = x^{\mathrm{T}}Qx$,则对于方程(2.3.1)有

$$\mathscr{L}V(t,x) = x^{\mathrm{T}}Mx + o(|x|^2).$$

这就可用定理2.3.17得出,当 M 负定时方程(2.3.1)的零解随机渐近稳定.

例 2.3.19 对于一维线性方程(2.3.26),取 $V = x^2$,有

$$\mathscr{L}V(t,x) = x^2[2a(t) + S(t)], \quad S(t) = \sum_k b_k^2(t).$$

于是由定理2.3.16与定理2.3.17得出结论:若 $2a(t) + S(t) \leqslant 0$,则方程(2.3.26)的零解随机稳定;若 $\sup\limits_{t\geqslant 0}[2a(t) + S(t)] < 0$,则方程(2.3.26)的零解全局随机渐近稳定. 后一条件强于 a. s. 指数稳定的条件(2.3.43a),因而并无价值.

对于方程(2.3.26)的一个精细讨论依赖于解公式 $x(t,x_0) = x_0 e^{\psi(t)}$,此处

$$\psi(t) = \int_0^t \left[a(s) - \frac{S(s)}{2}\right] ds + M(t), \quad M(t) = \sum_k \int_0^t b_k dw_k(s).$$

直接看出,方程(2.3.26)的零解随机稳定 $\Leftrightarrow \psi(t)$, a. s. 上有界,而全局随机渐近稳定 $\Leftrightarrow \psi(t) \to -\infty$, a. s. $(t \to \infty)$. 令 $\sigma(t) = \int_0^t S(s) ds$,分两种情况讨论:

(i) 设 $\sigma(\infty) < \infty$,则 $M(t)$ 渐近于正态分布 $N(0, \sigma(\infty))$,因而方程(2.3.26)的零解随机稳定 $\Leftrightarrow \int_0^t a(s) ds$ 上有界,而全局随机渐近稳定 $\Leftrightarrow \int_0^\infty a(s) ds = -\infty$.

(ii) 设 $\sigma(\infty) = \infty$. 令 $\tau(t) = \inf\{s \geqslant 0: \sigma(s) = t\}$,由 Lévy 定理1.2.19知 $M(\tau(t))$ 是 Brown 运动,于是由重对数律((1.2.35))有

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{M(\tau(t))}{\sqrt{2t\ln\ln t}} = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{M(t)}{\sqrt{2\sigma(t)\ln\ln\sigma(t)}} = 1, \text{a. s.}.$$

由此不难推出,以下条件保证方程(2.3.26)的零解全局随机渐近稳定:

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{\sqrt{\sigma(t)\ln\ln\sigma(t)}} \int_0^t \left[a(s) - \frac{S(s)}{2}\right] ds < -1.$$

例 2.3.20 在方程(2.3.1)中取 $d = 1$,设当 $|x| \to 0$ 时对 $t \geqslant 0$ 一致地有

$$f(t,x) = a(t)x + o(x),$$
$$g(t,x) = [b_1(t)x, b_2(t)x, \cdots, b_m(t)x] + o(x),$$

其中 $a(t)$ 与 $b_k(t)$ 是有界 Borel 可测函数. 设存在正常数 K, θ, p,使得

$$\begin{cases} |\varphi(t)| \leqslant K, \quad \varphi(t) = \int_0^t \left[a(s) - \dfrac{S(s)}{2} + \theta\right] ds, & \text{(2.3.59a)} \\ 0 < \sup\limits_{t\geqslant 0} pS(t) < \theta, & \text{(2.3.59b)} \end{cases}$$

其中 $S(t) = \sum\limits_k b_k^2(t)$. 令 $V(t,x) = |x|^p e^{-p\varphi(t)}$. 由条件(2.3.59a)推出 $V(t,x)$ 满

足条件(2.3.10)～(2.3.12).其次,

$$\begin{aligned}\mathscr{L}V(t,x) &= e^{-p\varphi(t)}[\mathscr{L}|x|^p - p\varphi'(t)|x|^p] \\ &= (p/2)|x|^p e^{-p\varphi(t)}[pS(t) - 2\theta] + o(|x|^p) \\ &\leqslant -(p\theta/2)|x|^p e^{Kp} + o(|x|^p), \qquad (\text{用}(2.3.59b))\end{aligned}$$

这表明 $\mathscr{L}V(t,x)$ 在某个集 $\mathbf{R}_+ \times B_\rho(\rho>0)$ 上负定. 于是由定理 2.3.17 推出,方程(2.3.1)的零解随机渐近稳定.

第 3 章 随机泛函微分方程

本章将展开讨论的随机泛函微分方程(SFDE),既可看作通常泛函微分方程(FDE)的随机扰动方程,亦可看作第 2 章中所考虑的 SDE 的某种"时滞"推广. 这样两个来源,对于 SFDE 理论的形成都有决定性的影响. 不过,对于本章内容的展开,我们将更强调借鉴上章的经验,尤其是遵循类似于第 2 章中处理 SDE 的程序,依次考虑存在定理、解的估计、稳定性这样一些基本课题. 第 2 章中的主要结论对于 SFDE 都有令人满意的相应推广. 从技术的角度看,新的困难无疑源于时滞的影响. 时滞的存在使得对于 SDE 行之有效的方法要么干脆不再适用,要么需要作显著的改造.

除了继续沿用第 2 章那些术语与记号之外,本章主要的新约定是取定 $\tau \in \mathbf{R}_+$, 记 $C = C([-\tau,0],\mathbf{R}^d)$ (Hale, 1993), C 依范数

$$\|\varphi\| = \max_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0} |\varphi(\theta)|$$

成为一个 Banach 空间,当 $\tau = 0$ 时 C 重合于 $\mathbf{R}^d$. 每个 C 值随机变量 φ 可看作一个二元函数 $\varphi(\theta,\omega)$: $[-\tau,0]\times\Omega\to\mathbf{R}^d$, 它对于 θ 连续,而 $\Omega\to C,\omega\to\varphi(\cdot,\omega)$ 则为 $\mathscr{F}$-$\mathscr{B}_C$ 可测. 约定

$$L^p_{\mathscr{F}_t}(\Omega,C) = \{\varphi: \varphi \text{ 是 } \mathscr{F}_t \text{ 可测的 } C \text{ 值随机变量}, \mathrm{E}\|\varphi\|^p < \infty\},$$

$$C^b_{\mathscr{F}_t}(\Omega,C) = \{\varphi: \varphi \text{ 是 } \mathscr{F}_t \text{ 可测有界 } C \text{ 值随机变量}\},$$

$$\|\varphi\|_0^p = \sup_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0} \mathrm{E}|\varphi(\theta)|^p.$$

后一记号将带来很大方便而值得特别强调,以下将频繁地使用而不再解释. 注意

$$\|\varphi\|_0^p \leqslant \mathrm{E}\|\varphi\|^p \leqslant \|\varphi\|_\infty^p,$$

但不能认为 $\|\varphi\|_0^p = (\|\varphi\|_0)^p$. 不致误解时,也将 $\varphi\in L^p_{\mathscr{F}_t}(\Omega,C)$ 简写作 $\varphi\in L^p$. 此外,对任何区间 $J = [t_0,T]\subset\mathbf{R}_+$, 约定 $J_\tau = [t_0-\tau,T]$.

§3.1 存在定理

本节的任务大体上平行于 §2.1:对于 SFDE 建立存在定理,并初步考虑解的性质. 原则上,仍可借鉴 §2.1 中的方法,但对于解的构造采用经典的 Picard 迭代程序,虽然有点繁琐,但同时得到构成逼近解的方法,因而相对于 §2.1 中所用的不动点方法有其优势. 与 SDE 比较,SFDE 具有更多样化的具体形式. 因此,在解释主要结果(例如定理 3.1.2)的应用时要涉及多种特殊情况.

3.1.1 一般概念

由 FDE 描述的时间系统的一本质特点是,系统对于过程的历史保持一定的记忆. 设记忆力所及的时间长度为 $\tau, 0 \leqslant \tau < \infty$ [①],这意味着在任何时间 t, 系统的未来状态决定于系统在整个区间 $[t-\tau, t]$ 内的已有状态,而并非如 ODE 系统一样仅仅决定于系统在时点 t 的状态. 为了描述这种记忆作用,需要有一个相应的记号:任给函数 $x(t): J_\tau \triangleq [t_0-\tau, T] \to \mathbf{R}^d$, 对每个 $t \in J=[t_0, T]$, 约定

$$x_t(\cdot): [-\tau, 0] \to \mathbf{R}^d, \quad \theta \to x(t+\theta).$$

函数 $x_t(\cdot)$ 正好反映了对 $x(\cdot)$ 记忆所及的 **t 前历史**. 若 $x(t)$ 的变化率 $\dot{x}(t)$ 既决定于时间 t, 又决定于 $x(\cdot)$ 的 t 前历史,则应满足一个如下的微分方程:

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), \quad t \in J. \tag{3.1.1}$$

这就是标准形式下的 FDE. 为获得对 FDE 的更直观的印象,下面举出(3.1.1)的几种特殊情形,其一就是如下的**延迟微分方程**:

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t), x(t-\delta_1(t)), \cdots, x(t-\delta_k(t))), \quad t \in J, \tag{3.1.2}$$

其中 $\delta_j(\cdot): J \to [0, \tau]$ 是 Borel 可测函数, $\delta_j(t) \not\equiv 0 (1 \leqslant j \leqslant k$,本章中均如此,下面不再注明). 若取 $\delta_j(t) \equiv \tau_j$, 则得到更特殊的方程:

$$\dot{x}(t) = F(t, x(t), x(t-\tau_1), \cdots, x(t-\tau_k)), \quad t \in J. \tag{3.1.3}$$

其二是所谓**积分 - 微分方程**,例如方程

$$\dot{x}(t) = F\left(t, x(t), \int_{-\tau}^{0} h(\theta, x(t+\theta)) \mathrm{d}\theta\right) \tag{3.1.4}$$

即属此类. 上述各类方程都广泛出现于各种应用问题中.

如同 ODE 附加随机扰动项后即过渡到 SDE 一样,FDE(3.1.1)附加一个随机扰动项后,成为如下的 SFDE:

$$\mathrm{d}x(t) = f(t, x_t)\mathrm{d}t + g(t, x_t)\mathrm{d}w(t), \quad t \in J. \tag{3.1.5}$$

若 $x(t) (t \in J_\tau)$ 是连续随机过程,则 $x_t(\theta, \omega) = x(t+\theta, \omega)$ 关于 θ 是 $[-\tau, 0]$ 上的连续函数. 因此,下面使用 $C = C([-\tau, 0], \mathbf{R}^d)$ 作为一个基本空间. 当 $x(t) (t \in J_\tau)$ 是一连续随机过程时, $\{x_t: t \in J\}$ 就是一个 C 值随机过程. 基于此,对出现于方程(3.1.5)中的函数 f, g 设定如下: $f: J \times C \to \mathbf{R}^d$ 与 $g: J \times C \to \mathbf{R}^{d \times m}$ 均为 Borel 可测函数; $w = (w_1, w_2, \cdots, w_m)^{\mathrm{T}}$ 仍为给定的 m 维标准 Brown 运动. 这样,除了分别以 x_t 与 C 取代了 $x(t)$ 与 $\mathbf{R}^d$ 之外,方程(3.1.5)形式上与(2.1.2)一致.

方程(3.1.5)的几个主要特殊情形,恰好由方程(3.1.2) ~ (3.1.4)的扰动方程构成. 例如,方程(3.1.2)的扰动方程,就是如下的**随机延迟微分方程**(SDDE):

---

① 原则上可考虑 $\tau = \infty$,即所谓无限时滞问题,但这将导致一个实质上不同的理论,不拟在此讨论,而推迟至 §5.5 中另行处理.

$$\begin{aligned} dx(t) &= F(t,x(t),x(t-\delta_1(t)),\cdots,x(t-\delta_k(t)))dt \\ &\quad + G(t,x(t),x(t-\delta_1(t)), \\ &\quad \cdots,x(t-\delta_k(t)))dw(t), \quad t \in J, \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

其中 $F: J \times \mathbf{R}^{d(k+1)} \to \mathbf{R}^d$ 与 $G: J \times \mathbf{R}^{d(k+1)} \to \mathbf{R}^{d\times m}$ 均为 Borel 可测函数①. 凡考虑形如(3.1.6)的方程时,总采用标准约定:

$$\begin{cases} f(t,\varphi) = F(t,\varphi(0),\varphi(-\delta_1(t)),\cdots,\varphi(-\delta_k(t))), \\ g(t,\varphi) = G(t,\varphi(0),\varphi(-\delta_1(t)),\cdots,\varphi(-\delta_k(t))). \end{cases} \quad (\varphi \in C) \tag{3.1.7}$$

这样就将方程(3.1.6)转化成了标准的 SFDE(3.1.5),且 $f(t,\varphi)$ 与 $g(t,\varphi)$ 必为 $J \times C$ 上的 Borel 可测函数. 方程(3.1.3)与(3.1.4)的扰动方程亦可类似地给出,不必细述.

对于解的界定,大体上仍可套用定义 2.1.1,当然有若干相应的改变.

定义 3.1.1　若 $\mathbf{R}^d$ 值随机过程 $x(t)$ $(t \in J_\tau)$ 满足以下条件:

(i) $x(t)$ 是连续适应过程,且 $\{x_t: t \in J\}$ 是适应的 C 值随机过程;

(ii) $f(t,x_t) \in \mathscr{L}^1(J,\mathbf{R}^d)$, $g(t,x_t) \in \mathscr{L}^2(J,\mathbf{R}^{d\times m})$;

(iii) $x_{t_0} = \xi \in L^2_{\mathscr{F}_{t_0}}(\Omega,C)$, $x(t)$ 在 J 上满足随机积分方程:

$$x(t) = \xi(0) + \int_{t_0}^t f(s,x_s)ds + \int_{t_0}^t g(s,x_s)dw(s), \tag{3.1.8}$$

则称 $x(t)$ 为方程(3.1.5)的具初值 ξ 的解. 若 $x(t)$ 与方程(3.1.5)的任何其他具初值 ξ 的解无差别,则称 $x(t)$ 是方程(3.1.5)的具初值 ξ 的唯一解,此时也写作 $x(t) = x(t,\xi)$.

与 SDE 比较,最明显的差别是,方程(3.1.5)的解的初值不是一个 $\mathbf{R}^d$ 值随机变量 x_0,而是一个 C 值随机变量 ξ,除非 $\tau = 0$. 与 SDE 情形一样,说到初值 ξ 时,总假定 $\xi \in L^2_{\mathscr{F}_{t_0}}(\Omega,C)$,即 ξ 为 $\mathscr{F}_{t_0}$ 可测且 $E\|\xi\|^2 < \infty$,这一点今后将不再处处说明.

如同对 SDE 一样,对 SFDE(3.1.5)提出的问题仍然是:

(i) 在什么条件下方程(3.1.5)的初值问题的解存在且唯一?

(ii) 方程(3.1.5)的解有哪些性质?

(iii) 如何求出方程(3.1.5)的(准确或近似)解?

下面将部分地解决以上问题. 在这样做时,我们将尽可能借鉴第 2 章中解决相应问题的现有经验.

---

① 更细致的写法是 $F: J \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d \times \cdots \times \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$. 但此处及今后都采用较短的记号 $F: J \times \mathbf{R}^{d(k+1)} \to \mathbf{R}^d$,并不会引起什么误解.

3.1.2 存在定理

以下结果与定理2.1.2是高度对应的.

定理3.1.2 设函数f与g在$J \times C$上满足以下条件:

(i) 一致 Lipschitz 条件:存在正常数$\bar{K}$,使得在$J \times C$上有

$$|f(t,\varphi)-f(t,\psi)|^2 \vee |g(t,\varphi)-g(t,\psi)|^2 \leqslant \bar{K}\|\varphi-\psi\|^2; \quad (3.1.9)$$

(ii) 线性增长条件:存在正常数K,使得在$J \times C$上有

$$|f(t,\varphi)|^2 \vee |g(t,\varphi)|^2 \leqslant K(1+\|\varphi\|^2). \quad (3.1.10)$$

若$\xi \in L^2_{\mathscr{F}_{t_0}}(\Omega,C)$,则方程(3.1.5)存在唯一解$x(t)(t \in J_\tau)$,使得$x_{t_0}=\xi$,且$x(t) \in \mathscr{M}^2(J_\tau,\mathbf{R}^d)$.

证 下面用经典的 Picard 迭代程序构成一个"逼近解序列",然后证明它收敛于定理所要求的解.

固定初值ξ,定义逼近序列如下:

$$\begin{cases} x^0_{t_0}=\xi, x^0(t)=\xi(0),\ t \in J, \\ x^{n+1}_{t_0}=\xi, n \geqslant 0, \\ x^{n+1}(t)=\xi(0)+\int_{t_0}^t f(s,x^n_s)\mathrm{d}s+\int_{t_0}^t g(s,x^n_s)\mathrm{d}w(s), \quad t \in J. \end{cases} \quad (3.1.11)$$

下面证明$\{x^n(t)\}$在空间$\mathscr{M}^2(J_\tau,\mathbf{R}^d)$中范数收敛于某个$x(t)$,$x(t)$正是定理所要求的唯一解.证明分为若干步骤进行,主要步骤都要用到一定的归纳论证.

(i) 证$x^n(t)$合理定义、连续且属于空间$\mathscr{M}^2(J_\tau,\mathbf{R}^d)$. $x^0(t)$当然不成问题.设对$x^k(t)(0 \leqslant k < n)$已得出所要结论,$n \geqslant 1$,则$x^n(t)$依(3.1.11)(以$n$代$n+1$)可定义且连续是不成问题的.为证$x^n(t) \in \mathscr{M}^2(J_\tau,\mathbf{R}^d)$,只要证$\mathrm{E}|x^n(t)|^2$有界;而为此又只要证更强的结论:

$$h_n(t) \triangleq \mathrm{E}\Big(\sup_{t_0-\tau \leqslant s \leqslant t}|x^n(t)|^2\Big)$$

有界.作归纳假设:$h_{n-1}(t)$有界,则

$$\begin{aligned} h_n(t) &\leqslant \mathrm{E}\|\xi\|^2+\mathrm{E}\Big(\sup_{t_0 \leqslant s \leqslant t}|x^n(s)|^2\Big) \\ &\leqslant 4\mathrm{E}\|\xi\|^2+3\mathrm{E}\Big[\int_{t_0}^t |f(s,x^{n-1}_s)|\,\mathrm{d}s\Big]^2 \qquad (\text{用}(3.1.11),(1.3.51)) \\ &\quad +3\mathrm{E}\Big[\sup_{t_0 \leqslant s \leqslant t}\Big|\int_{t_0}^s g(r,x^{n-1}_r)\mathrm{d}w(r)\Big|^2\Big] \\ &\leqslant 4\mathrm{E}\|\xi\|^2+3(T-t_0)\int_{t_0}^t \mathrm{E}|f(s,x^{n-1}_s)|^2\mathrm{d}s \qquad (\text{用 Hölder 不等式}) \\ &\quad +12\int_{t_0}^t \mathrm{E}|g(s,x^{n-1}_s)|^2\mathrm{d}s \qquad (\text{用}(1.3.43)) \end{aligned}$$

$$\leqslant 4\mathrm{E}\|\xi\|^2 + 3K(T-t_0+4)\int_{t_0}^{t}(1+\mathrm{E}\|x_s^{n-1}\|^2)\mathrm{d}s \quad (用(3.1.10))$$

$$\leqslant 4\mathrm{E}\|\xi\|^2 + 3K(T-t_0+4)\int_{t_0}^{t}[1+h_{n-1}(s)]\mathrm{d}s,$$

这表明 $h_n(t)(t\in J)$ 是有界的.

(ii) 证 $\{x^n(t)\}$ 在空间 $\mathscr{M}^2(J_\tau,\mathbf{R}^d)$ 中范数收敛. 为此,关键是归纳地证明以下不等式:

$$\mathrm{E}\Big[\sup_{t_0\leqslant s\leqslant t}|x^{n+1}(s)-x^n(s)|^2\Big] \leqslant \frac{c[M(t-t_0)]^n}{n!},\quad t\in J, n\geqslant 0, \tag{3.1.12}$$

其中 $M=2\bar{K}(T-t_0+4)$, $c=2K(T-t_0+4)(T-t_0)(1+\mathrm{E}\|\xi\|^2)$. 以 $q_n(t)$ 记式(3.1.12)之左端,则

$$\begin{aligned}
q_0(t) &= \mathrm{E}\Big[\sup_{t_0\leqslant s\leqslant t}|x^1(s)-\xi(0)|^2\Big]\\
&= \mathrm{E}\Big[\sup_{t_0\leqslant s\leqslant t}\Big|\int_{t_0}^{s}f(r,x_r^0)\mathrm{d}r+\int_{t_0}^{s}g(r,x_r^0)\mathrm{d}w(r)\Big|^2\Big] && (用(3.1.11))\\
&\leqslant 2\mathrm{E}\Big[\int_{t_0}^{t}|f(s,x_s^0)|\mathrm{d}s\Big]^2+2\mathrm{E}\Big[\sup_{t_0\leqslant s\leqslant t}\Big|\int_{t_0}^{s}g(r,x_r^0)\mathrm{d}w(r)\Big|^2\Big]\\
&\leqslant 2(T-t_0)\int_{t_0}^{t}\mathrm{E}|f(s,x_s^0)|^2\mathrm{d}s+8\int_{t_0}^{t}\mathrm{E}|g(s,x_s^0)|^2\mathrm{d}s\\
&\leqslant 2K(T-t_0+4)\int_{t_0}^{t}(1+\mathrm{E}\|x_s^0\|^2)\mathrm{d}s && (用(3.1.10))\\
&\leqslant 2K(T-t_0+4)(T-t_0)(1+\mathrm{E}\|\xi\|^2)=c,
\end{aligned}$$

可见不等式(3.1.12)对 $n=0$ 成立. 设(3.1.12)对 $q_n(t)$ 成立,则

$$\begin{aligned}
q_{n+1}(t) &= \mathrm{E}\Big[\sup_{t_0\leqslant s\leqslant t}\Big|\int_{t_0}^{s}(f(r,x_r^{n+1})-f(r,x_r^n))\mathrm{d}r\\
&\qquad+\int_{t_0}^{s}(g(r,x_r^{n+1})-g(r,x_r^n))\mathrm{d}w(r)\Big|^2\Big] && (用(3.1.11))\\
&\leqslant 2\mathrm{E}\Big[\int_{t_0}^{t}|f(s,x_s^{n+1})-f(s,x_s^n)|\mathrm{d}s\Big]^2\\
&\qquad+2\mathrm{E}\Big[\sup_{t_0\leqslant s\leqslant t}\Big|\int_{t_0}^{s}(g(r,x_r^{n+1})-g(r,x_r^n))\mathrm{d}w(r)\Big|^2\Big] && (用(1.3.51))\\
&\leqslant 2(T-t_0)\mathrm{E}\int_{t_0}^{t}|f(s,x_s^{n+1})-f(s,x_s^n)|^2\mathrm{d}s && (用 Hölder 不等式)\\
&\qquad+8\mathrm{E}\int_{t_0}^{t}|g(s,x_s^{n+1})-g(s,x_s^n)|^2\mathrm{d}s && (用(1.3.43))\\
&\leqslant M\int_{t_0}^{t}\mathrm{E}\|x_s^{n+1}-x_s^n\|^2\leqslant M\int_{t_0}^{t}q_n(s)\mathrm{d}s && (用(3.1.9))\quad(3.1.13)
\end{aligned}$$

$$\leqslant M\int_{t_0}^{t}\frac{c[M(s-t_0)]^n}{n!}\mathrm{d}s=\frac{c[M(t-t_0)]^{n+1}}{(n+1)!},$$

这就归纳地证明了式(3.1.12). 设 $\|\cdot\|_2$ 依(1.3.1),则

$$\|x^{n+1}-x^n\|_2^2=\int_{t_0}^{T}\mathrm{E}|x^{n+1}(t)-x^n(t)|^2\mathrm{d}t\leqslant\int_{t_0}^{T}q_n(t)\mathrm{d}t$$

$$\leqslant\int_{t_0}^{T}\frac{c[M(t-t_0)]^n}{n!}\mathrm{d}t=\frac{cM^n(T-t_0)^{n+1}}{(n+1)!}\triangleq b_n.$$

直接看出 $\sum\sqrt{b_n}<\infty$,故 $\{x^n(t)\}$ 是 $\mathscr{M}^2(J_\tau,\mathbf{R}^d)$ 中的 Cauchy 序列,因而必范数收敛于某个 $x(t)\in\mathscr{M}^2(J_\tau,\mathbf{R}^d)$.

(iii) 证 a.s. 地有 $x^n(t)\rightrightarrows x(t)$. 结合式(3.1.12)与 Chebyshev 不等式有

$$P\left(\sup_{t\in J}|x^{n+1}(t)-x^n(t)|^2\geqslant\frac{1}{2^n}\right)\leqslant\frac{c[2M(T-t_0)]^n}{n!}.$$

于是由 Borel-Cantelli 引理推出,对几乎所有 $\omega\in\Omega$, 有

$$\sup_{t\in J}|x^{n+1}(t)-x^n(t)|^2<\frac{1}{2^n},\quad n\text{ 充分大}.$$

对这样的 ω, $\{x^n(t)\}$ 在 J_τ 上一致收敛. 另一方面,由 $\|x^n-x\|_2\to0$ 推出 $x^n(t)$ 有子列几乎处处收敛于 $x(t)$, 因而 a.s. 地有 $x^n(t)\rightrightarrows x(t)$.

(iv) 证 $x(t)$ 是方程(3.1.5)的解. 由已证结论,不妨设 $x(t)$ 是连续适应过程; $\{x_t: t\in J\}$ 必为适应的 C 值过程. 由线性增长条件推出 $f(t,x_t)$ 与 $g(t,x_t)$ 满足定义 3.1.1 中的条件(ii). 为证 $x(t)$ 满足式(3.1.8),只要对 $t\in J$ 说明:

$$\mathrm{E}\left|\int_{t_0}^{t}[f(s,x_s^n)-f(s,x_s)]\mathrm{d}s\right|^2+\mathrm{E}\left|\int_{t_0}^{t}[g(s,x_s^n)-g(s,x_s)]\mathrm{d}w(s)\right|^2$$

$$\leqslant(T-t_0)\int_{t_0}^{t}\mathrm{E}|f(s,x_s^n)-f(s,x_s)|^2\mathrm{d}s+\int_{t_0}^{t}\mathrm{E}|g(s,x_s^n)-g(s,x_s)|^2\mathrm{d}s$$

$$\leqslant\bar{K}(T-t_0+1)\int_{t_0}^{t}\mathrm{E}\|x_s^n-x_s\|^2\mathrm{d}s$$

$$\leqslant\bar{K}(T-t_0+1)\int_{t_0}^{t}\mathrm{E}\left(\sup_{t_0\leqslant r\leqslant s}|x^n(r)-x(r)|^2\right)\mathrm{d}s\to0.$$

(v) 证唯一性. 设 $\bar{x}(t)$ 亦是方程(3.1.5)的具初值 ξ 的解. 首先假定 $\bar{x}(t)\in\mathscr{M}^2(J_\tau,\mathbf{R}^d)$, 则仿照得出式(3.1.13)的步骤可得

$$h(t)\triangleq\mathrm{E}\left(\sup_{t_0\leqslant s\leqslant t}|x(s)-\bar{x}(s)|^2\right)\leqslant M\int_{t_0}^{t}h(s)\mathrm{d}s,$$

这就推出 $h(t)\equiv0$ (用(1.3.61)),因而 $x(t)$ 与 $\bar{x}(t)$ 无差别. 余下只要证:若 $x(t)$ 是方程(3.1.5)的具有初值 ξ 的解,则必 $x(t)\in\mathscr{M}^2(J_\tau,\mathbf{R}^d)$. 为此,又只要建立如下不等式(注意,这里的思路与定理 2.1.2 之证的最后一段完全一样):

$$E\left(\sup_{t_0-\tau\le s\le t}|x(s)|^2\right)\le(1+4E\|\xi\|^2)e^{\beta(t-t_0)},\quad t\in J,\qquad(3.1.14)$$

其中 $\beta=3K(T-t_0+4)$. 这完全如同证(2.1.7),要用一个停时论证. 令

$$\tau_n=T\wedge\inf\{t\in J:|x(t)|\ge n\}.$$

以 $u(t)$ 记式(3.1.14)之左端,则只要证

$$u(t\wedge\tau_n)\le(1+4E\|\xi\|^2)e^{\beta(t\wedge\tau_n-t_0)}.\qquad(3.1.15)$$

为记号简便,记 $t_n=t\wedge\tau_n$, 则

$$\begin{aligned}u(t_n)&\le E\|\xi\|^2+E\left(\sup_{t_0\le s\le t_n}|x(s)|^2\right)\\&\le 4E\|\xi\|^2+3E\left[\int_{t_0}^{\tau_n}|f(s,x_s)|\,ds\right]^2\\&\quad+3E\left[\sup_{t_0\le s\le t_n}\left|\int_{t_0}^{s}g(r,x_r)\,dw(r)\right|^2\right]\qquad(\text{用}(1.3.51))\\&\le 4E\|\xi\|^2+3(T-t_0)E\int_{t_0}^{\tau_n}|f(s,x_s)|^2ds\qquad(\text{用 Hölder 不等式})\\&\quad+12E\int_{t_0}^{\tau_n}|g(s,x_s)|^2ds\qquad(\text{用}(1.3.43))\\&\le 4E\|\xi\|^2+\beta E\int_{t_0}^{\tau_n}(1+\|x_s\|^2)\,ds\\&\le 4E\|\xi\|^2+\beta\int_{t_0}^{\tau_n}[1+u(s)]\,ds.\end{aligned}$$

然后用 Gronwall 不等式,即得式(3.1.15). 令 $n\to\infty$, 得出式(3.1.14). 于是定理得证. □

与定理 2.1.2 不同,除了得出解的存在唯一性结论之外,定理 3.1.2 还另有所获,即得到逼近解 $x^n(t)\,(t\in J_\tau)$. 如果将 $x^n(t)$ 用作方程(3.1.5)的近似解,其精度如何? 利用证明过程所得结果,不难求得以下估计:

$$E\left(\sup_{t_0\le s\le t}|x^n(s)-x(s)|^2\right)\le\frac{2c[M(t-t_0)]^n}{n!}e^{2M(t-t_0)},\quad t\in J.\qquad(3.1.16)$$

今证明如下. 以 $h(t)$ 记式(3.1.16)之左端,则

$$\begin{aligned}h(t)&\le M\int_{t_0}^{t}E\|x_s^{n-1}-x_s\|^2ds\qquad(\text{仿}(3.1.13)\text{之证})\\&\le 2M\int_{t_0}^{t}E(\|x_s^{n-1}-x_s^n\|^2+\|x_s^n-x_s\|^2)\,ds\end{aligned}$$

$$\leqslant 2M\int_{t_0}^{t}\left[\frac{c(M(s-t_0))^{n-1}}{(n-1)!}+h(s)\right]\mathrm{d}s$$
$$=\frac{2c[M(t-t_0)]^n}{n!}+2M\int_{t_0}^{t}h(s)\mathrm{d}s,$$

然后再用 Gronwall 不等式,即得出式(3.1.16).

只要取 $\tau=0$, 定理 3.1.2 的所有结论就成为对 SDE 的相应结论. 这样,我们就对定理 2.1.2 作了如下重要补充:方程(2.1.2)的解有如下逼近序列:

$$\begin{cases}x^0(t)=x_0(t\in J),\\ x^{n+1}(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,x^n(s))\mathrm{d}s+\int_{t_0}^{t}g(s,x^n(s))\mathrm{d}w(s),\quad t\in J,n\geqslant 0.\end{cases}$$

$\{x^n(t)\}$ 在 $\mathscr{M}^2(J,\mathbf{R}^d)$ 中范数收敛同时也 a. s. 地一致收敛于方程(2.1.2)的解 $x(t)$. 不等式(3.1.14)与(3.1.16)用于(2.1.2)可分别表为

$$\mathrm{E}\left(\sup_{t_0\leqslant s\leqslant t}|x(s)|^2\right)\leqslant(1+4\mathrm{E}\|x_0\|^2)\mathrm{e}^{3K(T-t_0+4)(t-t_0)},\tag{3.1.17}$$

$$\begin{cases}\mathrm{E}\left(\sup\limits_{t_0\leqslant s\leqslant t}|x^n(s)-x(s)|^2\right)\leqslant\dfrac{2c[M(t-t_0)]^n}{n!}\mathrm{e}^{2M(t-t_0)},\\ c=2K(T-t_0+4)(T-t_0)(1+\mathrm{E}|x_0|^2),\quad M=2\bar{K}(T-t_0+4),\end{cases}\tag{3.1.18}$$

其中式(3.1.17)类似于(2.1.7);而式(3.1.18)对于(2.1.2)当然是新的.

类似于定理 2.1.3,对于 SFDE 也有以下一般存在定理.

定理 3.1.3 设 I 是以 t_0 为左端点的一个有限或无限区间,f 与 g 在 $I\times C$ 上有定义且满足以下条件:

(i) 局部 Lipschtz 条件:任给紧区间 $J\subset I$ 与 $n\in\mathbf{N}$, 存在正常数 K_{Jn}, 使得当 $t\in J,\varphi,\psi\in C$, $\|\varphi\|\vee\|\psi\|\leqslant n$ 时有

$$|f(t,\varphi)-f(t,\psi)|^2\vee|g(t,\varphi)-g(t,\psi)|^2\leqslant K_{Jn}\|\varphi-\psi\|^2;\tag{3.1.19}$$

(ii) 线性增长条件:任给紧空间 $J\subset I$, 存在正常数 K_J, 使得在 $J\times C$ 上成立

$$|f(t,\varphi)|^2\vee|g(t,\varphi)|^2\leqslant K_J(1+\|\varphi\|^2).\tag{3.1.20}$$

则对任给 $\xi\in L^2_{\mathscr{F}_{t_0}}(\Omega,C)$, 方程(3.1.5)存在唯一具有初值 ξ 的解 $x(t)(t\in I_\tau)$, 且 $x(t)\in\mathscr{M}^2(I_\tau,\mathbf{R}^d)$.

定理 3.1.2 与定理 3.1.3 当然可用于方程(3.1.6). 设 f 与 g 依(3.1.7),则要 f 与 g 满足条件(3.1.9)与(3.1.10),只要以下条件分别满足:

$$|F(t,x_0,x_1,\cdots,x_k)-F(t,y_0,y_1,\cdots,y_k)|^2$$
$$\vee|G(t,x_0,x_1,\cdots,x_k)-G(t,y_0,y_1,\cdots,y_k)|^2$$

$$\leqslant \bar{K}\sum_{i=0}^{k}|x_i - y_i|^2,\quad t\in J, x_i, y_i \in \mathbf{R}^d, \tag{3.1.21}$$

$$|F(t,x_0,x_1,\cdots,x_k)|^2 \vee |G(t,x_0,x_1,\cdots,x_k)|^2$$

$$\leqslant K\left(1+\sum_{i=0}^{k}|x_i|^2\right),\quad t\in J, x_i\in \mathbf{R}^d. \tag{3.1.22}$$

实际上,Lipschitz 条件(3.1.21)可以放宽为

$$|F(t,x,x_1,\cdots,x_k) - F(t,\bar{x},x_1,\cdots,x_k)|^2$$

$$\vee |G(t,x,x_1,\cdots,x_k) - G(t,\bar{x},x_1,\cdots,x_k)|^2$$

$$\leqslant \bar{K}|x-\bar{x}|^2. \tag{3.1.23}$$

今以较简单的方程

$$\mathrm{d}x(t) = F(t,x(t),x(t-\tau))\mathrm{d}t + G(t,x(t),x(t-\tau))\mathrm{d}w(t)$$

来说明这一点,其中 $\tau > 0$. 在区间 $[t_0, t_0+\tau]$ 上方程可转化为一个非延迟的 SDE:

$$\mathrm{d}x(t) = F(t,x(t),\xi(t-t_0-\tau))\mathrm{d}t + G(t,x(t),\xi(t-t_0-\tau))\mathrm{d}w(t),$$

其中 ξ 是方程的给定初值. 因此,只要函数 $F(t,x,y)$ 与 $G(t,x,y)$ 满足线性增长条件与对变元 x 的 Lipschitz 条件,以上方程在区间 $[t_0,t_0+\tau]$ 上就有具初值 $\xi(0)$ 的唯一解存在. 重复以上过程,最终可将解右延至整个区间 J 上.

对应于条件(3.1.19)与(3.1.20),自然亦可得出类似于(3.1.23)与(3.1.22)的条件,不必细述.

与定理 3.1.2 比较,存在定理 3.1.3 的条件已有所放宽. 但对于许多应用上常见的方程, 定理 3.1.3 中的条件仍然太强而无法满足. 对于不显含 t 的函数 f 与 g, 定理 3.1.3 的条件(ii)与定理 3.1.2 中条件(ii)比较并无任何放宽. 若仅用条件(i),则如同在 ODE 理论中一样,只能得出一个局部的存在性结果. 我们写出以下结果以备用.

定理 3.1.4　设 I 是一个以 t_0 为左端点的区间,f 与 g 在 $I\times C$ 上定义且满足局部 Lipschitz 条件(依定理 3.1.3 条件(i)). 则对每个 $\xi \in L^2_{\mathscr{F}_{t_0}}(\Omega, C)$, 存在 $[t_0,\rho) \subset I$, 使得方程(3.1.5)在区间 $[t_0-\tau,\rho)$ 上存在唯一以 ξ 为初值的解 $x(t)$.

如上的 $x(t)$ 称为**局部解**. 依据与 ODE 理论同样的思想,经适当的延拓程序,总可将一个局部解扩张为一个**极大解**,后者的定义区间已不能再扩大.

3.1.3　解的估计

现在考虑能否得到类似于 2.1.2 节中的结果. 以下总设方程(3.1.5)的初值问题的解 $x(t,\xi)$ 在所考虑的区间 J 或 $[t_0,\infty)$ 内唯一地存在,且 $x(t,\xi)\in \mathscr{M}^2(J,\mathbf{R}^d)$.

方程(3.1.5)与(2.1.2)的差别,简单说来就是:方程右端原为 $x(t)$ 的地方换成了 x_t,这一变化使得原为 SDE 设计的某些论证对 SFDE 失效. 例如,观察定理2.1.4 的证明可以看出,对于 SFDE 不能实施同样的论证. 这就毫不奇怪,对于 SFDE 我们无法建立一个对应于定理2.1.4 的结果. 另一方面,注意到

$$\mathrm{E}\|x_t\|^p = \mathrm{E}\Big(\sup_{t-\tau\leqslant s\leqslant t}|x(s)|^p\Big),$$

在推广定理2.1.6 时 x_t 的出现似乎并不足为患. 且看下面的结果.

定理3.1.5 设 $p>0, x(t)=x(t,\xi), \xi\in L^2\cap L^p$. 若线性增长条件(3.1.10)满足,则有以下估计:

$$\begin{cases}\mathrm{E}\Big(\sup\limits_{t_0-\tau\leqslant s\leqslant t}|x(s)|^p\Big)\leqslant 3\mathrm{E}(1+\|\xi\|^2)^{p/2}\mathrm{e}^{\beta(t-t_0)}, & t\in J,\\ \beta = p[2\sqrt{K}+K(32p+1+|p-2|)].\end{cases} \tag{3.1.24}$$

注 初看起来,矩估计(3.1.24)似乎颇类似于估计(3.1.14). 但实际上二者有着本质差别:式(3.1.14)与区间长度 $T-t_0$ 有关,而式(3.1.24)则完全不涉及 T,因而可用于任意区间. 这一差别使得二者的证法很不相同. 在§3.3 中还将遇到类似问题.

证 套用定理2.1.6 的证法,只是作一些小的修改,以便对付出现时滞后的新情况. 令 $y=\sqrt{1+|x|^2}$,约定

$$h(t)=\mathrm{E}\Big(\sup_{t_0-\tau\leqslant s\leqslant t}y^p(s)\Big),\quad h_0(t)=\mathrm{E}\Big(\sup_{t_0\leqslant s\leqslant t}y^p(s)\Big).$$

显然有

$$\mathrm{E}\Big(\sup_{t_0-\tau\leqslant s\leqslant t}|x(s)|^p\Big)\leqslant h(t)\leqslant \mathrm{E}(1+\|\xi\|^2)^{p/2}+h_0(t). \tag{3.1.25}$$

首先估计 $h_0(t)$,下面的推演与定理2.1.6 之证是非常接近的:

$$\begin{aligned}
&h_0(t)-\mathrm{E}y^p(t_0)\\
\leqslant{}& \frac{p}{2}\mathrm{E}\int_{t_0}^t y^{p-2}(s)[2|x^{\mathrm{T}}(s)f(s,x_s)|+(1+|p-2|)|g(s,x_s)|^2]\mathrm{d}s\\
&+p\mathrm{E}\Big[\sup_{t_0\leqslant s\leqslant t}\Big|\int_{t_0}^s y^{p-2}(r)x^{\mathrm{T}}(r)g(r,x_r)\mathrm{d}w(r)\Big|\Big]\\
\leqslant{}& \frac{p}{2}[2\sqrt{K}+K(1+|p-2|)]\mathrm{E}\int_{t_0}^t y^{p-2}(s)(1+\|x_s\|^2)\mathrm{d}s\\
&+\mathrm{E}\Big[32p^2\int_{t_0}^t y^{2p-2}(s)|g(s,x_s)|^2\mathrm{d}s\Big]^{1/2}\\
\leqslant{}& c_1\int_{t_0}^t \mathrm{E}(1+\|x_s\|^2)^{p/2}\mathrm{d}s \qquad \Big(c_1=\frac{p}{2}[2\sqrt{K}+K(1+|p-2|)]\Big)\\
&+\mathrm{E}\Big[\sup_{t_0\leqslant s\leqslant t}y^p(s)\cdot 32Kp^2\int_{t_0}^t(1+\|x_s\|^2)^{p/2}\mathrm{d}s\Big]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{1}{2}h_0(t) + \frac{\beta}{2}\int_{t_0}^{t} \mathrm{E}(1 + \|x_s\|^2)^{\frac{p}{2}} \mathrm{d}s \qquad (\beta \text{ 依}(3.1.24))$$

$$\leqslant \frac{1}{2}h_0(t) + \frac{\beta}{2}\int_{t_0}^{t} h(s)\mathrm{d}s.$$

由以上不等式解出 $h_0(t)$，然后代入(3.1.25)得

$$h(t) \leqslant 3\mathrm{E}(1 + \|\xi\|^2)^{p/2} + \beta\int_{t_0}^{t} h(s)\mathrm{d}s.$$

然后用 Gronwall 不等式与(3.1.25)即得所要证. □

注意,尽管式(3.1.24)与(2.1.17)几乎一致,但定理 3.1.5 并未涵盖定理 2.1.6. 其原因是,由于时滞的存在,在证定理 3.1.5 时我们不得不采用了稍不同于证定理 2.1.6 的方法,而这样做的后果并不能因取 $\tau = 0$ 而完全消失.

若 $p = 2$，则改用 $y = |x|$ 可得到稍精细的结果：

$$\begin{cases} \mathrm{E}\left(\sup\limits_{t_0-\tau\leqslant s\leqslant t} |x(s)|^p\right) \leqslant (1 + 3\mathrm{E}\|\xi\|^2)\mathrm{e}^{\beta(t-t_0)}, \quad t \in J, \\ \beta = 4\sqrt{K} + 130K. \end{cases} \tag{3.1.26}$$

式(3.1.26)与(2.1.18b)也是几乎一致的.

定理 2.1.7 的推广没什么问题,所不同的是,此处要用到定理 3.1.5,而证明定理 2.1.7 时所用的定理 2.1.4 在此并无相应的推广.

定理 3.1.6 设线性增长条件(3.1.10)满足，$x(t) = x(t,\xi)$，$p > 0$.

(i) 若 $\xi \in L^2 \cap L^p$，则对任给 $t,s \in J$ 有估计：

$$\mathrm{E}|x(t) - x(s)|^p \leqslant C_p|t - s|^{p/2}, \quad t,s \in J, \tag{3.1.27}$$

其中 C_p 是与 t,s 无关的正常数. 因此，$x(t)$ 在 J 上 p 阶矩连续.

(ii) 设 ξ 有界，τ_n 是停时序列，$t_0 \leqslant \tau_n \leqslant t \leqslant T$，$\tau_n \to t$，则

$$\mathrm{E}|x(\tau_n)|^p \to \mathrm{E}|x(t)|^p.$$

证 (i) 如同定理 2.1.7 之证，可设 $p \geqslant 2$. 固定 $t_0 \leqslant s < t \leqslant T$，则

$$\mathrm{E}|x(t) - x(s)|^p$$

$$\leqslant 2^{p-1}\mathrm{E}\left|\int_s^t f(r,x_r)\mathrm{d}r\right|^p + 2^{p-1}\mathrm{E}\left|\int_s^t g(r,x_r)\mathrm{d}w(r)\right|^p \qquad (\text{用}(3.1.8))$$

$$\leqslant 2^{p-1}(t-s)^{p-1}\mathrm{E}\int_s^t |f(r,x_r)|^p\mathrm{d}r \qquad (\text{用 Hölder 不等式})$$

$$+ \text{const}\,(t-s)^{\frac{p}{2}-1}\mathrm{E}\int_s^t |g(r,x_r)|^p\mathrm{d}r \qquad (\text{用}(1.3.45))$$

$$\leqslant \text{const}\,(t-s)^{\frac{p}{2}-1}\int_s^t \mathrm{E}(1 + \|x_r\|^2)^{\frac{p}{2}}\mathrm{d}r \qquad (\text{用}(3.1.10))$$

$$\leqslant \text{const}\,(t-s)^{\frac{p}{2}-1}\int_s^t h(r)\mathrm{d}r \qquad (h(\cdot) \text{ 依定理 3.1.5 之证})$$

$$\leqslant \text{const } (t-s)^{\frac{p}{2}-1}\int_s^t e^{\beta(r-t_0)}dr \qquad \text{(用定理 3.1.5)}$$

$$\leqslant \text{const } (t-s)^{\frac{p}{2}}.$$

(ii) 只要证 $E|x(\tau_n)-x(t)|^p \to 0(n\to\infty)$，不妨设 $p\geqslant 1$. 只需将(i)的证法稍作改动：

$$\begin{aligned}
&E|x(\tau_n)-x(t)|^p \\
&\leqslant 2^{p-1}E\left|\int_{\tau_n}^t f(s,x_s)ds\right|^p + 2^{p-1}E\left|\int_{t_0}^t I_{[\tau_n,t]}(s)g(s,x_s)dw(s)\right|^p \\
&\leqslant 2^{p-1}E\left[(t-\tau_n)^{p-1}\int_{\tau_n}^t |f(s,x_s)|^p ds\right] \\
&\quad + \text{const } (t-t_0)^{\frac{p}{2}-1}E\int_{t_0}^t I_{[\tau_n,t]}(s)|g(s,x_s)|^p ds \\
&\leqslant \text{const } E\int_{t_0}^t I_{[\tau_n,t]}(s)\left[1+\sup_{t_0-\tau\leqslant r\leqslant s}|x(r)|^p\right]ds \\
&\leqslant \text{const } [E(t-\tau_n)]^{1/2}\left\{\int_{t_0}^t [1+h(s)]ds\right\}^{1/2} \to 0, \quad n\to\infty,
\end{aligned}$$

其中 $h(\cdot)$ 依定理 3.1.5 之证，只是以 $2p$ 取代 p. □

结合定理 3.1.6(ii)与定理 1.2.11(iv)而得的以下结果，将是§4.3 中讨论的主要依据.

定理 3.1.7 设 $p>0$；线性增长条件(3.1.10)满足；$x(t)=x(t,\xi)$ 是方程(3.1.5)的具有界初值的解，满足不等式

$$\psi(t)|x(t)|^p \geqslant \xi + M(t), \text{a.s.}, \quad t\in J,$$

其中 $\psi(t)$ 是正值连续单调函数，ξ 是 $\mathscr{F}_0$ 可测的非负可积随机变量，$M(t)$ 是实值连续局部鞅，$M(0)=0$. 则

$$\psi(t)E|x(t)|^p \geqslant E\xi, \quad t\in J.$$

证 由定理 1.2.11(iv)，只要验证：设 $\{\tau_n\}$ 是停时序列，$\tau_n\leqslant t\in J$，$\tau_n\to t$，a.s. $(n\to\infty)$，则 $E[\psi(\tau_n)|x(\tau_n)|^p]\to E[\psi(t)|x(t)|^p]$. 固定 t，有

$$\begin{aligned}
&|E[\psi(\tau_n)|x(\tau_n)|^p] - E[\psi(t)|x(t)|^p]| \\
&\leqslant E[|\psi(\tau_n)-\psi(t)||x(\tau_n)|^p] + \psi(t)|E|x(\tau_n)|^p - E|x(t)|^p| \\
&\triangleq I_n + I_n'.
\end{aligned}$$

由定理 3.1.6(ii)有 $I_n'\to 0(n\to\infty)$. 其次，由 Hölder 不等式有

$$\begin{aligned}
I_n^2 &\leqslant E|x(\tau_n)|^{2p}E|\psi(\tau_n)-\psi(t)|^2 \\
&\leqslant E\left(\sup_{s\in J}|x(s)|^{2p}\right)E|\psi(\tau_n)-\psi(t)|^2 \to 0, \quad n\to\infty.
\end{aligned}$$

最后一步用了定理 3.1.5 与控制收敛定理. □

现在转向渐近估计，自然设方程(3.1.5)的解 $x(t,\xi)$ 在 $[t_0-\tau,\infty)$ 上唯一地存在. 我们的目标是推广颇为出色的定理 2.1.8. 直接从定理 3.1.5 推出如下类似于定理 2.1.8(i)的结果是很简单的.

推论 3.1.8 设 f 与 g 在 $[t_0,\infty)\times C$ 上满足线性增长条件(3.1.10)，则

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\, t^{-1}\ln|x(t,\xi)| \leqslant 2\sqrt{K}+65K,\text{a.s.}. \tag{3.1.28}$$

自然，我们更感兴趣的是从某个矩估计推出一个渐近估计，就如同 2.1.8(ii)一样. 但由增长条件(3.1.10)只能得到

$$\mathrm{E}|f(t,x_t)|^2 \leqslant K(1+\mathrm{E}\|x_t\|^2) = K\left[1+\mathrm{E}\left(\sup_{t-\tau\leqslant s\leqslant t}|x(s)|^2\right)\right],$$

矩估计 $\mathrm{E}|x(t)|^p \leqslant \text{const}\ e^{\gamma t}$ 对上式不起作用. 一个补救的方法是适当改造线性增长条件. 下面就是一个这样的结果，它可看作定理 2.1.8(ii)的一个推广.

定理 3.1.9 设 $p>0$，假定对方程(3.1.5)的解 $x(t)=x(t,\xi)$ 有如下矩估计：

$$\mathrm{E}|x(t)|^p \leqslant c e^{\gamma t}, \quad t \geqslant t_0, \tag{3.1.29}$$

其中 $c>0$ 与 $\gamma\in\mathbf{R}$ 为常数. 若 $f(t,x_t)$ 与 $g(t,x_t)$ 满足以下条件之一：

$$\mathrm{E}|f(t,x_t)|^p \vee \mathrm{E}|g(t,x_t)|^p \leqslant K\|x_t\|_0^p, \quad p\geqslant 2, \tag{3.1.30a}$$

$$\mathrm{E}\left(\sup_{t-\tau\leqslant s\leqslant t}|f(s,x_s)|^p\right) \vee \mathrm{E}\left(\sup_{t-\tau\leqslant s\leqslant t}|g(s,x_s)|^p\right)$$
$$\leqslant K\|x_t\|_0^p, \quad 0<p<2, \tag{3.1.30b}$$

其中 K 是正常数，则有以下渐近估计：

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\, t^{-1}\ln|x(t)|^p \leqslant \gamma,\text{a.s.}. \tag{3.1.31}$$

证 不妨设 $\tau>0$. 如在 2.1.2 节中所指出的，只要证(依(2.1.22))

$$\mathrm{E}\left(\sup_{n\tau-\tau\leqslant t\leqslant n\tau}|x(t)|^p\right) = \mathrm{E}\|x_{n\tau}\|^p \leqslant \text{const}\ e^{n\gamma\tau}.$$

(i) 设 $p\geqslant 2$，条件(3.1.30a)满足，则

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\|x_{n\tau}\|^p &\leqslant 3^{p-1}\mathrm{E}|x(n\tau-\tau)|^p + 3^{p-1}\mathrm{E}\left[\int_{n\tau-\tau}^{n\tau}|f(t,x_t)|\,\mathrm{d}t\right]^p \\ &\quad + 3^{p-1}\mathrm{E}\left[\sup_{n\tau-\tau\leqslant t\leqslant n\tau}\left|\int_{n\tau-\tau}^{t} g(s,x_s)\,\mathrm{d}w(s)\right|^p\right] \quad (\text{用}(3.1.8),(1.3.51)) \\ &\leqslant 3^{p-1}\mathrm{E}|x(n\tau-\tau)|^p + (3\tau)^{p-1}\int_{n\tau-\tau}^{n\tau}\mathrm{E}|f(t,x_t)|^p\mathrm{d}t \\ &\quad + \text{const}\ \mathrm{E}\left[\int_{n\tau-\tau}^{n\tau}|g(t,x_t)|^2\mathrm{d}t\right]^{\frac{p}{2}} \quad (\text{用}(1.3.48))\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant 3^{p-1}\mathrm{E}\,|\,x(n\tau-\tau)\,|^p+(3\tau)^{p-1}\int_{n\tau-\tau}^{n\tau}\mathrm{E}\,|\,f(t,x_t)\,|^p\mathrm{d}t\\
&\quad+\mathrm{const}\int_{n\tau-\tau}^{n\tau}\mathrm{E}\,|\,g(t,x_t)\,|^p\mathrm{d}t \qquad\text{(用 Hölder 不等式)}\\
&\leqslant 3^{p-1}\mathrm{E}\,|\,x(n\tau-\tau)\,|^p+\mathrm{const}\int_{n\tau-\tau}^{n\tau}\|\,x_t\,\|_0^p\mathrm{d}t \qquad\text{(用(3.1.30a))}\\
&\leqslant 3^{p-1}\mathrm{E}\,|\,x(n\tau-\tau)\,|^p+\mathrm{const}\sup_{n\tau-2\tau\leqslant t\leqslant n\tau}\mathrm{E}\,|\,x(t)\,|^p\\
&\leqslant \mathrm{const}\ \mathrm{e}^{n\gamma\tau}. \qquad\text{(用(3.1.29))}
\end{aligned}
$$

(ii) 设 $0<p<2$, 条件(3.1.30b)满足,则

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}\,\|\,x_{n\tau}\,\|^p &\leqslant C_p\mathrm{E}\,|\,x(n\tau-\tau)\,|^p+C_p\mathrm{E}\Big[\int_{n\tau-\tau}^{n\tau}|\,f(t,x_t)\,|\,\mathrm{d}t\Big]^p\\
&\quad+C_p\mathrm{E}\Big[\sup_{n\tau-\tau\leqslant t\leqslant n\tau}\Big|\int_{n\tau-\tau}^{t}g(s,x_s)\mathrm{d}w(s)\Big|^p\Big] \qquad\text{(用(1.3.51))}\\
&\leqslant \mathrm{const}\ \mathrm{e}^{n\gamma\tau}+\mathrm{const}\ \mathrm{E}\Big(\sup_{n\tau-\tau\leqslant t\leqslant n\tau}|\,f(t,x_t)\,|^p\Big)\\
&\quad+\mathrm{const}\ \mathrm{E}\Big(\sup_{n\tau u-\tau\leqslant t\leqslant n\tau}|\,g(t,x_t)\,|^p\Big) \qquad\text{(用(1.3.48))}\\
&\leqslant \mathrm{const}\ \mathrm{e}^{n\gamma\tau}+\mathrm{const}\ \|\,x_{n\tau}\,\|_0^p \qquad\text{(用(3.1.30b))}\\
&\leqslant \mathrm{const}\ \mathrm{e}^{n\gamma\tau}.
\end{aligned}
$$

□

式(3.1.30a)当然可以换成稍强的条件:

$$\mathrm{E}\,|\,f(t,\varphi)\,|^p\vee\mathrm{E}\,|\,g(t,\varphi)\,|^p\leqslant K\,\|\,\varphi\,\|_0^p,\quad \varphi\in L_{\mathscr{F}_t}^p(\Omega,C). \tag{3.1.32}$$

若 f 与 g 依式(3.1.7),则易见式(3.1.32)可由以下线性增长条件推出(参照(3.1.22)):

$$|\,F(t,x_0,x_1,\cdots,x_k)\,|^2\vee|\,G(t,x_0,x_1,\cdots,x_k)\,|^2\leqslant K\sum_{i=0}^{k}|\,x_i\,|^2. \tag{3.1.33}$$

§3.2 稳 定 性

本节解决类似于§2.3的问题,但方法上有某些显著变化.现在遇到的主要困难是,在§2.3中比较容易处理且很有效的 $\mathscr{L}V(t,x)$ 对于 SFDE 却显现出一些微妙复杂的情况,需要新的应对办法.本节的核心结果是所谓 **Razumikhin 定理**,它的原型是由俄罗斯学者 Razumikhin(1956,1960)对延迟微分方程建立的;而用于 SFDE 的现代形式则属于 Mao(1996).

考虑 SFDE:

$$\mathrm{d}x(t)=f(t,x_t)\mathrm{d}t+g(t,x_t)\mathrm{d}w(t),\quad t\geqslant 0, \tag{3.2.1}$$

其中f: $\mathbf{R}_+\times C\to\mathbf{R}^d$ 与 g: $\mathbf{R}_+\times C\to\mathbf{R}^{d\times m}$ 已满足适当的条件,使得对任何 $\xi\in L^2_{\mathscr{F}_0}(\Omega,C)$, 方程(3.2.1)的初值问题的解 $x(t,\xi)$ 唯一地存在,且 $x(t,\xi)\in\mathscr{M}^2([-\tau,\infty),\mathbf{R}^d)$. 设定$f(t,0)\equiv 0$, $g(t,0)\equiv 0$,因而方程(3.2.1)有零解. 下面考虑方程(3.2.1)零解的稳定性,主要是矩指数稳定与 a. s. 指数稳定,其定义一如定义 2.3.1,无需重述. 基于本节所用方法的特殊考虑,我们限定f与 g 均为连续函数.

鉴于在 SDE 的稳定性理论中 Liapunov 函数法起着中心作用,我们自然期望,对于 SFDE 亦应发展类似的方法. 然而,很快就会发现,现在面临一些颇为棘手的新情况. 让我们回顾一下,对 SDF 的稳定性问题,Liapunov 函数如何发挥作用. 设 $V(t,x)\in C^{1,2}(\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^d)$, f, g 依方程(2.3.1),则可写出

$$\begin{aligned}\mathscr{L}V(t,x) &= V_t(t,x)+V_x(t,x)f(t,x)\\ &\quad+(1/2)\mathrm{tr}[g^{\mathrm{T}}(t,x)V_{xx}(t,x)g(t,x)],\end{aligned}\tag{3.2.2}$$

它可看作 $\mathscr{L}$ 作用于函数 $V(t,x)$ 的结果, $\mathscr{L}$ 是由 SDE(2.3.1)决定的微分算子,可独立地表如(2.1.11)′. 在 §2.3 中我们曾强调,若 $x(t)$ 是(2.3.1)的解,则 $LV(t,x(t))$ 可看作 $V(t,x)$ "沿 $x(t)$" 的某种导数. 不过,由(2.3.2)所表示的 $\mathscr{L}V(t,x)$ 看作独立变量 $(t,x)\in\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^d$ 的函数也是有意义的;而且,在 §2.3 中正是通过函数 $\mathscr{L}V(t,x)$ 所满足的一定条件来表达方程(2.3.1)的稳定性. 例如,从 $\mathscr{L}V(t,x)\leqslant 0$ 可推出函数 $EV(t,x(t))$ 对 t 单调减,而由此可推出随机稳定性(见定理 2.3.16).

现在我们尝试将 $V(t,x)$ 用于 SFDE(3.2.1). 形如(3.2.2)的式子对于方程(3.2.1)已不再有意义. 如果形式地将(3.2.2)改写为

$$\begin{aligned}\mathscr{L}V(t,x) &= V_t(t,x)+V_x(t,x)f(t,x_t)\\ &\quad+(1/2)\mathrm{tr}[g^{\mathrm{T}}(t,x_t)V_{xx}(t,x)g(t,x_t)],\end{aligned}\tag{$*$}$$

则仅当 $x=x(t)$ 是某个连续函数时,式($*$)才有意义. 因此, $\mathscr{L}V(t,x)$ 已不能像(3.2.2)那样解释为独立变量 (t,x) 的函数. 如果仍然希望构成一个能与(3.2.2)相当的函数,则应以 $(t,\varphi)\in\mathbf{R}_+\times C$ 取代 $(t,x)\in\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^d$ 作为独立变量,将式(3.2.2)改造为

$$\begin{aligned}\mathscr{L}V(t,\varphi) &= V_t(t,\varphi(0))+V_x(t,\varphi(0))f(t,\varphi)\\ &\quad+(1/2)\mathrm{tr}[g^{\mathrm{T}}(t,\varphi)V_{xx}(t,\varphi(0))g(t,\varphi)].\end{aligned}\tag{3.2.3}$$

与式(3.2.2)不同的是,函数 $\mathscr{L}V(t,\varphi)$ 应当作为一个整体看待,而不应看作是"微分算子 $\mathscr{L}$ 作用于函数 $V(t,\varphi)$ 的结果". 需知 $V(t,\varphi)$ 并无定义,除非 $\tau=0$. 若 $x=x(t)$ 是方程(3.2.1)的解,以 $\varphi=x_t$ 代入(3.2.3),则(3.2.3)与式($*$)的右端正好相合. 由 Itô 公式有 $\mathrm{d}V(t,x(t))=\mathscr{L}V(t,x_t)\mathrm{d}t+(\cdots)\mathrm{d}w(t)$; 与(1.3.18)对照得

$$LV(t,x(t)) = \mathscr{L}V(t,x_t). \qquad (3.2.4)$$

正是等式(3.2.4)决定了 $\mathscr{L}V(t,\varphi)$ 对于 SFDE 稳定性理论的作用. 只是应注意式(3.2.4)与(3.2.3)的区别:式(3.2.4)仅用于 $x(t)$ 是方程(3.2.1)的解的情况,而(3.2.3)是对任何 $(t,\varphi) \in \mathbf{R}_+ \times C$ 定义的(对照(2.1.12)).

3.2.1 Razumikhin-Mao 定理

在 §2.3 中,对适当选定的 Liapunov 函数 $V(t,x)$, 通过

$$\mathscr{L}V(t,x) \leqslant 0 \text{ 或 } \mathscr{L}V(t,x)/V(t,x) \leqslant -\mu < 0$$

这一类的条件来推出某种稳定性(参看定理 2.3.16 与定理 2.3.3). 那么,对于 SFDE,是否能用 $\mathscr{L}V(t,\varphi)$ 来表出类似的条件? 下面的回答是:能,但其形式与 SDE 稳定性理论中的条件颇不相同. 例如,类比于 $\mathscr{L}V(t,x)/V(t,x) \leqslant -\mu < 0$, 似乎可使用条件

$$\mathscr{L}V(t,\varphi)/V(t,\varphi(0)) \leqslant -\mu < 0.$$

但实际上这种条件太强了,只需用一个比它宽得多的条件即可推出一定的稳定性结论. 如何将以上条件放宽,则正是本节的核心技巧所在.

以下是本节的中心结果,它可看作定理 2.3.3(i)的一个优美推广.

定理 3.2.1(Mao,1996) 设 $p>0$, 且存在 $V(t,x) \in C^{1,2}([-\tau,\infty) \times \mathbf{R}^d)$ 与常数 $c_1,c_2,\mu>0,q>1$, 使得以下条件满足:

$$c_1|x|^p \leqslant V(t,x) \leqslant c_2|x|^p, \quad t \geqslant -\tau, x \in \mathbf{R}^d, \qquad (3.2.5)$$

$$\begin{cases}\varphi \in L^p_{\mathscr{F}_t}(\Omega,C), \mathrm{E}V(t+\theta,\varphi(\theta)) \leqslant q\mathrm{E}V(t,\varphi(0)), \quad \forall\theta \in [-\tau,0], \\ \Rightarrow \mathrm{E}\mathscr{L}V(t,\varphi) \leqslant -\mu \mathrm{E}V(t,\varphi(0)).\end{cases} \qquad (3.2.6)$$

令 $\gamma = \mu \wedge \tau^{-1}\ln q$. 则对任何有界的初值 ξ, 即 $\xi \in C^b_{\mathscr{F}_0}(\Omega,C)$, 有

$$\mathrm{E}|x(t,\xi)|^p \leqslant (c_2/c_1)\|\xi\|_0^p \mathrm{e}^{-\gamma t}, \quad t \geqslant 0. \qquad (3.2.7)$$

证 鉴于下面的论证将在稍不同的情况下多次重复,我们将尽可能给出一个标准的表述,以作为今后进一步使用时的模本.

取定 $\xi \in C^b_{\mathscr{F}_0}(\Omega,C)$, 令 $x(t)=x(t,\xi)$. 只需对 $\gamma \in (0,\mu \wedge \tau^{-1}\ln q)$ 证不等式(3.2.7)(然后用一极限过程即可过渡到 $\gamma = \mu \wedge \tau^{-1}\ln q$ 的情况). 显然,证(3.2.7)归于证明以下不等式:

$$h(t) \triangleq \mathrm{e}^{\gamma t}\mathrm{E}|x(t)|^p \leqslant (c_2/c_1)\|\xi\|_0^p \triangleq \beta, \quad t \geqslant 0.$$

由条件(3.2.5)知,为此又只要证: $\forall t \geqslant 0$, 有

$$W(t) \triangleq \mathrm{e}^{\gamma t}\mathrm{E}V(t,x(t)) \leqslant \beta c_1. \qquad (3.2.8)$$

首先易得 $W(0) = \mathrm{E}V(0,x(0)) \leqslant \beta c_1$. 其次易见 $W(t)$ 在 $[0,\infty)$ 上连续. 若式(3.2.8)不对所有 $t \geqslant 0$ 成立,则有最小的 $r \in \mathbf{R}_+$, 使得在 $[0,r]$ 上 $W(t) \leqslant \beta c_1$.

必定 $W(r)=\beta c_1$（注意这是要点！）. 今拟对 $\varphi=x_r$ 应用条件(3.2.6)，为此首先应验证用(3.2.6)所需的不等式

$$\mathrm{E}V(t,x(t))\leqslant q\mathrm{E}V(r,x(r)),\quad r-\tau\leqslant t\leqslant r. \tag{3.2.9}$$

若 $0\leqslant t\in[r-\tau,r]$，则

$$\begin{aligned}\mathrm{E}V(t,x(t))&=\mathrm{e}^{-\gamma t}W(t)\leqslant \mathrm{e}^{\gamma(r-t)}\mathrm{E}V(r,x(r))\\&\leqslant \mathrm{e}^{\gamma\tau}\mathrm{E}V(r,x(r))\leqslant q\mathrm{E}V(r,x(r)),\end{aligned}$$

最后一步用到 $\gamma<\tau^{-1}\ln q$（这推出 $\mathrm{e}^{\gamma\tau}<q$）. 若 $r-\tau\leqslant t<0$，则

$$\begin{aligned}\mathrm{E}V(t,x(t))&\leqslant c_2\mathrm{E}\,|\,x(t)\,|^p\leqslant c_2\,\|\xi\|_0^p=W(r)\\&\leqslant \mathrm{e}^{\gamma\tau}\mathrm{E}V(r,x(r))\leqslant q\mathrm{E}V(r,x(r)).\quad (\text{用 } r<\tau)\end{aligned}$$

于是式(3.2.9)得证，因而由条件(3.2.6)有

$$\mathrm{E}LV(r,x(r))=\mathrm{E}\mathscr{L}V(r,x_r)\leqslant-\mu\mathrm{E}V(r,x(r)).$$

必定 $\mathrm{E}V(r,x(r))>0$，否则 $W(r)=0$，从而 $\|\xi\|_0^p=0$，这推出 $\xi(\theta)=0$, a. s. $(\forall\theta\in[-\tau,0])$，因而 $x(t)$ 是零解，这就推出式(3.2.8)对任何 $t\geqslant0$ 成立了. 因此，利用 $\gamma<\mu$ 及连续性（这是要点！）得出，当 t 邻近 r 时有

$$\mathrm{E}LV(t,x(t))\leqslant-\gamma\mathrm{E}V(t,x(t)).$$

于是，对充分小的 $\delta>0$ 有

$$\begin{aligned}W(t)\Big|_r^{r+\delta}&=\int_r^{r+\delta}\mathrm{E}L[\mathrm{e}^{\gamma t}V(t,x(t))]\mathrm{d}t\\&=\int_r^{r+\delta}\mathrm{e}^{\gamma t}[\mathrm{E}LV(t,x(t))+\gamma\mathrm{E}V(t,x(t))]\mathrm{d}t\leqslant0,\end{aligned}$$

从而 $W(r+\delta)\leqslant W(r)$. 这就与对 r 的假设相矛盾. 因此，式(3.2.8)必对任何 $t\geqslant0$ 成立，如所要证. □

试与定理 2.3.3(i)作一对照. 定理 3.2.1 中的条件(3.2.5)就是定理 2.3.3 中的条件(2.3.21)，它几乎是例行的，可以置而不论. 定理 3.2.1 的关键条件无疑是(3.2.6)，它相当于定理 2.3.3 中的条件(2.3.22a)，即 $\mathscr{L}V(t,x)/V(t,x)\leqslant-\mu<0$. 但现在与此相对应的不等式 $\mathrm{E}\mathscr{L}V(t,\varphi)/\mathrm{E}V(t,\varphi(0))\leqslant-\mu$ 并不需要对任何 $\varphi\in L^2_{\mathscr{F}_t}(\Omega,C)$ 成立，而只要对某些特殊的 φ 成立就够了. 条件(3.2.6)的微妙之处全在于此. 为了说明条件(3.2.6)中限定 φ 的必要性，试看如下简单的一维线性方程：

$$\mathrm{d}x(t)=-ax(t)\mathrm{d}t+bx(t-\tau)\mathrm{d}w(t),$$

其中 $a>0,0\neq b\in\mathbf{R}$. 令 $f(t,\varphi)=-a\varphi(0),g(t,\varphi)=b\varphi(-\tau),V=x^2$，则

$$\mathrm{E}\mathscr{L}V(t,\varphi)+\mu\mathrm{E}V(t,\varphi(0))=(\mu-2a)\mathrm{E}\varphi^2(0)+b^2\mathrm{E}\varphi^2(-\tau).$$

无论如何选择 $\mu>0$，要使上式对任何 $\varphi\in L^2_{\mathscr{F}}(\Omega,C)$ 均 $\leqslant0$，显然是不可能的，除非 $\tau=0,2a>b^2+\mu$. 但若限定 $\mathrm{E}\varphi^2(\theta)\leqslant q\mathrm{E}\varphi^2(0)\,(\theta\in[-\tau,0],q>1)$，则只要 $2a>b^2,q-1$ 与 μ 充分小，就能使条件(3.2.6)满足.

定理 3.2.1 的成功应用主要取决于条件(3.2.6)的适当具体化,而这与加于 f 与 g 的条件有关. 显然,此处已不能简单地照搬 2.3.2 节中的处理方法了.

条件(3.2.5)对于函数 $V(t,x)$ 是一个较强的制约. 满足此条件的 V 类似于函数 $|x|^p$. 若取 $V=|x|^p$,则 V 自动地满足条件(3.2.5),而条件(3.2.6)则可表为

$$\begin{cases}\varphi\in L^p_{\mathscr{F}_t}(\Omega,C),\ \|\varphi\|_0^p\leqslant q\mathrm{E}|\varphi(0)|^p\\ \Rightarrow(p/2)\mathrm{E}\{|\varphi(0)|^{p-2}[2\varphi^{\mathrm{T}}(0)f(t,\varphi)+|g(t,\varphi)|^2]\\ \qquad+(p-2)|\varphi(0)|^{p-4}|\varphi^{\mathrm{T}}(0)g(t,\varphi)|^2\}\leqslant-\mu\mathrm{E}|\varphi(0)|^p.\end{cases}\tag{3.2.10}$$

其次,观察定理 3.2.1 的证明看出,我们仅对 $\varphi=x_r$ 用了条件(3.2.6). 因此在条件(3.2.6)与(3.2.10)的表述中,可将 φ 换成 x_t,$x(t)$ 是方程(3.2.1)的解. 例如条件(3.2.10)可改换成

$$\begin{cases}\text{若}\,x(t)\,\text{是(3.2.1)的解},\ t\geqslant0,\ \|x_t\|_0^p\leqslant q\mathrm{E}|x(t)|^p,\\ \text{则}(p/2)\mathrm{E}\{|x(t)|^{p-2}[2x^{\mathrm{T}}(t)f(t,x_t)+|g(t,x_t)|^2]\\ \qquad+(p-2)|x(t)|^{p-4}|x^{\mathrm{T}}(t)g(t,x_t)|^2\}\leqslant-\mu\mathrm{E}|x(t)|^p.\end{cases}\tag{3.2.11}$$

对于后面将用到的与(3.2.6)相当的条件,都可作类似的改变. 但这种改变未必有助于条件的验证.

对于 a.s. 指数稳定性,是否能建立一个对应于定理 2.3.9 的结果是一个有待仔细考虑的问题(参看定理 4.1.19),目前且搁下不论. 不过,容易看出联系矩指数稳定与 a.s. 指数稳定的定理 2.3.7 有如下推广.

定理 3.2.2 设条件(3.1.30)满足,方程(3.2.1)的零解 p 阶矩指数稳定,则(3.2.1)的零解亦必 a.s. 指数稳定. 特别,在定理 3.2.1 的条件下,若加上条件(3.1.30)满足,则方程(3.2.1)的零解 a.s. 指数稳定.

这是定理 3.1.9 与定理 3.2.1 的直接推论.

有了定理 3.2.1 这一核心结果之后,下面将其用到一些特殊类型的方程,逐步将条件(3.2.6)具体化,使之变得较易实际运用.

3.2.2 延迟微分方程

考虑方程(参看(3.1.6)):

$$\begin{aligned}dx(t)&=F(t,x(t),x(t-\delta_1(t)),\cdots,x(t-\delta_k(t)))dt\\&\quad+G(t,x(t),x(t-\delta_1(t)),\cdots,x(t-\delta_k(t)))dw(t),\end{aligned}\tag{3.2.12}$$

其中 $\delta_j(\cdot):\mathbf{R}_+\to[0,\tau]$ 是非零连续函数,$F:\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^{d(k+1)}\to\mathbf{R}^d$ 与 $G:\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^{d(k+1)}\to\mathbf{R}^{d\times m}$ 连续且满足存在唯一性定理所要求的条件:

$$F(t,0,\cdots,0)\equiv0,\quad G(t,0,\cdots,0)\equiv0,$$

因而方程(3.2.12)有零解. 对方程(3.2.12)应用定理 3.2.1 与 3.2.2 的关键在于将条件(3.2.6)及(3.1.30)表为易于验证的适当条件. 下面分几步做到这一点.

定理 3.2.3 设 $p > 0$. 若存在 $V(t,x) \in C^{1,2}([-\tau,\infty) \times \mathbf{R}^d)$ 与常数 $c_1, c_2, \lambda_0 > 0, \lambda_j \geq 0$, 使得条件(3.2.5)及以下条件满足:

$$\begin{cases} V_t(t,x) + V_x(t,x)F(t,x,y) + (1/2)\mathrm{tr}[G^{\mathrm{T}}(t,x,y)V_{xx}(t,x)G(t,x,y)] \\ \leq -\lambda_0 V(t,x) + \sum_j \lambda_j V(t-\delta_j(t), y_j), & (3.2.13\mathrm{a}) \\ \lambda_0 > \sum_j \lambda_j, & (3.2.13\mathrm{b}) \end{cases}$$

其中 $t \geq 0, x \in \mathbf{R}^d, y = (y_1, y_2, \cdots, y_k) \in \mathbf{R}^{dk}$, 则方程(3.2.12)的零解 p 阶矩指数稳定. 若进而设 $p \geq 2$, 且 F 与 G 满足线性增长条件(参看(3.1.33))

$$|F(t,x_0,x_1,\cdots,x_k)| \vee |G(t,x_0,x_1,\cdots,x_k)| \leq K\sum_{i=0}^{k}|x_i|, \quad (3.2.14)$$

其中 $(t,x_0,x_1,\cdots,x_k) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^{d(k+1)}$, K 是正常数,则方程(3.2.12)的零解 a. s. 指数稳定.

证 设 $f(t,\varphi)$ 与 $g(t,\varphi)$ 依(3.1.7),则方程(3.2.12)可写成标准的 SFDE (3.2.1). 如同(3.1.33)蕴涵(3.1.30a)一样,从条件(3.2.14)亦不难推出(3.1.30a). 因此,一旦确立了矩指数稳定性,则定理的 a. s. 指数稳定结论可从定理 3.2.2 得出,故下面只需证矩指数稳定性. 而由定理 3.2.1,又只需验证条件(3.2.6)并确定其中的参数 μ, q 等,这件事基于条件(3.2.13). 首先结合式(3.2.3),(3.2.13)与(3.1.7)有

$$\begin{aligned} \mathscr{L}V(t,\varphi) &= V_t(t,\varphi(0)) + V_x(t,\varphi(0))F(t,\varphi(0),\varphi(-\delta_1(t)),\cdots,\varphi(-\delta_k(t))) \\ &\quad + (1/2)\mathrm{tr}[G^{\mathrm{T}}(t,\varphi(0),\varphi(-\delta_1(t)),\cdots,\varphi(-\delta_k(t)))V_{xx}(t,\varphi(0)) \\ &\quad \times G(t,\varphi(0),\varphi(-\delta_1(t)),\cdots,\varphi(-\delta_k(t)))] \\ &\leq -\lambda_0 V(t,\varphi(0)) + \sum_j \lambda_j V(t-\delta_i(t),\varphi(-\delta_j(t))). \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

设 $\varphi \in L^p_{\mathscr{F}_t}(\Omega, C)$ 满足 $\mathrm{E}V(t+\theta,\varphi(\theta)) \leq q\mathrm{E}V(t,\varphi(0))$ ($\forall \theta \in [-\tau,0]$), 其中 $q > 1$ 待定,则由不等式(3.2.15)有 $\mathrm{E}\mathscr{L}V(t,\varphi) \leq -\mu \mathrm{E}V(t,\varphi(0))$, 其中

$$\mu = \lambda_0 - \sum_j q\lambda_j \triangleq \mu(q).$$

因 $\mu(1) > 0$ (用(3.2.13b)),故必有 $q > 1$ 使 $\mu = \mu(q) > 0$. 这就验证了条件(3.2.6),于是定理得证. □

注 若取 q 为方程 $\mu(q) = \tau^{-1}\ln q$ 在 $(1,\infty)$ 内的唯一解,则 $\gamma = \mu(q) = \mu \wedge \tau^{-1}\ln q$,这样所得的 γ 是"最大的".

条件(3.2.13)已比(3.2.6)稍具体些,但还只是朝实用化方向前进了一小步.关键的问题是应选定一适当的 Liapunov 函数 V. 前面已提到可用 $V = |x|^p$, 现在就用这一选择来得出一个更进一步的结果.

定理 3.2.4 设 $p \geqslant 2$. 若存在常数 $\lambda > 0, \alpha_0, \alpha_j, \beta_0, \beta_j \geqslant 0$, 使得以下两组条件之一满足:

$$\begin{cases} x^{\mathrm{T}} F(t,x,0) \leqslant -\lambda |x|^2, & (3.2.16\mathrm{a}) \\ |F(t,x,0) - F(t,x_0,y)| \leqslant \alpha_0 |x - x_0| + \sum_j \alpha_j |y_j|, & (3.2.16\mathrm{b}) \\ |G(t,x,y)|^2 \leqslant \beta_0 |x|^2 + \sum_j \beta_j |y_j|^2, & (3.2.16\mathrm{c}) \\ 2\lambda > 2\alpha + (p-1)\beta; & (3.2.16\mathrm{d}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^{\mathrm{T}} F(t,x,\cdots,x) \leqslant -\lambda |x|^2, & (3.2.17\mathrm{a}) \\ |F(t,x,\cdots,x) - F(t,y_0,y_1,\cdots,y_k)|^p \leqslant \sum_{i=0}^{k} \alpha_i |x - y_i|^p, & (3.2.17\mathrm{b}) \\ |G(t,x,y)|^p \leqslant \beta_0 |x|^p + \sum_j \beta_j |y_j|^p, & (3.2.17\mathrm{c}) \\ 2\lambda > 2(K\alpha)^{1/p} + (p-1)\beta^{2/p}, & (3.2.17\mathrm{d}) \end{cases}$$

以上 $t \geqslant 0, x, x_0, y_0 \in \mathbf{R}^d, y = (y_1, y_2, \cdots, y_k) \in \mathbf{R}^{dk}$,

$$\alpha = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i, \quad \beta = \sum_{i=0}^{k} \beta_i, K = 2^{p-1}\left[\tau^p(\alpha_0 + \alpha) + \beta\left(\frac{\tau p(p-1)}{2}\right)^{p/2}\right], \tag{3.2.18}$$

则方程(3.2.12)的零解 p 阶矩指数稳定与 a. s. 指数稳定.

证 由条件(3.2.16b),(3.2.16c)或(3.2.17b),(3.2.17c)推出条件(3.2.14)是不成问题的. 关键是对 $V = |x|^p$ 验证条件(3.2.13),或与(3.2.6)相当的条件(3.2.11). 条件(3.2.16)与(3.2.17)看起来很类似,但下面的处理方法并不相同,后者要复杂些,其结果似乎也较精细.

(i) 设条件(3.2.16)满足,今验证条件(3.2.13). 当 $V = |x|^p$ 时,

$$\begin{aligned} (3.2.13\mathrm{a})\ 之左端 &= (p/2)|x|^{p-2}[2x^{\mathrm{T}}F(t,x,y) + |G(t,x,y)|^2 \\ &\quad + (p-2)|x|^{-2}|x^{\mathrm{T}}G(t,x,y)|^2] \\ &\leqslant -\lambda p|x|^p + p|x|^{p-1}|F(t,x,0) - F(t,x,y)| \\ &\quad + \frac{p(p-1)}{2}|x|^{p-2}|G(t,x,y)|^2 \qquad (用(3.2.16\mathrm{a})) \\ &\leqslant -\lambda p|x|^p + p\sum_j \alpha_j |x|^{p-1}|y_j| \qquad (用(3.2.16\mathrm{b})) \end{aligned}$$

$$+\frac{p(p-1)}{2}\left(\beta_0|x|^p+\sum_j\beta_j|x|^{p-2}|y_j|^2\right) \qquad (\text{用}3.2.16\text{c})$$

$$\leqslant -\lambda p|x|^p+\sum_j\alpha_j[(p-1)|x|^p+|y_j|^p] \qquad (\text{用}(1.3.55))$$

$$+\frac{(p-1)}{2}\left\{p\beta_0|x|^p+\sum_j\beta_j[(p-2)|x|^p+2|y_j|^p]\right\}$$

$$=-\lambda_0|x|^p+\sum_j\lambda_j|y_j|^p,$$

其中 $\lambda_j=\alpha_j+\beta_j(p-1)$,

$$\lambda_0=\lambda p-\alpha(p-1)-\frac{p(p-1)}{2}\beta_0-\frac{(p-1)(p-2)}{2}(\beta-\beta_0).$$

利用(3.2.16d)易验证 $\lambda_0>\sum\lambda_j$，因此条件(3.2.13)满足.

（ii）设条件(3.2.17)满足，下面验证条件(3.2.11)（注意此处以(3.2.11)取代(3.2.10)为宜），但采取一关键措施：取 $t_0=\tau$，而以 2τ 为时滞. 设 $x(t)$ 是方程(3.2.12)的解，满足

$$\mathrm{E}|x(s)|^p\leqslant q\mathrm{E}|x(t)|^p,\quad \forall s\in[t-2\tau,t],q>1\text{ 待定}. \qquad (3.2.19)$$

为便于书写，下面暂时记 $F=F(t)=F(t,x(t),x(t-\delta_1(t)),\cdots,x(t-\delta_k(t)))$，$G$ 仿此，$\bar{F}=F(t,x(t),\cdots,x(t))$. 今估计（参看(3.2.11)）

$$I\triangleq(p/2)\mathrm{E}[2|x(t)|^{p-2}x^{\mathrm{T}}(t)F+|x(t)|^{p-2}|G|^2$$

$$+(p-2)|x(t)|^{p-4}|x^{\mathrm{T}}(t)G|^2]$$

$$\leqslant-\lambda p\mathrm{E}|x(t)|^p+p\mathrm{E}[|x(t)|^{p-1}|F-\bar{F}|]$$

$$+\frac{p(p-1)}{2}\mathrm{E}[|x(t)|^{p-2}|G|^2] \qquad (\text{用}(3.2.17\text{a}))$$

$$\leqslant-\lambda p\mathrm{E}|x(t)|^p+(p-1)\varepsilon^{\frac{p}{p-1}}\mathrm{E}|x(t)|^p+\varepsilon^{-p}\mathrm{E}|F-\bar{F}|^p \qquad (\text{用}(1.3.54))$$

$$+\frac{(p-1)(p-2)}{2}\delta^{\frac{p}{p-2}}\mathrm{E}|x(t)|^p+(p-1)\delta^{-\frac{p}{2}}\mathrm{E}|G|^p \qquad (\varepsilon,\delta>0\text{ 待定})$$

$$\leqslant-\left[\lambda p-(p-1)\varepsilon^{\frac{p}{p-1}}-\frac{(p-1)(p-2)}{2}\delta^{\frac{p}{p-2}}\right]\mathrm{E}|x(t)|^p$$

$$+\varepsilon^{-p}\sum_j\alpha_j\mathrm{E}|x(t)-x(t-\delta_j(t))|^p \qquad (\text{用}(3.2.17\text{b}))$$

$$+(p-1)\delta^{-\frac{p}{2}}\sum_{i=0}^k\beta_i\mathrm{E}|x(t-\delta_i(t))|^p; \qquad (\text{用}(3.2.17\text{c}))$$

$$\mathrm{E}|x(t)-x(t-\delta_j(t))|^p=\mathrm{E}\left|\int_{t-\delta_j(t)}^t F(s)\mathrm{d}s+G(s)\mathrm{d}w(s)\right|^p$$

$$\leqslant 2^{p-1}\mathrm{E}\left|\int_{t-\delta_j(t)}^t F(s)\mathrm{d}s\right|^p+2^{p-1}\mathrm{E}\left|\int_{t-\delta_j(t)}^t G(s)\mathrm{d}w(s)\right|^p$$

$$\leqslant (2\tau)^{p-1}\mathrm{E}\int_{t-\tau}^{t} |F(s)|^p \mathrm{d}s \qquad \text{(用 Hölder 不等式)}$$

$$+ 2^{p-1}\tau^{\frac{p}{2}-1}\left[\frac{p(p-1)}{2}\right]^{\frac{p}{2}}\mathrm{E}\int_{t-\tau}^{t} |G(s)|^p \mathrm{d}s \qquad \text{(用(1.3.45))}$$

$$\leqslant (2\tau)^{p-1}\sum_{i=0}^{k}\alpha_i\int_{t-\tau}^{t}\mathrm{E}|x(s-\delta_i(s))|^p\mathrm{d}s \qquad \text{(用(3.2.17b))}$$

$$+ 2^{p-1}\tau^{\frac{p}{2}-1}\left[\frac{p(p-1)}{2}\right]^{\frac{p}{2}}\sum_{i=0}^{k}\beta_i\int_{t-\tau}^{t}\mathrm{E}|x(s-\delta_i(s))|^p\mathrm{d}s \qquad \text{(用(3.2.17c))}$$

$$\leqslant q\mathrm{E}|x(t)|^p\left[(2\tau)^{p-1}\tau(\alpha_0+\alpha) + 2^{p-1}\beta\left(\frac{\tau p(p-1)}{2}\right)^{\frac{p}{2}}\right] \qquad \text{(用(3.2.19))}$$

$$= Kq\mathrm{E}|x(t)|^p,$$

以上用到 $\delta_0(t)\equiv 0$ 与 $\mathrm{E}|x(t-\delta_i(t))|^p \leqslant q\mathrm{E}|x(t)|^p$（依(3.2.19)）. 综合以上结果代入 I 得 $I \leqslant -\mu\mathrm{E}|x(t)|^p$, 其中

$$\mu = \lambda p - (p-1)\varepsilon^{\frac{p}{p-1}} - \frac{(p-1)(p-2)}{2}\delta^{\frac{p}{p-2}}$$
$$- Kq\varepsilon^{-p}\alpha - q(p-1)\delta^{-p/2}\beta. \qquad (3.2.20)$$

当 $q=1$ 时从 $\partial\mu/\partial\varepsilon=0$ 与 $\partial\mu/\partial\delta=0$ 解出 $\varepsilon=(K\alpha)^{(p-1)/p^2}$, $\delta=\beta^{2(p-2)/p^2}$, 这正是待定参数 ε,δ 的最佳值, 以之代入 μ 得

$$\mu = \lambda p - (p-1+q)(K\alpha)^{\frac{1}{p}} - \frac{p-1}{2}(p-2+2q)\beta^{\frac{2}{p}} \triangleq \mu(q).$$

因当 $q=1$ 时有

$$\mu(1) = p\left[\lambda - (K\alpha])^{1/p} - \frac{p-1}{2}\beta^{2/p}\right] > 0, \quad \text{(用(3.2.17d))}$$

故必有 $q>1$, 使 $\mu=\mu(q)>0$. 这就验证了条件(3.2.11). 于是定理得证. □

条件(3.2.17d)有些琐碎. 不过, 当 $p=2$ 时它可简化为

$$2\lambda > \beta + 2\tau\sqrt{2\alpha(\alpha_0+\alpha+\beta/\tau)}. \qquad (3.2.21)$$

而式(3.2.16d)则为 $2\lambda > 2\alpha+\beta$. 由此可见, 当 $p=2$, τ 适当小时, 似乎条件(3.2.17)较条件(3.2.16)为优. 注意式(3.2.16d)与 τ 无关, 式(3.2.17d)中唯一含 τ 的部分是 K; K 的出现是利用条件(3.2.17b)估计 $\mathrm{E}|x(t)-x(t-\delta_j(t))|^p$ 的结果.

现在将定理 3.2.4 用于线性方程

$$\mathrm{d}x(t) = -[Ax(t)+By(t)]\mathrm{d}t + Dy(t)\mathrm{d}w(t), \qquad (3.2.22)$$

其中 $A,B,D\in\mathbf{R}^{d\times d}$, $y(t)=x(t-\delta(t))$, $\delta(\cdot):\mathbf{R}_+\to[0,\tau]$ 是连续函数, $w(t)$ 是一维 Brown 运动. 令 $F=-Ax-By$, $G=Dy$ $(x,y\in\mathbf{R}^d)$, 则可将方程(3.2.22)写成形式(3.2.12). 首先验证条件(3.2.16):

$$x^{\mathrm{T}}F(x,0) = -x^{\mathrm{T}}Ax \leqslant -\lambda|x|^2, \quad \lambda = \frac{1}{2}\lambda_{\min}(A+A^{\mathrm{T}}),$$

$$|F(x,0)-F(x_0,x_1)| \leqslant \alpha_0 |x-x_0| + \alpha_1 |x_1|, \quad \alpha_0 = \|A\|, \quad \alpha_1 = \|B\|;$$

$$|G(x,y)|^2 = |Dy|^2 \leqslant \beta_1 |y|^2, \quad \beta_0 = 0, \quad \beta_1 = \|D\|^2.$$

将以上结果代入(3.2.16d)得

$$\lambda_{\min}(A+A^{\mathrm{T}}) > 2\|B\| + (p-1)\|D\|^2. \tag{3.2.23}$$

其次对 $p=2$ 验证条件(3.2.17)：

$$x^{\mathrm{T}}F(x,x) = -x^{\mathrm{T}}(A+B)x \leqslant -\lambda |x|^2, \quad \lambda = \frac{1}{2}\lambda_{\min}(A+B+A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}}),$$

$$|F(x,x)-F(x_0,x_1)|^2 = |A(x_0-x)+B(x_1-x)|^2$$
$$\leqslant \sum_{i=0}^{1}\alpha_i |x-x_i|^2, \alpha_0 = \frac{\|A\|^2}{\varepsilon},$$
$$\alpha_1 = \frac{\|B\|^2}{1-\varepsilon}, \quad 0<\varepsilon<1.$$

此外如上面一样，已有 $\beta_0=0, \beta_1=\|D\|^2$. 将以上结果代入式(3.2.21)得

$$\lambda_{\min}(A+B+A^{\mathrm{T}}+B^{\mathrm{T}})$$
$$> \|D\|^2 + 2\tau\|B\| \sqrt{\frac{2}{1-\varepsilon}\left(\frac{\|A\|^2}{\varepsilon}+\frac{\|B\|^2}{1-\varepsilon}+\frac{\|D\|^2}{\tau}\right)}. \tag{3.2.24}$$

两种特殊情况是

$$B=0, \quad \lambda_{\min}(A+A^{\mathrm{T}}) > \|D\|^2,$$

$$A=0, \quad \lambda_{\min}(B+B^{\mathrm{T}}) > \|D\|^2 + 2\tau\|B\| \sqrt{2(\|B\|^2+\|D\|^2/\tau)}. \tag{3.2.25}$$

注意当 $A=0$ 时可在(3.2.24)中令 $\varepsilon \to 0$. 这就得到

推论 3.2.5　设 $p \geqslant 2$. 若条件(3.2.23)满足，则方程(3.2.22)的零解 p 阶矩指数稳定与 a. s. 指数稳定；若条件(3.2.24)或(3.2.25)满足，则方程(3.2.22)的零解均方指数稳定与 a. s. 指数稳定.

试以标量方程

$$\mathrm{d}x(t) = -[ax(t)+bx(t-\delta(t))]\mathrm{d}t + cx(t-\delta(t))\mathrm{d}w(t)$$

为例说明. 当 $p=2, a=0$ 时，条件(3.2.23)与(3.2.25)分别为

$$0 > 2|b| + c^2, \tag{3.2.23$'$}$$

$$2b > c^2 + 2\tau|b| \sqrt{2(b^2+c^2/\tau)}. \tag{3.2.25$'$}$$

式(3.2.23)′肯定无法满足，而式(3.2.25)′满足的机会则并不太少. 例如，只要 $2b > c^2$，则当 $4b^2\tau < \sqrt{4c^4+2(2b-c^2)^2} - 2c^2$ 时条件(3.2.25)′满足.

3.2.3　随机扰动方程

考虑 ODE：

$$\dot{x}(t) = f_0(t, x(t)) \tag{3.2.26}$$

的如下随机扰动方程

$$\mathrm{d}x(t) = [f_0(t,x(t)) + f_1(t,x_t)]\mathrm{d}t + g(t,x_t)\mathrm{d}w(t), \qquad (3.2.27)$$

其中函数 $f_0(t,x)$, $f_1(t,\varphi)$ 与 $g(t,\varphi)$ 均连续且满足局部 Lipschitz 条件与线性增长条件

$$f_0(t,0) \equiv 0, \quad f_1(t,0) \equiv 0, \quad g(t,0) \equiv 0.$$

若令 $f(t,\varphi) = f_0(t,\varphi(0)) + f_1(t,\varphi)$，则方程(3.2.27)归于标准形式的方程(3.2.1). 与一般的 SFDE(3.2.1)比较，方程(3.2.27)的特点是 $f(t,\varphi)$ 分裂成带时滞与不带时滞的两部分，因而在应用条件(3.2.6)时可分别进行估计，这就使得基于定理3.2.1与定理3.2.2的稳定性条件具有其特点. 下面就是一个典型的结果.

定理3.2.6 设 $p \geqslant 2$. 若存在 $V(t,x) \in C^{1,2}([-\tau,\infty) \times \mathbf{R}^d)$ 与正常数 $\mu, c_1, c_2, \beta_i \geqslant 0 (1 \leqslant i \leqslant 4)$ 及 $q > 1$，使得条件(3.2.5)及以下条件满足：

$$|V_x(t,x)| \leqslant \beta_1[V(t,x)]^{(p-1)/p}, \quad \|V_{xx}(t,x)\| \leqslant \beta_2[V(t,x)]^{(p-2)/p}, \qquad (3.2.28)$$

$$\begin{cases} V_t(t,x) + V_x(t,x)f_0(t,x) \leqslant -\mu V(t,x), & (3.2.29\text{a}) \\ \varphi \in L^p_{\mathscr{F}_t}(\Omega,C), \mathrm{E}V(t+\theta,\varphi(\theta)) \leqslant q\mathrm{E}V(t,\varphi(0)) (\forall \theta \in [-\tau,0]) & \\ \Rightarrow \mathrm{E}|f_1(t,\varphi)|^p \leqslant \beta_3 \mathrm{E}V(t,\varphi(0)), & \\ \mathrm{E}|g(t,\varphi)|^p \leqslant \beta_4 \mathrm{E}V(t,\varphi(0)), & (3.2.29\text{b}) \\ 2\mu > 2\beta_1\beta_3^{1/p} + \beta_2\beta_4^{2/p}, & (3.2.29\text{c}) \end{cases}$$

则方程(3.2.27)的零解 p 阶矩指数稳定. 若进而假定：存在正常数 K，使得对任何 $\varphi \in L^p_{\mathscr{F}_t}(\Omega,C)$ 有(参照(3.1.32))

$$\mathrm{E}|f_0(t,\varphi(0))|^p \vee \mathrm{E}|f_1(t,\varphi)|^p \vee \mathrm{E}|g(t,\varphi)|^p \leqslant K\|\varphi\|_0^p, \qquad (3.2.30)$$

则方程(3.2.27)的零解是 a.s. 指数稳定的.

注 若取 $f_1(t,\varphi) \equiv 0, g(t,\varphi) \equiv 0$，则条件(3.2.29b)自动满足，且可取 $\beta_3 = \beta_4 = 0$，因而定理条件归约为未扰动系统(3.2.26)的指数稳定条件. 条件(3.2.29b)表达了为保持系统的稳定而对于扰动的限制.

证 显然，由条件(3.2.30)可推出(3.1.32)，故定理的后一结论不成问题. 为证前一结论，只需说明可从条件(3.2.28)与(3.2.29)推出(3.2.6).

取定一个如条件(3.2.6)中所要求的 φ，令 $h = \mathrm{E}V(t,\varphi(0))$，今估计

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\mathscr{L}V(t,\varphi) &= \mathrm{E}[V_t(t,\varphi(0)) + V_x(t,\varphi(0))f_0(t,\varphi(0))] \\ &\quad + \mathrm{E}[V_x(t,\varphi(0))f_1(t,\varphi)] \\ &\quad + (1/2)\mathrm{E}[\mathrm{tr}(g^{\mathrm{T}}(t,\varphi)V_{xx}(t,\varphi(0))g(t,\varphi))] \\ &\leqslant -\mu\mathrm{E}V(t,\varphi(0)) \qquad (\text{用}(3.2.29\text{a})) \end{aligned}$$

$$+p^{-1}\mathrm{E}[(p-1)|\varepsilon V_x(t,\varphi(0))|^{\frac{p}{p-1}}+\varepsilon^{-p}|f_1(t,\varphi)|^p] \quad (用(1.3.55)'')$$

$$+(1/2)\mathrm{E}[\|V_{xx}(t,\varphi(0))\|\,|g(t,\varphi)|^2] \quad (用命题 1.3.6(v))$$

$$\leqslant -\mu h+\frac{p-1}{p}(\varepsilon\beta_1)^{\frac{p}{p-1}}h+\frac{1}{p}\varepsilon^{-p}\beta_3 h \quad (用(3.2.28),(3.2.29b))$$

$$+\frac{1}{2p}\mathrm{E}[(p-2)\|\delta V_{xx}(t,\varphi(0))\|^{\frac{p}{p-2}}+2\delta^{-\frac{p}{2}}|g(t,\varphi)|^p] \quad (用(1.3.55)'')$$

$$\leqslant -\left[\mu-\frac{p-1}{p}(\varepsilon\beta_1)^{\frac{p}{p-1}}-\frac{1}{p}\varepsilon^{-p}\beta_3\right]h$$

$$+\frac{p-2}{2p}(\delta\beta_2)^{\frac{p}{p-2}}h+\frac{1}{p}\delta^{-\frac{p}{2}}\beta_4 h \quad (用(3.2.28),(3.2.29b))$$

$$=-\mu_1\mathrm{E}V(t,\varphi(0)),$$

其中

$$\mu_1=\mu-\frac{1}{p}[(p-1)(\varepsilon\beta_1)^{\frac{p}{p-1}}+\varepsilon^{-p}\beta_3]-\frac{1}{2p}[(p-2)(\delta\beta_2)^{\frac{p}{p-2}}+2\delta^{-\frac{p}{2}}\beta_4],$$

$\varepsilon,\delta>0$ 待定. 由 $\partial\mu_1/\partial\varepsilon=0$ 与 $\partial\mu_1/\partial\delta=0$ 解出 $\varepsilon^{-p}=\beta_1\beta_3^{\frac{1-p}{p}},\delta^{-p/2}=\beta_2\beta_4^{\frac{2-p}{p}}$. 以此代入 μ_1 得到

$$\mu_1=\mu-\left(\beta_1\beta_3^{\frac{1}{p}}+\frac{1}{2}\beta_2\beta_4^{\frac{2}{p}}\right)>0, \quad (用(3.2.29c))$$

这就验证了条件(3.2.6). 因此定理的结论由定理 3.2.1 推出. □

与定理 3.2.1 比较,定理 3.2.6 在原理上并无新意,它只是将条件(3.2.6)中的不等式 $\mathrm{E}\mathscr{L}V(t,\varphi)\leqslant-\mu\mathrm{E}V(t,\varphi(0))$ 分解成了一系列可能较容易验证的不等式(即条件(3.2.28),(3.2.29a),(3.2.29b)),这相当于对 $\mathrm{E}\mathscr{L}V(t,\varphi)$ 提供了一个**拆项估计法**. 一般来说,拆项估计容易导致较大的精度损失. 不过,如考察定理证明所能看出的,条件(3.2.29c)以某种"最佳"的方式综合了分散的估计,致使最终结果仍有令人满意的精细度.

自然,定理 3.2.6 的有效应用取决于条件(3.2.28)与(3.2.29)中的一系列不等式是否易于验证. 从条件(3.2.28),(3.2.29)中涉及 $\beta_i(1\leqslant i\leqslant4)$ 的不等式的形式看来,$V(\cdot)$ 的选择必然极受限制,可以说,定理 3.2.6 是专为 $V=(x^{\mathrm{T}}Qx)^{p/2}$ 这种情况设计的. 如果取 $V=|x|^p$, 则对于适当选取的 β_1,β_2, 条件(3.2.28)自动满足,而条件(3.2.29)亦取更简易的形式. 事实上,由

$$V_x=p|x|^{p-2}x^{\mathrm{T}},\quad V_{xx}=p|x|^{p-2}I+p(p-2)|x|^{p-4}xx^{\mathrm{T}}$$

立即得出

$$|V_x|=p|x|^{p-1}=\beta_1V^{\frac{p-1}{p}},\quad \beta_1=p,$$

$$\|V_{xx}\|\leqslant p(p-1)|x|^{p-2}=\beta_2V^{\frac{p-2}{p}},\quad \beta_2=p(p-1).$$

其次注意

$$V_x f_0(t,x) = p|x|^{p-2}x^{\mathrm{T}} f_0(t,x),$$

$$x^{\mathrm{T}} f_0(t,x) \leqslant -\lambda|x|^2 \Rightarrow V_x f_0(t,x) \leqslant -\mu V, \quad \mu = \lambda p.$$

利用以上结果,现在可写出定理3.2.6的如下推论.

推论3.2.7 设 $p \geqslant 2$. 若存在正常数 $\lambda, \lambda_1, \lambda_2$ 及 $q > 1$, 使得以下条件满足:

$$\begin{cases} x^{\mathrm{T}} f_0(t,x) \leqslant -\lambda|x|^2, \quad t \geqslant 0, x \in \mathbf{R}^d, & (3.2.31\mathrm{a}) \\ \varphi \in L^p_{\mathscr{F}_t}(\Omega, C), \|\varphi\|_0^p \leqslant q\mathrm{E}|\varphi(0)|^p & \\ \Rightarrow \mathrm{E}|f_1(t,\varphi)|^p \leqslant \lambda_1 \mathrm{E}|\varphi(0)|^p, & \\ \mathrm{E}|g(t,\varphi)|^p \leqslant \lambda_2 \mathrm{E}|\varphi(0)|^p, & (3.2.31\mathrm{b}) \\ 2\lambda > 2\lambda_1^{1/p} + (p-1)\lambda_2^{2/p}, & (3.2.31\mathrm{c}) \end{cases}$$

则方程(3.2.27)的零解 p 阶矩指数稳定. 若进而设条件(3.2.30)满足,则方程(3.2.27)的零解 a.s. 指数稳定.

在推论3.2.7中,条件(3.2.31b)仍然有待进一步具体化,通常可代以直接估计函数 $|f_1(t,\varphi)|$ 与 $|g(t,\varphi)|$ 的某组不等式. 下面给出一种处理方法.

推论3.2.8 设 $p \geqslant 2$. 若存在常数 $\lambda > 0, \alpha_1, \alpha_2 \geqslant 0$ 与 $[-\tau, 0]$ 上的概率测度 μ, ν, 使得以下条件满足:

$$\begin{cases} x^{\mathrm{T}} f_0(t,x) \leqslant -\lambda|x|^2, \quad (t,x) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d, & (3.2.32\mathrm{a}) \\ |f_1(t,\varphi)| \leqslant \alpha_1 \int_{-\tau}^0 |\varphi(\theta)| \mathrm{d}\mu, & (3.2.32\mathrm{b}) \\ |g(t,\varphi)| \leqslant \alpha_2 \int_{-\tau}^0 |\varphi(\theta)| \mathrm{d}\nu, \quad (t,\varphi) \in \mathbf{R}_+ \times C, & (3.2.32\mathrm{c}) \\ 2\lambda > 2\alpha_1 \tau^{1/p} + (p-1)\alpha_2^2 \tau^{2/p}, & (3.2.32\mathrm{d}) \end{cases}$$

则方程(3.2.27)的零解 p 阶矩指数稳定. 若进而设

$$|f_0(t,x)| \leqslant K|x|, \quad (t,x) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d, \tag{3.2.33}$$

K 是正常数,则方程(3.2.27)的零解 a.s. 指数稳定.

证 由条件(3.2.33)与(3.2.32b),(3.2.32c)推出条件(3.2.30)是容易的. 因此只要验证条件(3.2.32b)和(3.2.32c)推出(3.2.31b)和(3.2.31c). 设 φ 依(3.2.31b),其中 $q > 1$ 待定,则

$$\begin{aligned} \mathrm{E}|f_1(t,\varphi)|^p &\leqslant \alpha_1^p \int_{-\tau}^0 \mathrm{E}|\varphi(\theta)|^p \mathrm{d}\mu \quad (\text{用}(3.2.32\mathrm{b})) \\ &\leqslant \lambda_1 \mathrm{E}|\varphi(0)|^p, \quad \lambda_1 = \alpha_1^p \tau q. \end{aligned}$$

同理由条件(3.2.32c)有

$$\mathrm{E}|g(t,\varphi)|^p \leqslant \lambda_2 \mathrm{E}|\varphi(0)|^p, \quad \lambda_2 = \alpha_2^p \tau q.$$

于是

$$2\lambda - 2\lambda_1^{\frac{1}{p}} - (p-1)\lambda_2^{\frac{2}{p}} = 2\lambda - 2\alpha_1(\tau q)^{\frac{1}{p}} - (p-1)\alpha_2^2(\tau q)^{\frac{2}{p}} \triangleq \mu(q).$$

直接由条件(3.2.32d)推出 $\mu(1) > 0$, 因此必有 $q > 1$, 使 $\mu = \mu(q) > 0$, 即条件(3.2.31c)满足. 这就验证了推论 3.2.7 的条件. □

现在考虑应用定理 3.2.6 的另一途径:取 $V = x^{\mathrm{T}}Qx$, Q 是适当选定的正定矩阵. 因要使条件(3.2.5)满足,现在自然只能限于考虑 $p = 2$ 的情况. 因 $V_x = 2x^{\mathrm{T}}Q$, $V_{xx} = 2Q$, 故定理 3.2.6 中的条件(3.2.28)与(3.2.29a)可分别写成

$$|V_x|^2 = 4|x^{\mathrm{T}}Q|^2 = 4x^{\mathrm{T}}Q^2x \leqslant \beta_1^2 x^{\mathrm{T}}Qx,$$
$$\|V_{xx}\| = 2\|Q\| \triangleq \beta_2,$$
$$V_x f_0(t,x) = 2x^{\mathrm{T}}Qf_0(t,x) \leqslant -\mu x^{\mathrm{T}}Qx.$$

应这样选择 β_1, 使得 $\beta_1^2 Q - 4Q^2$ 恰好是半正定的;而这又相当于对每个 $\lambda \in \sigma(Q)$(特征值)都有 $\beta_1^2\lambda - 4\lambda^2 \geqslant 0$, 即 $\beta_1^2 \geqslant 4\lambda$. 因此应取

$$\beta_1 = 2\lambda_{\max}^{1/2}(Q), \quad \beta_2 = 2\|Q\| = 2\lambda_{\max}(Q). \quad (用命题 1.3.6(ii))$$

类似地,在 $f_0(t,x) = Ax$, $A \in \mathbf{R}^{d\times d}$ 的情况下,应如此选择 $\mu > 0$, 使得 $\mu Q + QA + A^{\mathrm{T}}Q$ 半负定,即

$$\mu = \max\{\rho > 0 : \rho Q + QA + A^{\mathrm{T}}Q \text{ 半负定}\}. \tag{3.2.34}$$

为选定 β_3, β_4, 应对 f_1, g 作适当限定. 今设定如下条件:

$$|f_1(t,\varphi)| \vee |g(t,\varphi)| \leqslant K\int_{-\tau}^0 |\varphi(\theta)|\,\mathrm{d}\theta, \tag{3.2.35}$$

K 是正常数,令 $\lambda = \lambda_{\min}(Q)$, 则对于 $\varphi \in L^2_{\mathscr{F}_t}(\Omega, C)$, 由

$$\mathrm{E}[\varphi^{\mathrm{T}}(\theta)Q\varphi(\theta)] \leqslant q\mathrm{E}[\varphi^{\mathrm{T}}(0)Q\varphi(0)], \quad \forall\theta \in [-\tau, 0]$$

推出

$$\begin{aligned}\mathrm{E}|f_1(t,\varphi)|^2 &\leqslant K^2\tau\int_{-\tau}^0 \mathrm{E}|\varphi(\theta)|^2\mathrm{d}\theta \\ &\leqslant \frac{K^2\tau}{\lambda}\int_{-\tau}^0 \mathrm{E}[\varphi^{\mathrm{T}}(\theta)Q\varphi(\theta)]\mathrm{d}\theta \\ &\leqslant \frac{K^2\tau^2 q}{\lambda}\mathrm{E}[\varphi^{\mathrm{T}}(0)Q\varphi(0)] = \beta_3\mathrm{E}V(\varphi(0)),\end{aligned}$$

其中 $\beta_3 = K^2\tau^2 q/\lambda$. 同理 $\mathrm{E}|g(t,\varphi)|^2 \leqslant \beta_4\mathrm{E}V(\varphi(0))$, $\beta_4 = \beta_3$. 这就得到

$$\begin{aligned}\mu_1 &\triangleq \mu - \beta_1\beta_3^{1/2} - \frac{1}{2}\beta_2\beta_4 \\ &= \mu - 2K\tau\sqrt{\frac{q\lambda_{\max}(Q)}{\lambda_{\min}(Q)}} - K^2\tau^2\frac{q\lambda_{\max}(Q)}{\lambda_{\min}(Q)} \triangleq \mu_1(q).\end{aligned}$$

由此看出,只要

$$\tau < \sqrt{\frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(Q)}}\,\frac{\sqrt{\mu+1}-1}{K}, \tag{3.2.36}$$

就有 $\mu_1(1)>0$, 因而有 $q>1$ 使 $\mu_1=\mu_1(q)>0$. 这就得到

推论 3.2.9 设 $f_0=Ax, A\in\mathbf{R}^{d\times d}$, f_1 与 g 满足条件(3.2.35). 若存在正定矩阵 Q, 使得不等式(3.2.36)成立,其中 μ 依式(3.2.34),则方程(3.2.27)的零解均方指数稳定与 a.s. 指数稳定.

但还留下一个问题:如何决定矩阵 Q 与参数 μ? 这可用线性代数方法简单地解决如下:在很一般的情况下, A 是可对角化的,设 A 的特征值全为实数(当然并非总是如此),用线性代数方法构成可逆矩阵 H, 使得

$$H^{-1}AH=D=\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_d),$$

则 $Q=(H^{-1})^{\mathrm{T}}H^{-1}$ 即可作为推论 3.2.9 中的正定矩阵. $\forall\rho\in\mathbf{R}$, 有

$$\rho Q+QA+A^{\mathrm{T}}Q=\rho Q+2(H^{-1})^{\mathrm{T}}DH^{-1}=(H^{-1})^{\mathrm{T}}(\rho I+2D)H^{-1},$$

因此

$$\rho Q+QA+A^{\mathrm{T}}Q\text{ 半负定}\Leftrightarrow\rho I+2D\text{ 半负定}\Leftrightarrow\rho\leqslant-2\lambda_{\max}(A).$$

这与式(3.2.34)对照看出应取 $\mu=-2\lambda_{\max}(A)$.

作为例子,现在将推论 3.2.9 用于二阶方程:

$$\ddot{z}+3\dot{z}+2z=\sigma_1(z_t,\dot{z}_t)+\sigma_2(z_t,\dot{z}_t)(\mathrm{d}w/\mathrm{d}t). \tag{3.2.37}$$

令 $x=(z,\dot{z})^{\mathrm{T}}$, 将方程(37)化为二维方程

$$\mathrm{d}x(t)=[Ax(t)+f_1(x_t)]\mathrm{d}t+g(x_t)\mathrm{d}w(t),$$

其中

$$A=\begin{bmatrix}0&1\\-2&-3\end{bmatrix},\quad f_1(\varphi)=\begin{bmatrix}0\\\sigma_1(\varphi)\end{bmatrix},\quad g(\varphi)=\begin{bmatrix}0\\\sigma_2(\varphi)\end{bmatrix}.$$

假定 $\sigma_i(\varphi)$ 满足条件

$$|\sigma_1(\varphi)|\vee|\sigma_2(\varphi)|\leqslant\int_{-\tau}^{0}|\varphi(\theta)|\,\mathrm{d}\theta,\quad\varphi\in C.$$

用线性代数方法可求得 $H=\begin{bmatrix}1&1\\-1&-2\end{bmatrix}$, 使得 $H^{-1}AH=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-2\end{bmatrix}$; 令

$$Q=(H^{-1})^{\mathrm{T}}H^{-1}=\begin{bmatrix}5&3\\3&2\end{bmatrix},$$

则容易算出

$$\lambda_{\max}(Q)=\frac{7+\sqrt{45}}{2}=\frac{1}{\lambda_{\min}(Q)},\quad\mu=-2\lambda_{\max}(A)=2.$$

将以上结果及 $K=1$ 代入式(3.2.35)得

$$\tau<\frac{\sqrt{3}-1}{\lambda_{\max}(Q)}=0.106\cdots.$$

当以上条件满足时,由推论 3.2.9 知方程(3.2.37)的零解均方指数稳定与 a.s. 指数稳定.

§3.3　中立型 SFDE

本书考虑的**中立型 SFDE**(或简写为 NSFDE),其一般形式为

$$d[x(t)-u(x_t)]=f(t,x_t)dt+g(t,x_t)dw(t), \tag{3.3.1}$$

其右端与(3.1.5)并无区别,不必解释. 方程(3.3.1)与通常 SFDE 的唯一差别,就是其左端多出了一项 $-du(x_t)$, 其中 $u(\cdot): C\to \mathbf{R}^d$ 是一个给定的连续函数. 若 $u(\cdot)\equiv 0$, 则方程(3.3.1)与(3.1.5)重合. 因此,原则上 NSFDE 涵盖了通常的 SFDE. 似乎可以期望,在 §3.1 与 §3.2 中对 SFDE 所建立的结论,为对 NSFDE 展开类似的内容提供了充分的启示. 为强调与 SFDE 的类比,我们将方程(3.3.1)改写成

$$d\tilde{x}(t)=f(t,x_t)dt+g(t,x_t)dw(t), \tag{3.3.1$'$}$$

这意味着约定 $\tilde{x}(t)=x(t)-u(x_t)$. 这并不是一个通行的记号,但确有一些好处,除了节省空间之外,将有助于激发对 SFDE 的联想. 例如,利用

$$\tilde{x}(t)=\tilde{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t}f(s,x_s)ds+\int_{t_0}^{t}g(s,x_s)dw(s), \tag{3.3.2}$$

就可充分利用类似于 §3.1 ~ §3.2 中的方法去分析 $\tilde{x}(t)$; 然后通过

$$x(t)=\tilde{x}(t)+u(x_t)$$

得出关于 $x(t)$ 的相应结论. 因此,在处理中立型方程时将充分使用 $\tilde{x}(t)$ 这一记号;只要不将它滥用于他处,就不致引起混淆. 此外,也沿用前两节的各种记号与约定,如 $J=[t_0,T]\subset \mathbf{R}_+$, $J_\tau=[t_0-\tau,T]$ 等,不一一细述.

如同对于 SFDE 一样,关于 NSFDE 的基本问题依然是:存在定理、解的估计、稳定性等. 凡属例行的推广都只给出简略表述,重点考虑那些引致困难的新情况. 自然,这些情况都与 $u(\cdot)$ 的出现有关.

3.3.1　存在定理

与定义 3.1.1 比较,关于方程(3.3.1)的解的定义只有很少的改动.

定义 3.3.1　若一个 $\mathbf{R}^d$ 值随机过程 $x(t)$ $(t\in J_\tau)$ 满足以下条件:

(i) $x(t)$ 是连续适应过程,且 $\{x_t: t\in J\}$ 是适应的 C 值随机过程;

(ii) $f(t,x_t)\in \mathscr{L}^1(J,\mathbf{R}^d)$, $g(t,x_t)\in \mathscr{L}^2(J,\mathbf{R}^{d\times m})$;

(iii) $x_{t_0}=\xi\in L^2_{\mathscr{F}_{t_0}}(\Omega,C)$, $x(t)$ 在 J 上满足随机积分方程:

$$\tilde{x}(t)=\xi(0)-u(\xi)+\int_{t_0}^{t}f(s,x_s)ds+\int_{t_0}^{t}g(s,x_s)dw(s), \tag{3.3.3}$$

则称 $x(t)$ 为方程(3.3.1)在 J 上的具初值 ξ 的解. 若 $x(t)$ 与(3.3.1)在 J 上的任

何具初值 ξ 的解无差别,则称 $x(t)$ 是方程(3.3.1)在 J 上具初值 ξ 的唯一解,写作 $x(t,\xi)$.

注意,只要令 $\xi(0)-u(\xi)=\tilde{x}(t_0)$,等式(3.3.3)就与(3.3.2)一致.

现在来看如何推广定理 3.1.2.

定理 3.3.2 设函数 f,g,u 在其定义域内满足以下条件:

(i) 一致 Lipschitz 条件:存在正常数 $\bar{K}$,使得

$$|f(t,\varphi)-f(t,\psi)|^2 \vee |g(t,\varphi)-g(t,\psi)|^2 \leqslant \bar{K}\|\varphi-\psi\|^2; \tag{3.3.4}$$

(ii) 线性增长条件:存在正常数 K,使得

$$|f(t,\varphi)|^2 \vee |g(t,\varphi)|^2 \leqslant K(1+\|\varphi\|^2); \tag{3.3.5}$$

(iii) 压缩性条件:存在 $\kappa\in[0,1)$,使得

$$|u(\varphi)-u(\psi)| \leqslant \kappa\|\varphi-\psi\|, \tag{3.3.6}$$

则对任给 $\xi\in L^2_{\mathscr{F}_{t_0}}(\Omega,C)$,方程(3.3.1)存在唯一具初值 ξ 的解 $x(t)$ ($t\in J_\tau$),且有 $x(t)\in\mathscr{M}^2(J_\tau,\mathbf{R}^d)$.

注意压缩性条件是一个很独特的条件,(3.3.6)或其类似条件的重要性在本书中将反复表现出来. 容易看出,(3.3.6)推出 $u(\cdot)$ 为 Lipschitz 连续且满足线性增长条件.

证 不妨设 $T-t_0$ 适当小,使得

$$\delta \triangleq \kappa+\frac{2\bar{K}(T-t_0)(T-t_0+4)}{1-\kappa}<1. \tag{3.3.7}$$

否则,可如同在 ODE 理论中一样,首先在一个较小的区间上考虑,然后通过有限步延拓手续,得到方程(3.3.1)在区间 J 上的解,且这样的解能满足定理之要求.

下面基本上套用定理 3.1.2 的证法,但不免有一些实质性的变动,这些变动自然均与函数 $u(\cdot)$ 有关. 首先构成 Picard 迭代序列(对照(3.1.11)):

$$\begin{cases} x^0_{t_0}=\xi, x^0(t)=\xi(0)\ (t\in J),\\ x^{n+1}_{t_0}=\xi, n\geqslant 0,\\ x^{n+1}(t)=u(x^n_t)+\xi(0)-u(\xi)\\ \qquad\qquad +\int_{t_0}^t f(s,x^n_s)\mathrm{d}s+\int_{t_0}^t g(s,x^n_s)\mathrm{d}w(s)\ (t\in J). \end{cases} \tag{3.3.8}$$

(i) 验证 $x^n(t)$ 定义合理、连续且 $x^n(t)\in\mathscr{M}^2(J_\tau,\mathbf{R}^d)$,这与定理 3.1.2 之证类似,从略.

(ii) 证明 $\{x^n(t)\}$ 在空间 $\mathscr{M}^2(J_\tau,\mathbf{R}^d)$ 中范数收敛. 为此,只要归纳地证明以下不等式:

$$\mathrm{E}\Big[\sup_{t\in J}|x^{n+1}(t)-x^n(t)|^2\Big]\leqslant c\,\delta^n,\quad n\geqslant 0, \tag{3.3.9}$$

其中

$$c = 4\kappa \mathrm{E}\|\xi\|^2 + 2K(T-t_0)(T-t_0+4)(1-\kappa)^{-1}(1+\mathrm{E}\|\xi\|^2).$$

以 M_n 记式(3.3.9)之左端,则

$$\begin{aligned}
M_0 &= \mathrm{E}\Big[\sup_{t\in J}\Big|u(x_t^0)-u(\xi)+\int_{t_0}^t f(s,x_s^0)\mathrm{d}s+\int_{t_0}^t g(s,x_s^0)\mathrm{d}w(s)\Big|^2\Big] \quad (\text{用}(3.3.8))\\
&\leqslant \mathrm{E}\Big\{\sup_{t\in J}\Big[\frac{1}{\kappa}|u(x_t^0)-u(\xi)|^2\\
&\quad+\frac{1}{1-\kappa}\Big|\int_{t_0}^t f(s,x_s^0)\mathrm{d}s+\int_{t_0}^t g(s,x_s^0)\mathrm{d}w(s)\Big|^2\Big]\Big\} \quad (\text{用}(1.3.57))\\
&\leqslant \kappa\mathrm{E}\Big(\sup_{t\in J}\|x_t^0-\xi\|^2\Big)+\frac{2}{1-\kappa}\mathrm{E}\Big[\int_{t_0}^T|f(s,x_s^0)|\,\mathrm{d}s\Big]^2\\
&\quad+\frac{2}{1-\kappa}\mathrm{E}\Big[\sup_{t\in J}\Big|\int_{t_0}^t g(s,x_s^0)\mathrm{d}w(s)\Big|^2\Big] \quad (\text{用}(1.3.52))\\
&\leqslant 4\kappa\mathrm{E}\|\xi\|^2+\frac{2(T-t_0)}{1-\kappa}\int_{t_0}^T\mathrm{E}|f(s,x_s^0)|^2\mathrm{d}s \quad (\text{用 Hölder 不等式})\\
&\quad+\frac{8}{1-\kappa}\int_{t_0}^T\mathrm{E}|g(s,x_s^0)|^2\mathrm{d}s \quad (\text{用}(1.3.43))\\
&\leqslant 4\kappa\mathrm{E}\|\xi\|^2+\frac{2K(T-t_0+4)}{1-\kappa}\int_{t_0}^T\mathrm{E}(1+\|x_t^0\|^2)\mathrm{d}t \quad (\text{用}(3.3.5))\\
&\leqslant c = c\,\delta^0.
\end{aligned}$$

今设 $M_{n-1}\leqslant c\,\delta^{n-1}(n\geqslant 1)$,则

$$\begin{aligned}
M_n &= \mathrm{E}\Big[\sup_{t\in J}\Big|u(x_t^n)-u(x_t^{n-1})+\int_{t_0}^t(f(s,x_s^n)-f(s,x_s^{n-1}))\mathrm{d}s\\
&\quad+\int_{t_0}^t(g(s,x_s^n)-g(s,x_s^{n-1}))\mathrm{d}w(s)\Big|^2\Big] \quad (\text{用}(3.3.8))\\
&\leqslant \kappa\mathrm{E}\Big(\sup_{t\in J}\|x_t^n-x_t^{n-1}\|^2\Big)+\frac{2(T-t_0)}{1-\kappa}\int_{t_0}^T\mathrm{E}|f(s,x_s^n)-f(s,x_s^{n-1})|^2\mathrm{d}s\\
&\quad+\frac{8}{1-\kappa}\int_{t_0}^T\mathrm{E}|g(s,x_s^n)-g(s,x_s^{n-1})|^2\mathrm{d}s \quad (\text{参照 } M_0 \text{ 的估计})\\
&\leqslant \kappa M_{n-1}+\frac{2\bar{K}(T-t_0+4)}{1-\kappa}\int_{t_0}^T\mathrm{E}\|x_s^n-x_s^{n-1}\|^2\mathrm{d}s \quad (\text{用}(3.3.4))\\
&\leqslant \delta M_{n-1}\leqslant c\,\delta^n, \quad (\text{用}(3.3.7))
\end{aligned}$$

故式(3.3.9)得证. 由式(3.3.9)推出 $\{x^n(t)\}$ 是 $\mathscr{M}^2(J_\tau,\mathbf{R}^d)$ 中的 Cauchy 序列,故其范数收敛于某个 $x(t)\in\mathscr{M}^2(J_\tau,\mathbf{R}^d)$.

(iii) 证 a. s. 地 $x^n(t)\rightrightarrows x(t)$. 取 $\varepsilon\in(\delta,1)$, 由(3.3.9)推出

$$P\Big(\sup_{t\in J}|x^{n+1}(t)-x^n(t)|^2\geqslant\delta^n\varepsilon^{-n}\Big)\leqslant c\,\varepsilon^n.$$

于是由 Borel-Cantelli 引理得出,a. s. 地有

$$\sup_{t\in J}|x^{n+1}(t)-x^{n}(t)|^{2}<(\delta/\varepsilon)^{n},\quad n\text{ 充分大},$$

这推出所要结论. 然后如定理 3.1.2 之证, 可说明 $x(t)$ 是方程(3.3.1)的具初值 ξ 的解.

(iv) 证唯一性. 设 $\bar{x}(t)\in\mathscr{M}^{2}(J_{\tau},\mathbf{R}^{d})$ 亦是方程(3.3.1)的具初值 ξ 的解, 则用类似于证不等式(3.3.9)的方法可得

$$h(t)\triangleq\mathrm{E}\Big[\sup_{t_0\leqslant s\leqslant t}|x(s)-\bar{x}(s)|^{2}\Big]\leqslant\frac{2\bar{K}(T-t_0+4)}{(1-\kappa)^{2}}\int_{t_0}^{t}h(s)\mathrm{d}s,$$

因而由 Gronwall 不等式得 $h(t)\equiv0$, 这得出唯一性结论. 余下只要说明, 方程(3.3.1)的解 $x(t)$ 必属于 $\mathscr{M}^{2}(J_{\tau},\mathbf{R}^{d})$. 如同证定理 3.1.2, 为此又只要证不等式

$$\begin{cases}\mathrm{E}\Big(\sup\limits_{t_0-\tau\leqslant s\leqslant t}|x(s)|^{2}\Big)\leqslant\Big[1+\dfrac{4+\kappa\sqrt{\kappa}}{(1-\kappa)(1-\sqrt{\kappa})}\mathrm{E}\|\xi\|^{2}\Big]\mathrm{e}^{\beta(t-t_0)},\\[2ex] \beta=\dfrac{3K(T-t_0+4)}{(1-\kappa)(1-\sqrt{\kappa})}.\end{cases}\tag{3.3.10}$$

因现在对 $|x(t)|$ 的增长尚不能加任何限制, 故不可避免地要用一停时论证. 令

$$\tau_n=T\wedge\inf\{t\in\in J:\ \|x_t\|\geqslant n\},$$

只需以 $t\wedge\tau_n$ 代 t 证(3.3.10). 但为记号简便, 仍记 $t\wedge\tau_n$ 为 t; 此外约定 $f(t)=f(t,x_t)$, $g(t)=g(t,x_t)$. 则

$$\begin{aligned}H(t)&\triangleq\mathrm{E}\Big(\sup_{t_0-\tau\leqslant s\leqslant t}|x(s)|^{2}\Big)\leqslant\mathrm{E}\|\xi\|^{2}+\mathrm{E}\Big(\sup_{t_0\leqslant s\leqslant t}|x(s)|^{2}\Big)\\
&=\mathrm{E}\|\xi\|^{2}+\mathrm{E}\Big[\sup_{t_0\leqslant s\leqslant t}\Big|u(x_s)-u(\xi)+\xi(0)+\int_{t_0}^{s}f(r)\mathrm{d}r+\int_{t_0}^{s}g(r)\mathrm{d}w(r)\Big|^{2}\Big]\\
&\leqslant\mathrm{E}\|\xi\|^{2}+\mathrm{E}\Big\{\sup_{t_0\leqslant s\leqslant t}\Big[\frac{|u(x_s)-u(\xi)|^{2}}{\kappa}\\
&\quad+\frac{1}{1-\kappa}\Big|\xi(0)+\int_{t_0}^{s}f(r)\mathrm{d}r+\int_{t_0}^{s}g(r)\mathrm{d}w(r)\Big|^{2}\Big]\Big\}\\
&\leqslant\mathrm{E}\|\xi\|^{2}+\kappa\mathrm{E}\Big(\sup_{t_0\leqslant s\leqslant t}\|x_s-\xi\|^{2}\Big)\\
&\quad+\frac{3}{1-\kappa}\Big[\mathrm{E}\|\xi\|^{2}+(T-t_0)\mathrm{E}\int_{t_0}^{t}|f(r)|^{2}\mathrm{d}r+4\mathrm{E}\int_{t_0}^{t}|g(r)|^{2}\mathrm{d}r\Big]\\
&\leqslant\mathrm{E}\|\xi\|^{2}+\kappa\Big[\mathrm{E}\Big(\sup_{t_0\leqslant s\leqslant t}\frac{\|x_s\|^{2}}{\sqrt{\kappa}}\Big)+\frac{\mathrm{E}\|\xi\|^{2}}{1-\sqrt{\kappa}}\Big]\qquad(\text{用}(1.3.57))\\
&\quad+\frac{3\mathrm{E}\|\xi\|^{2}}{1-\kappa}+\frac{3K(T-t_0+4)}{1-\kappa}\mathrm{E}\int_{t_0}^{t}(1+\|x_r\|^{2})\mathrm{d}r\qquad(\text{用}(3.3.5))\end{aligned}$$

$$\leqslant \frac{4+\kappa\sqrt{\kappa}}{1-\kappa}\mathrm{E}\|\xi\|^2+\sqrt{\kappa}H(t)+\frac{3K(T-t_0+4)}{1-\kappa}\int_{t_0}^{t}[1+H(r)]\mathrm{d}r,$$

故得

$$1+H(t)\leqslant 1+\frac{4+\kappa\sqrt{\kappa}}{(1-\kappa)(1-\sqrt{\kappa})}\mathrm{E}\|\xi\|^2+\beta\int_{t_0}^{t}[1+H(r)]\mathrm{d}r.$$

然后用 Gronwall 不等式,即得所要证. □

如同§3.1 中一样,接下来的事情就是写出如下一般存在定理.

定理 3.3.3　设 I 是以 t_0 为左端点的(有限或无限)区间,函数 f,g 与 u 满足以下条件:

(i) 局部 Lipschitz 条件:任给紧区间 $J\subset I$ 与 $n\in\mathbf{N}$, 存在正常数 K_{Jn}, 使得当 $t\in J,\varphi,\psi\in C$, $\|\varphi\|\vee\|\psi\|\leqslant n$ 时有

$$|f(t,\varphi)-f(t,\psi)|^2\vee|g(t,\varphi)-g(t,\psi)|^2\leqslant K_{Jn}\|\varphi-\psi\|^2;$$

(ii) 线性增长条件:任给紧区间 $J\subset I$, 存在正常数 K_J, 使得在 $J\times C$ 上有

$$|f(t,\varphi)|^2\vee|g(t,\varphi)|^2\leqslant K_J(1+\|\varphi\|^2);$$

(iii) 压缩性条件:存在 $\kappa\in(0,1)$, 使得

$$|u(\varphi)-u(\psi)|\leqslant\kappa\|\varphi-\psi\|,\quad \varphi,\psi\in C,$$

则对任给 $\xi\in L^2_{\mathscr{F}_{t_0}}(\Omega,C)$, 方程(1)存在唯一具有初值 ξ 的解 $x(t)$, 且 $x(t)\in\mathscr{M}^2(I_\tau,\mathbf{R}^d)$.

下面在有限或无限区间上考虑方程(3.3.1)时,总假定它已满足存在定理的条件,因而其初值问题有唯一解,以 $x(t,\xi)$ 记这样的解.

3.3.2　解的估计

现在考虑推广 3.1.3 节中的结果. 如同本节引言中已提到的,我们将利用 $\tilde{x}(t)=x(t)-u(x_t)$ 这样的临时记号,以便尽可能套用§3.1 中的方法. 如何克服因 $u(\cdot)$ 出现所引起的困难,定理 3.3.2 的证明已提供了部分经验,这些都应存于心中. 还应强调的是,为化解由 $u(x_t)$ 引起的麻烦,必须用到对 $u(\cdot)$ 的某种"压缩性"条件,这种条件保证能从 $\tilde{x}(t)$ 的结论推出关于 $x(t)$ 的相应结论.

下面的结果可看作定理 3.1.5 的推广.

定理 3.3.4　设 $p\geqslant 2, x(t)=x(t,\xi), \xi\in L^p$. 若线性增长条件(3.3.5)及以下条件满足:

$$|u(\varphi)|\leqslant\kappa\|\varphi\|,\quad \varphi\in C,\tag{3.3.11}$$

其中 $\kappa\in[0,1)$ 为常数,则对 $x(t)$ 有以下估计:

$$\begin{cases}\mathrm{E}\left(\sup\limits_{t_0-\tau\leqslant s\leqslant t}|x(s)|^p\right)\leqslant(1+\bar{\beta}\mathrm{E}\|\xi\|^p)\mathrm{e}^{\beta(t-t_0)}, \quad t\in J,\\ \beta=\dfrac{2p(1+\kappa)^{p-2}}{(1-\kappa)^p}[\sqrt{2K}(1+\kappa)+K(33p-1)],\\ \bar{\beta}=\dfrac{1}{1-\kappa}+\dfrac{2(1+\kappa)^p}{(1-\kappa)^p}.\end{cases} \tag{3.3.12}$$

注 若令 $\kappa=0$（从而 $u(\cdot)\equiv 0$），则有

$$\beta=2p[\sqrt{2K}+K(33p-1)], \quad \bar{\beta}=3.$$

此时式(3.3.12)非常接近于(3.1.24)（限于 $p\geqslant 2$）. 式(3.3.12)并不能完全涵盖(3.1.24)的原因是由于 $u(\cdot)$ 的存在，在证定理 3.3.4 时，不得不采用一些有别于证定理 3.1.5 的方法，这样做的后果并不能因取 $\kappa=0$ 而完全消失.

证 任给 $t\in J$，约定

$$h(t)=\mathrm{E}\left(\sup_{t_0-\tau\leqslant s\leqslant t}|x(s)|^p\right), \quad \tilde{h}(t)=\mathrm{E}\left(\sup_{t_0\leqslant s\leqslant t}|\tilde{x}(s)|^p\right).$$

对于定理的证明，$h(t)$ 与 $\tilde{h}(t)$ 之间的特殊关系是关键的.

(i) 首先建立 $h(t)$ 与 $\tilde{h}(t)$ 之间的如下关系：

$$h(t)\leqslant\frac{\mathrm{E}\|\xi\|^p}{1-\kappa}+\frac{\tilde{h}(t)}{(1-\kappa)^p}. \tag{3.3.13}$$

$\forall t\in J$，用(1.3.55)得

$$\begin{aligned}|x(t)|^p&\leqslant\kappa^{1-p}|u(x_t)|^p+(1-\kappa)^{1-p}|\tilde{x}(t)|^p\\&\leqslant\kappa\|x_t\|^p+(1-\kappa)^{1-p}|\tilde{x}(t)|^p. \qquad (\text{用}(3.3.11))\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}h(t)&\leqslant\mathrm{E}\|\xi\|^p+\mathrm{E}\left(\sup_{t_0\leqslant s\leqslant t}|x(s)|^p\right)\\&\leqslant\mathrm{E}\|\xi\|^p+\mathrm{E}\left\{\sup_{t_0\leqslant s\leqslant t}[\kappa\|x_s\|^p+(1-\kappa)^{1-p}|\tilde{x}(s)|^p]\right\}\\&\leqslant\mathrm{E}\|\xi\|^p+\kappa h(t)+(1-\kappa)^{1-p}\tilde{h}(t),\end{aligned}$$

由此解出 $h(t)$，即得不等式(3.3.13). 注意，当 $\kappa=0$ 时这一步骤完全是多余的.

(ii) 估计 $\tilde{h}(t)$，这是难点之所在. 首先用 Itô 公式及式(3.3.1)′估计 $|\tilde{x}(t)|^p$：

$$\begin{aligned}|\tilde{x}(t)|^p&=|\tilde{x}(t_0)|^p+\int_{t_0}^t\mathrm{d}|\tilde{x}(s)|^p\\&\leqslant|\tilde{x}(t_0)|^p+p\int_{t_0}^t|\tilde{x}(s)|^{p-2}\tilde{x}^{\mathrm{T}}(s)f(s,x_s)\mathrm{d}s\\&\quad+\frac{p(p-1)}{2}\int_{t_0}^t|\tilde{x}(s)|^{p-2}|g(s,x_s)|^2\mathrm{d}s\end{aligned}$$

$$+ p\int_{t_0}^{t} |\tilde{x}(s)|^{p-2}\tilde{x}^{\mathrm{T}}(s)g(s,x_s)\mathrm{d}w(s) \qquad (用(1.3.35))$$

$$\triangleq I_1 + I_2 + I_3 + I_4,$$

$$I_1 = |u(\xi) - \xi(0)|^p \leqslant (\kappa \|\xi\| + \|\xi\|)^p$$

$$= (1+\kappa)^p \|\xi\|^p, \qquad (用(3.3.11))$$

$$I_2 \leqslant p\int_{t_0}^{t} |\tilde{x}(s)|^{p-1} |f(s,x_s)| \mathrm{d}s$$

$$\leqslant p(1+\kappa)^{p-1}\int_{t_0}^{t} \|x_s\|^{p-1} |f(s,x_s)| \mathrm{d}s$$

$$\leqslant (1+\kappa)^{p-1}\int_{t_0}^{t} [(p-1)\varepsilon^{\frac{p}{p-1}} \|x_s\|^p + \varepsilon^{-p} |f(s,x_s)|^p]\mathrm{d}s \qquad (用(1.3.55)')$$

$$\leqslant (1+\kappa)^{p-1}\int_{t_0}^{t} [(p-1)\varepsilon^{\frac{p}{p-1}} \|x_s\|^p + \varepsilon^{-p}K^{\frac{p}{2}}(1 + \|x_s\|^2)^{\frac{p}{2}}]\mathrm{d}s \quad (用(3.3.5))$$

$$\leqslant (1+\kappa)^{p-1}[(p-1)\varepsilon^{\frac{p}{p-1}} + \varepsilon^{-p}(2K)^{\frac{p}{2}}]\int_{t_0}^{t} (1 + \|x_s\|^p)\mathrm{d}s$$

$$= p\sqrt{2K}(1+\kappa)^{p-1}\int_{t_0}^{t} (1 + \|x_s\|^p)\mathrm{d}s. \qquad (取\ \varepsilon^{\frac{p}{p-1}} = \sqrt{2K})$$

类似地

$$I_3 \leqslant Kp(p-1)(1+\kappa)^{p-2}\int_{t_0}^{t} (1 + \|x_s\|^p)\mathrm{d}s, \qquad (*)$$

$$\mathrm{E}\Big(\sup_{t_0\leqslant s\leqslant t} I_4(s)\Big) \leqslant \mathrm{E}\Big[\sup_{t_0\leqslant s\leqslant t}\Big|\int_{t_0}^{s} p|\tilde{x}(r)|^{p-2}\tilde{x}^{\mathrm{T}}(r)g(r,x_r)\mathrm{d}w(r)\Big|\Big]$$

$$\leqslant \mathrm{E}\Big[32p^2\int_{t_0}^{t} |\tilde{x}(s)|^{2p-2} |g(s,x_s)|^2\mathrm{d}s\Big]^{\frac{1}{2}} \qquad (用(1.3.48))$$

$$\leqslant \mathrm{E}\Big[\sup_{t_0\leqslant s\leqslant t} |\tilde{x}(s)|^p \cdot 32p^2\int_{t_0}^{t} |\tilde{x}(s)|^{p-2} |g(s,x_s)|^2\mathrm{d}s\Big]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\tilde{h}(t) + 16p^2\mathrm{E}\int_{t_0}^{t} |\tilde{x}(s)|^{p-2} |g(s,x_s)|^2\mathrm{d}s$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\tilde{h}(t) + 32Kp^2(1+\kappa)^{p-2}\int_{t_0}^{t} \mathrm{E}(1 + \|x_s\|^p)\mathrm{d}s. \quad (用(*))$$

合并以上各式即得不等式

$$\tilde{h}(t) \leqslant 2(1+\kappa)^p\mathrm{E}\|\xi\|^p + \beta(1-\kappa)^p\int_{t_0}^{t} [1 + h(s)]\mathrm{d}s. \qquad (3.3.14)$$

(iii) 结合式(3.3.13)与(3.3.14)得不等式(3.3.12)：

$$1 + h(t) \leqslant 1 + \frac{\mathrm{E}\|\xi\|^p}{1-\kappa} + \frac{\tilde{h}(t)}{(1-\kappa)^p} \qquad (用(3.3.13))$$

$$\leqslant 1+\bar{\beta}\mathrm{E}\|\xi\|^p+\beta\int_{t_0}^t[1+h(s)]\mathrm{d}s. \quad (\text{用}(3.3.14))$$

由 Gronwall 不等式解出

$$1+h(t)\leqslant(1+\bar{\beta}\mathrm{E}\|\xi\|^p)\mathrm{e}^{\beta(t-t_0)}.$$

由此推出式(3.3.12). □

若 $p=2$, 则对定理证明中的 $I_2\sim I_4$ 的估计更简单且结果更好:

$$I_2\leqslant 2\sqrt{K}(1+\kappa)\int_{t_0}^t(1+\|x_s\|^2)\mathrm{d}s,$$

$$I_3\leqslant K\int_{t_0}^t(1+\|x_s\|^2)\mathrm{d}s,$$

$$\mathrm{E}\Big(\sup_{t_0\leqslant s\leqslant t}I_4(s)\Big)\leqslant\frac{1}{2}\tilde{h}(t)+64K\int_{t_0}^t\mathrm{E}(1+\|x_s\|^2)\mathrm{d}s.$$

这就将式(3.3.14)改进为

$$\tilde{h}(t)\leqslant 2(1+\kappa)^2\mathrm{E}\|\xi\|^2+[4\sqrt{K}(1+\kappa)+130K]\int_{t_0}^t\mathrm{E}(1+\|x_s\|^2)\mathrm{d}s.$$

由此就可将估计(3.3.12)改进为

$$\begin{cases}\mathrm{E}\Big(\sup\limits_{t_0-\tau\leqslant s\leqslant t}|x(s)|^2\Big)\leqslant(1+\bar{\beta}\mathrm{E}\|\xi\|^2)\mathrm{e}^{\beta(t-t_0)}, \quad t\in J,\\ \bar{\beta}=\dfrac{1}{1-\kappa}+\dfrac{2(1+\kappa)^2}{(1-\kappa)^2}, \quad \beta=\dfrac{4\sqrt{K}(1+\kappa)+130K}{(1-\kappa)^2}.\end{cases} \tag{3.3.15}$$

当取 $\kappa=0$ 时,(3.3.15)与(3.1.26)完全一致. 这就清楚地表明,对于 SFDE 与 NSFDE,这两类方程所用的处理方法是高度统一的.

在§3.1 中,基于定理 3.1.5 我们比较容易地得出了解的 p 阶矩连续性,即定理 3.1.6. 然而现在已没有这么简单了. 但 p 阶矩连续性的结论仍然是重要的,在稍强的条件下仍能被证明,我们引述以下结果以备用.

定理 3.3.5 设 $p\geqslant 2, x(t)=x(t,\xi), \xi\in L^p$. 假定线性增长条件(3.3.5)与以下条件满足: $u(0)=0$,

$$\mathrm{E}|u(\varphi)-u(\psi)|^p\leqslant\kappa^p\|\varphi-\psi\|_0^p, \quad \varphi,\psi\in L^p_{\mathscr{F}}(\Omega,C),$$

其中 $\kappa\in(0,1)$ 为常数,则对任给 $t\in J,\delta\in(0,\tau)$ 有

$$\mathrm{E}|x(t+\delta)-x(t)|^p$$

$$\leqslant\frac{\kappa\beta_\delta}{1-\kappa}(1+2^{p-1})+\frac{c_1\delta^{p/2}}{(1-\kappa)^p}+\frac{\kappa 2^{p-1}}{(1-\kappa)(1-\sqrt{\kappa})}\Big[\beta_\delta c_2\kappa+\frac{c_3\delta^{p/2}}{(1-\kappa)^{p-1}}\Big],$$

其中 c_1,c_2,c_3 是与 t,δ 无关的正常数,

$\beta_\delta=\inf\{\beta>0: \mathrm{E}|\xi(\theta)-\xi(\theta')|^p\leqslant\beta$ 对 $\theta,\theta'\in[-\tau,0], |\theta-\theta'|\leqslant\delta\}$.

由控制收敛定理,当 $\xi\in L^p$ 时 $\xi(\theta)$ 对 θ 为 L^p 连续,从而在 $[-\tau,0]$ 上一致 L^p 连续,因此 $\lim\limits_{\delta\to 0}\beta_\delta=0$. 这就由定理 3.3.5 推出,在定理条件下 $x(t)$ 在 J 上 L^p 连续.

至于渐近估计,仍有一个类似于推论 3.1.8 的结论,即

推论 3.3.6　设在 $\mathbf{R}_+ \times C$ 上条件(3.3.5)与(3.3.11)满足,则对任何 $\xi \in L^2_{\mathscr{F}_{t_0}}(\Omega,C)$ 有

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t}\ln|x(t,\xi)| \leqslant \frac{2\sqrt{K}(1+\kappa)+65K}{(1-\kappa)^2}, \text{a.s.}. \tag{3.3.16}$$

证明基于定理 3.3.4(但用对于 $p=2$ 的式(3.3.15)),与证推论 3.1.8 没有什么不同.

若在式(3.3.16)中取 $\kappa=0$, 则得到

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} t^{-1}\ln|x(t,\xi)| \leqslant 2\sqrt{K}+65K, \text{a.s.}.$$

这正好与推论 3.1.8 的结论((3.1.28))一致.

3.3.3　稳定性

现在考虑稳定性问题,相应地设

$$u(0)=0,\quad f(t,0)\equiv 0,\quad g(t,0)\equiv 0,\quad t\geqslant 0.$$

如同在 §3.2 中一样,假定 u,f,g 均连续. 我们将主要借鉴 §3.2 中的方法,尽管函数 $u(\cdot)$ 的出现导致更复杂的情况. 首要的任务是推广 Razumikhin 型定理 3.2.3,而为此不免要推广由(3.2.3)定义的 $\mathscr{L}V(t,\varphi)$. 任给 $\varphi\in C$, 约定 $\bar{\varphi}(\theta)=\varphi(\theta)-u(\varphi)$. 这一记号显然联系于记号 $\bar{x}(t)=x(t)-u(x_t)$, 它同样将带来不少简化. 任给 $V(t,x)\in C^{1,2}([-\tau,\infty)\times\mathbf{R}^d)$, 约定

$$\begin{aligned}\mathscr{L}V(t,\varphi) &= V_t(t,\bar{\varphi}(0))+V_x(t,\bar{\varphi}(0))f(t,\varphi)\\ &\quad+(1/2)\mathrm{tr}[g^{\mathrm{T}}(t,\varphi)V_{xx}(t,\bar{\varphi}(0))g(t,\varphi)].\end{aligned} \tag{3.3.17}$$

若 $x(t)$ 是方程(3.3.1)的解,则以 $\varphi=x_t$ 代入式(3.3.17)并用式(3.3.1)′得

$$\mathscr{L}V(t,x_t)=LV(t,\bar{x}(t)),\quad t\geqslant 0. \tag{3.3.18}$$

若令 $u(\cdot)\equiv 0$, 则式(3.3.17)与(3.3.18)分别重合于式(3.3.3)与(3.3.4). 我们自然期望,由式(3.3.17)所定义的 $\mathscr{L}V(t,\varphi)$ 将如 §3.2 中的 $\mathscr{L}V(t,\varphi)$ 一样发挥中心作用. 下面的定理即可说明这一点,它正是定理 3.2.1 的推广.

定理 3.3.7　设 $p\geqslant 1$, 存在 $V(t,x)\in C^{1,2}([-\tau,\infty)\times\mathbf{R}^d)$ 与正常数 c_1,c_2,μ 及 $\kappa\in[0,1)$, $q>(c_2/c_1)(1-\kappa)^{-p}$, 使得以下条件满足:

$$\mathrm{E}|u(\varphi)|^p \leqslant \kappa^p\|\varphi\|_0^p,\quad \varphi\in L^p_{\mathscr{F}}(\Omega,C), \tag{3.3.19}$$

$$c_1|x|^p \leqslant V(t,x)\leqslant c_2|x|^p,\quad t\geqslant -\tau, x\in\mathbf{R}^d, \tag{3.3.20}$$

$$\begin{cases}\varphi\in L^p_{\mathscr{F}_t}(\Omega,C),\ \mathrm{E}V(t+\theta,\varphi(\theta))\leqslant q\mathrm{E}V(t,\bar{\varphi}(0))(\forall\theta\in[-\tau,0])\\ \Rightarrow \mathrm{E}\mathscr{L}V(t,\varphi)\leqslant -\mu\mathrm{E}V(t,\bar{\varphi}(0)),\end{cases} \tag{3.3.21}$$

则对任何有界的初值 ξ, 方程(3.3.1)的解 $x(t,\xi)$ 满足

$$\begin{cases}\mathrm{E}\,|\,x(t,\xi)\,|^p \le (c_2/c_1)(1+\kappa)^p(1-\kappa_1)^{-p}\,\|\xi\|_0^p\mathrm{e}^{-\gamma t}, & t\ge 0,\\ \kappa_1=\kappa\mathrm{e}^{\gamma\tau/p}, \quad \gamma=\mu\wedge\tau^{-1}\ln\left[q_1(1+\kappa q_1^{1/p})^{-p}\right], & q_1=c_1q/c_2.\end{cases} \tag{3.3.22}$$

因此,方程(3.3.1)的零解 p 阶矩指数稳定.

证 (i) 预备. 若 $\kappa=0$, 则 $u(\cdot)\equiv 0$, 此时式(3.3.22)与(3.2.7)一致,而条件(3.3.21)蕴涵了条件(3.2.6),因而定理结论由定理3.2.1推出. 故下面可设 $0<\kappa<1$. 其次不妨设 $p>1$ (当 $p=1$ 时证明更简单).

取定有界的初值 ξ, 令 $x(t)=x(t,\xi)$. 如已习惯的做法,只要对满足

$$0<\gamma<\mu\wedge\tau^{-1}\ln\left[\,q_1(1+\kappa q_1^{1/p})^{-p}\right] \tag{3.3.23}$$

的 γ 证不等式(3.3.22),而这又相当于证

$$h(t)\triangleq \mathrm{e}^{\gamma t}\mathrm{E}\,|\,x(t)\,|^p\le\beta(1-\kappa_1)^{-p},\quad t\ge 0, \tag{3.3.24}$$

其中 $\beta=(c_2/c_1)(1+\kappa)^p\,\|\xi\|_0^p$. 因由 $q_1>(1-\kappa)^{-p}$ 推出 $q_1(1+\kappa q_1^{1/p})^{-p}>1$, 故满足条件(3.3.23)的 γ 必存在. 其次,由不等式(3.3.23)易推出

$$0<\kappa_1<1,\quad (1-\kappa_1)^{-p}<q_1\mathrm{e}^{-\gamma\tau}. \tag{3.3.25}$$

(ii) 设定

$$\tilde h(t)\triangleq \mathrm{e}^{\gamma t}\mathrm{E}\,|\,\tilde x(t)\,|^p\le\beta,\quad t\ge 0, \tag{3.3.26}$$

则对 $t\ge 0$ 有

$$\begin{aligned}H(t)&\triangleq \sup_{-\tau\le s\le t}h(s)\le\|\xi\|_0^p\vee\sup_{0\le s\le t}h(s)\\&\le\|\xi\|_0^p\vee\sup_{0\le s\le t}\mathrm{e}^{\gamma s}\left[(1-\kappa_1)^{1-p}\mathrm{E}\,|\,\tilde x(s)\,|^p+\kappa_1^{1-p}\mathrm{E}\,|\,u(x_s)\,|^p\right]\\&\le\|\xi\|_0^p\vee\sup_{0\le s\le t}\left[(1-\kappa_1)^{1-p}\tilde h(s)+\kappa_1^{1-p}\kappa^p\mathrm{e}^{\gamma s}\,\|x_s\|_0^p\right]\quad(\text{用}(3.3.19))\\&\le\beta(1-\kappa_1)^{1-p}+\kappa_1H(t),\quad(\text{用}(3.3.26))\end{aligned}$$

其中用到 $\|\xi\|_0^p\le\beta$. 于是解出

$$H(t)\le\beta(1-\kappa_1)^{-p}<\beta\,q_1\mathrm{e}^{-\gamma\tau}.\quad(\text{用}(3.3.25)) \tag{3.3.27}$$

然后用 $h(t)\le H(t)$ 即得出式(3.3.24). 可见,只要证不等式(3.3.26).

(iii) 证不等式(3.3.26),这是证明的核心部分. 注意到条件(3.3.20),为证(3.3.26), 只需证

$$W(t)\triangleq \mathrm{e}^{\gamma t}\mathrm{E}V(t,\tilde x(t))\le\beta\,c_1,\quad t\ge 0. \tag{3.3.28}$$

首先有

$$\begin{aligned}W(0)&=\mathrm{E}V(0,\tilde x(0))\le c_2\mathrm{E}\,|\,\tilde x(0)\,|^p & (\text{用}(3.3.20))\\&\le(1+\kappa)^{p-1}\left[\mathrm{E}\,|\,\xi(0)\,|^p+\kappa^{1-p}\mathrm{E}\,|\,u(\xi)\,|^p\right] & (\text{用}(1.3.55)')\\&\le c_2(1+\kappa)^p\,\|\xi\|_0^p=\beta\,c_1, & (\text{用}(3.3.19))\end{aligned}$$

即当 $t=0$ 时(3.3.28)成立. 若(3.3.28)不对所有 $t\ge 0$ 成立,则由 $W(\cdot)$ 的连续性,必有最小的 $r\in\mathbf{R}_+$, 使得(3.3.28)在 $[0,r]$ 上成立. 必定 $W(r)=\beta\,c_1$, 且当 $0\le t\le r$ 时由(3.3.28)推出的(3.3.26)及(3.3.27)均可用(这是要点!). 任给 $t\in$

$[r-\tau,r]$，当 $t\geqslant 0$ 时有

$$\begin{aligned}\mathrm{E}V(t,x(t)) &\leqslant c_2\mathrm{E}|x(t)|^p = c_2 e^{-\gamma t}h(t)\\ &\leqslant c_2 e^{-\gamma t}H(t) < c_2 e^{-\gamma t}\beta q_1 e^{-\gamma\tau} \qquad (\text{用}(3.3.27))\\ &\leqslant q e^{-\gamma r}W(r) = q\mathrm{E}V(r,\tilde{x}(r)).\end{aligned}$$

易验知当 $r-\tau\leqslant t<0$ 时亦有 $\mathrm{E}V(t,x(t))\leqslant q\mathrm{E}V(r,\tilde{x}(r))$. 这表明 $\varphi=x_r$ 合于条件(3.3.21)中的要求，因而对 $\varphi=x_r$ 应用条件(3.3.21)（并用式(3.3.18)）得

$$\mathrm{E}LV(r,\tilde{x}(r)) \leqslant -\mu\mathrm{E}V(r,\tilde{x}(r)).$$

如同定理 3.2.1 之证，可说明 $\mathrm{E}V(r,\tilde{x}(r))>0$. 用 $\gamma<\mu$ 并用连续性（这是要点!），当 t 邻近 r 时有 $\mathrm{E}LV(t,\tilde{x}(t))\leqslant-\gamma\mathrm{E}V(t,\tilde{x}(t))$. 于是，当 $\delta>0$ 充分小时有

$$W(t)\Big|_r^{r+\delta} = \int_r^{r+\delta} e^{\gamma t}[\mathrm{E}LV(t,\tilde{x}(t)) + \gamma\mathrm{E}V(t,\tilde{x}(t))]\mathrm{d}t \leqslant 0.$$

这表明 $W(r+\delta)\leqslant W(r)$，但这与 r 的“最小性”相矛盾. 因此式(3.3.28)必对所有 $t\geqslant 0$ 成立，如所要证. □

定理 3.3.7 并不是定理 3.2.1 的一个完全推广. 首先，在定理 3.3.7 中限定了 $p\geqslant 1$，这一限制显然是定理 3.3.7 的证法所必需的. 其次，条件(3.3.21)虽然与条件(3.2.6)对应，但并不完全相当：因 $q>(c_2/c_1)(1-\kappa)^{-p}>1$，在式(3.3.21)中限定 φ 的不等式

$$\mathrm{E}V(t+\theta,\varphi(\theta)) \leqslant q\mathrm{E}V(t,\tilde{\varphi}(0)),\quad \forall\theta\in[-\tau,0]$$

更宽松，这意味着要求(3.3.21)在一个更弱的前提下成立，因而使条件(3.3.21)的验证要困难些. 注意，即使令 $\kappa=0$，定理 3.3.7 的条件与结论仍与定理 3.2.1 有所不同，除非 $c_1=c_2$. 若取 $V=|x|^p$，则 $c_1=c_2=1$，在这种情况下，条件(3.3.20)成为多余，而条件(3.3.21)可表为（对照(3.2.10)）

$$\begin{cases}\varphi\in L^p_{\mathscr{F}_t}(\Omega,C),\ \|\varphi\|_0^p\leqslant q\mathrm{E}|\tilde{\varphi}(0)|^p\\ \Rightarrow (p/2)\mathrm{E}\{|\tilde{\varphi}(0)|^{p-2}[2\tilde{\varphi}^{\mathrm{T}}(0)f(t,\varphi)+|g(t,\varphi)|^2]\\ \quad +(p-2)|\tilde{\varphi}(0)|^{p-4}|\tilde{\varphi}^{\mathrm{T}}(0)g(t,\varphi)|^2\}\leqslant-\mu\mathrm{E}|\tilde{\varphi}(0)|^p.\end{cases} \tag{3.3.29}$$

当 $u(\cdot)\equiv 0$ 时，式(3.3.29)重合于(3.2.10). 类比于(3.2.11)，条件(3.3.29)可取如下形式：

$$\begin{cases}x(t)\ \text{是方程(3.3.1)的解},\ \|x_t\|_0^p\leqslant q\mathrm{E}|\tilde{x}(t)|^p\\ \Rightarrow (p/2)\mathrm{E}\{|\tilde{x}(t)|^{p-2}[2\tilde{x}^{\mathrm{T}}(t)f(t,x_t)+|g(t,x_t)|^2]\\ \quad +(p-2)|\tilde{x}(t)|^{p-4}|\tilde{x}^{\mathrm{T}}(t)g(t,x_t)|^2\}\leqslant-\mu\mathrm{E}|\tilde{x}(t)|^p.\end{cases} \tag{3.3.30}$$

若 $p=2$，则条件(3.3.29)与(3.3.30)分别简化为

$$\begin{cases}\varphi \in L^2_{\mathscr{F}_t}(\Omega,C),\ \|\varphi\|_0^2 \leqslant q\mathrm{E}|\tilde{\varphi}(0)|^2 \\ \Rightarrow \mathrm{E}[2\tilde{\varphi}^{\mathrm{T}}(0)f(t,\varphi)+|g(t,\varphi)|^2] \leqslant -\mu\mathrm{E}|\tilde{\varphi}(0)|^2,\end{cases} \tag{3.3.31}$$

$$\begin{cases}x(t)\ \text{是方程(1)的解},\ \|x_t\|_0^2 \leqslant q\mathrm{E}|\tilde{x}(t)|^2 \\ \Rightarrow \mathrm{E}[2\tilde{x}^{\mathrm{T}}(t)f(t,x_t)+|g(t,x_t)|^2] \leqslant -\mu\mathrm{E}|\tilde{x}(t)|^2.\end{cases} \tag{3.3.32}$$

注意到,在本节中,我们并未紧随推论 3.3.6 之后建立一个对应于定理 3.1.9 的渐近估计结果. 实际上,我们确能作到这一点,不过放在此处考虑更恰当些,因为我们的主要兴趣是得出相应的 a.s. 指数稳定性结论. 下面就是定理 3.1.9 的一个令人满意的推广.

定理 3.3.8 设 $p \geqslant 1, \xi \in L^2 \cap L^p$, 方程(3.3.1)的解 $x(t) = x(t,\xi)$ 满足

$$\mathrm{E}|x(t)|^p \leqslant c\mathrm{e}^{-\mu t}, \quad t \geqslant 0, \tag{3.3.33}$$

其中 c,μ 是正常数. 若 $0 \leqslant \kappa < 1$, 条件(3.3.19)及以下条件满足

$$\begin{cases}\mathrm{E}|f(t,x_t)|^p \vee \mathrm{E}|g(t,x_t)|^p \leqslant K\|x_t\|_0^p, \quad p \geqslant 2, & (3.3.34\mathrm{a}) \\ \mathrm{E}\Big(\sup\limits_{t-\tau\leqslant s\leqslant t}|f(s,x_s)|^p\Big) \vee \mathrm{E}\Big(\sup\limits_{t-\tau\leqslant s\leqslant t}|g(s,x_s)|^p\Big) & \\ \quad \leqslant K\|x_t\|_0^p, \quad 1 \leqslant p < 2, & (3.3.34\mathrm{b})\end{cases}$$

其中 $x(t)$ 是方程(3.3.1)的解, K 是正常数,则对 $\gamma = \mu \wedge \tau^{-1}\ln\kappa^{-p}$ 有

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\, t^{-1}\ln|x(t)|^p \leqslant -\gamma, \text{a.s.}. \tag{3.3.35}$$

因此,在条件(3.3.34)及定理 3.3.7 的条件之下,方程(3.3.1)的零解是 a.s. 指数稳定的.

证 如同定理 3.3.7 之证,可设 $p > 1, 0 < \gamma < \mu \wedge \tau^{-1}\ln\kappa^{-p}$. 只需证对几乎所有的 $\omega \in \Omega$ 有

$$h(t) \triangleq \mathrm{e}^{\gamma t}|x(t)|^p \leqslant c_1, \quad t \geqslant 0, \tag{3.3.36}$$

其中 c_1 与 t 无关. 下面的证法颇类似于定理 3.1.9 之证. 但如本节许多其他结论的证明一样,由于 $u(\cdot)$ 的存在,证明中增加了一个针对 $\tilde{x}(t)$ 的中间步骤:只有首先建立关于 $\tilde{x}(t)$ 的某个预备性结论,然后才能推出关于 $x(t)$ 的最终结论(3.3.36).

(i) 设定 a.s. 地成立

$$\mathrm{e}^{\gamma t}|\tilde{x}(t)|^p \leqslant c_2, \quad t \geqslant 0, \tag{3.3.37}$$

其中 c_2 与 t 无关. 取定 $\omega \in \Omega$ 使不等式(3.3.37)成立,今由(3.3.37)推出(3.3.36). 注意一旦取定了 $\omega, x(t)$ 与 $\tilde{x}(t)$ 就不再具有随机性(这是要点!). 令 $\kappa_1 = \kappa\mathrm{e}^{\gamma\tau/p}$. 代替 $h(t)$, 今估计

$$\begin{aligned}H(t) &\triangleq \sup_{0\leqslant s\leqslant t} h(s) \leqslant \sup_{0\leqslant s\leqslant t}\mathrm{e}^{\gamma s}[(1-\kappa_1)^{1-p}|\tilde{x}(s)|^p + \kappa_1^{1-p}|u(x_s)|^p] \\ &\leqslant c_2(1-\kappa_1)^{1-p} + \kappa_1 \sup_{-\tau\leqslant s\leqslant t} h(s) \\ &= c_2(1-\kappa_1)^{1-p} + \kappa_1[\|\xi\|^p + H(t)],\end{aligned}$$

由此解出

$$H(t) \leqslant c_2(1-\kappa_1)^{-p} + \kappa_1(1-\kappa_1)^{-1}\|\xi\|^p \triangleq c_1, \quad t \geqslant 0.$$

由此推出式(3.3.36). 这就将证(3.3.36)转化为证(3.3.37).

(ii) 证不等式(3.3.37),这无疑是证明中更本质的部分. 不过,因已有定理 3.1.9 之证可资参考,这一步骤其实并不包含新的思想. 类似于定理 3.1.9 之证,只要证

$$\mathrm{E}\|\tilde{x}_{n\tau}\|^p \leqslant \text{const } \mathrm{e}^{-n\gamma\tau}, \quad n \geqslant 1. \tag{3.3.38}$$

为此作以下估计:

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\|\tilde{x}_{n\tau}\|^p &= \mathrm{E}\Big[\sup_{n\tau-\tau\leqslant t\leqslant n\tau} |\tilde{x}(t)|^p\Big] \\
&\leqslant C_p\mathrm{E}|\tilde{x}(n\tau-\tau)|^p + C_p\mathrm{E}\Big[\int_{n\tau u-\tau}^{n\tau} |f(s,x_s)|\,\mathrm{d}s\Big]^p \\
&\quad + C_p\mathrm{E}\Big[\sup_{n\tau-\tau\leqslant t\leqslant n\tau}\Big|\int_{n\tau-\tau}^{t} g(s,x_s)\,\mathrm{d}w(s)\Big|^p\Big] \qquad (\text{用}(1.3.51)) \\
&\triangleq I_1 + I_2 + I_3,
\end{aligned}$$

今分别估计 $I_1 \sim I_3$. 首先,

$$\begin{aligned}
I_1 &\leqslant \text{const}[\mathrm{E}|x(n\tau-\tau)|^p + \mathrm{E}|u(x_{n\tau-\tau})|^p] && (\text{用}(1.3.51)) \\
&\leqslant \text{const}[c\mathrm{e}^{-\mu\tau(n-1)} + \kappa^p\|x_{n\tau-\tau}\|_0^p] && (\text{用}(3.3.33),(3.3.19)) \\
&\leqslant \text{const}\Big[\mathrm{e}^{-n\gamma\tau} + \sup_{n\tau-2\tau\leqslant t\leqslant n\tau-\tau}\mathrm{E}|x(t)|^p\Big] \\
&\leqslant \text{const } \mathrm{e}^{-n\gamma\tau}. && (\text{用}(3.3.33))
\end{aligned}$$

类似于定理 3.1.9 之证,分 $p \geqslant 2$ 与 $1 < p < 2$ 两种情况考虑,可得

$$I_2 \leqslant \text{const } \mathrm{e}^{-n\gamma\tau}, \quad I_3 \leqslant \text{const } \mathrm{e}^{-n\gamma\tau}.$$

综合起来即得式(3.3.38),于是定理得证. □

如同在 §3.2 中一样,重要的事情是将定理 3.3.7 和定理 3.3.8 所提供的稳定性判别法具体化,而这导向各种特殊结果,它们以这样或那样的形式将关键性的条件(3.3.21)改造成一个更便于验证的条件. 下面就是一个这样的结果.

定理 3.3.9　设 $p \geqslant 1$, 存在常数 $\kappa \in [0,1/2)$, $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbf{R}$, 使得条件(3.3.19)及以下条件满足:

$$\lambda_1^+ < \lambda_0(1-2\kappa)^p, \tag{3.3.39}$$

$$\mathrm{E}\mathscr{L}V(t,\varphi) \leqslant -\lambda_0\mathrm{E}|\varphi(0)|^p + \lambda_1\|\varphi\|_0^p, \quad \varphi \in L^p_{\mathscr{F}}(\Omega,C), \tag{3.3.40}$$

其中 $V = |x|^p$, $\mathscr{L}V(t,\varphi)$ 依式(3.3.17),则方程(3.3.1)的零解 p 阶矩指数稳定. 若进而设条件(3.3.34)满足,则(3.3.1)的零解 a. s. 指数稳定.

证　只需利用条件(3.3.19),(3.3.39)与(3.3.40)验证条件(3.3.29),而为此又只要验证:对适当选定的 $\mu > 0$ 与 $q > q_0 \triangleq (1-\kappa)^{-p}$, 当 $\varphi \in L^p_{\mathscr{F}}(\Omega,C)$,

$$\|\varphi\|_0^p \leqslant q\mathrm{E}|\tilde{\varphi}(0)|^p \tag{3.3.41}$$

时有

$$\lambda_0\mathrm{E}|\varphi(0)|^p - \lambda_1\|\varphi\|_0^p \geqslant \mu\mathrm{E}|\tilde{\varphi}(0)|^p. \tag{3.3.42}$$

$p=1$ 或 $\kappa=0$ 的情况是容易的,下面不妨设 $p>1,\kappa\in(0,1/2)$.

取定满足条件(3.3.41)的 $\varphi\in L^p_{\mathscr{F}}(\Omega,C)$,$q>q_0$ 待定. 令 $h=\mathrm{E}|\tilde{\varphi}(0)|^p$, 则

$$\begin{aligned} h &= \mathrm{E}|\varphi(0)-u(\varphi)|^p \\ &\leqslant (1-\kappa_1)^{1-p}\mathrm{E}|\varphi(0)|^p + \kappa_1^{1-p}\kappa^p\|\varphi\|_0^p \qquad (\kappa_1=\kappa q^{1/p}) \\ &\leqslant (1-\kappa_1)^{1-p}\mathrm{E}|\varphi(0)|^p + \kappa_1 h. \end{aligned}$$

解出 $\mathrm{E}|\varphi(0)|^p\geqslant h(1-\kappa_1)^p$, 则

$$\lambda_0\mathrm{E}|\varphi(0)|^p - \lambda_1\|\varphi\|_0^p \geqslant h\mu,$$

其中

$$\mu = \lambda_0(1-\kappa q^{1/p})^p - \lambda_1^+ q \triangleq \mu(q).$$

因

$$\mu(q_0) = q_0[\lambda_0(1-2\kappa)^p - \lambda_1^+] > 0, \quad (\text{用}(3.3.39))$$

故必有 $q>q_0$ 使 $\mu=\mu(q)>0$. 其次,由 $\kappa\in(0,1/2)$ 推出 $\kappa q_0^{1/p}=\kappa/(1-\kappa)\in(0,1)$, 于是当 $q>q_0$ 充分接近 q_0 时有 $\kappa_1=\kappa q^{1/p}\in(0,1)$, 于是定理得证. □

与条件(3.3.29)不同,条件(3.3.40)中不出现那个未明确指定且有点神秘的 q, 且右端不涉及函数 $u(\cdot)$, 因而更便于应用. 若 $p=2$, 则条件(3.3.40)可写得更具体:

$$\mathrm{E}[2\tilde{\varphi}^{\mathrm{T}}(0)f(t,\varphi)+|g(t,\varphi)|^2] \leqslant -\lambda_0\mathrm{E}|\varphi(0)|^2 + \lambda_1\|\varphi\|_0^2. \tag{3.3.43}$$

3.3.4 特殊情形

现在考虑 NSFDE 的几种特殊情形,考虑的重点是稳定性问题. 对于这些较特殊类型的方程,我们自然希望得到更精细的结果.

首先考虑中立型延迟微分方程,其一般形式为

$$\mathrm{d}[x(t)-U(y(t))] = F(t,x(t),y(t))\mathrm{d}t + G(t,x(t),y(t))\mathrm{d}w(t), \tag{3.3.44}$$

此处用了一个临时设定的缩记号

$$y(t) = (x(t-\delta_1(t)),\cdots,x(t-\delta_k(t))) \in \mathbf{R}^{dk},$$

其中 $\delta_j(t):\mathbf{R}_+\to(0,\tau]$ ($1\leqslant j\leqslant k$,以下总如此,不再注明) 是连续函数. 此外,假定 $U:\mathbf{R}^{dk}\to\mathbf{R}^d$, $F:\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^{dk}\to\mathbf{R}^d$ 与 $G:\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^{dk}\to\mathbf{R}^{d\times m}$ 均为 Borel 可测函数;当应用定理 3.3.7 或其推论时,认定这些函数是连续的. 若令

$$u(x_t) = U(y(t)),$$

$$f(t,x_t) = F(t,x(t),y(t)),$$

$$g(t,x_t)=G(t,x(t),y(t)),$$

则方程(3.3.44)转化为标准形式的 NSFDE(3.3.1)，因而可对其应用已得的一般结论. 不过，就存在定理而言，对于特殊形式的方程(3.3.44)只需较宽的条件.

定理 3.3.10　设 $\delta_j(t)>0$，以下条件满足：

(i) 局部 Lipschitz 条件：$\forall n\geqslant 1$，存在正常数 $\bar{K}_n$，使得当 $t\in[0,n]$，$x,\bar{x}\in\mathbf{R}^d$，$|x|\vee|\bar{x}|\leqslant n$，$y=(y_1,y_2,\cdots,y_k)\in\mathbf{R}^{dk}$ 时有

$$|F(t,x,y)-F(t,\bar{x},y)|^2\vee|G(t,x,y)-G(t,\bar{x},y)|^2\leqslant\bar{K}_n|x-\bar{x}|^2;$$

(ii) 线性增长条件：$\forall n\geqslant 1$，存在正常数 K_n 与 K，使得当 $t\in[0,n]$，$x\in\mathbf{R}^d$，$y=(y_1,y_2,\cdots,y_k)\in\mathbf{R}^{dk}$ 时有

$$|F(t,x,y)|^2\vee|G(t,x,y)|^2\leqslant K_n(1+|x|^2+|y|^2);$$

$$|U(y)|^2\leqslant K(1+|y|^2),$$

则方程(3.3.44)的初值问题在 $[-\tau,\infty)$ 上存在唯一解.

下面总假定方程(3.3.44)的初值问题存在唯一解，且仍用 $x(t,\xi)$ 这样熟悉的记号. 凡涉及稳定性问题，总认定

$$U(0)=0,\quad F(t,0)\equiv 0,\quad G(t,0)\equiv 0.$$

为将式(3.3.18)用于较特殊的方程(3.3.44)，对任给 $V(t,x)\in C^{1,2}(\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^d)$，约定

$$\begin{aligned}\mathscr{L}V(t,x,y)=&V_t(t,z)+V_x(t,z)F(t,x,y)\\&+(1/2)\mathrm{tr}[G^{\mathrm{T}}(t,x,y)V_{xx}(t,z)G(t,x,y)],\end{aligned}\tag{3.3.45}$$

其中 $t\geqslant 0$，$x,y_j\in\mathbf{R}^d$，$y=(y_1,y_2,\cdots,y_k)$，$z=x-U(y)$. 任给 $t\geqslant 0$，$\varphi\in C$，易验证

$$\mathscr{L}V(t,\varphi)=\mathscr{L}V(t,\varphi(0),\varphi(-\delta_1(t)),\cdots,\varphi(-\delta_k(t))).\tag{3.3.46}$$

结合式(3.3.18)得：若 $x(t)$ 是方程(3.3.44)的解(注意这是前提!)，则

$$LV(t,\bar{x}(t))=\mathscr{L}V(t,x(t),y(t)).\tag{3.3.47}$$

这正是函数 $\mathscr{L}V(t,x,y)$ 价值之所在. 鉴于 $\mathscr{L}V(t,x,y)$ 极为重要而又易被误解，下面强调说明几点：

(i) 与作为 t 的函数 $LV(t,\bar{x}(t))$ 不同，$\mathscr{L}V(t,x,y)$ 是独立变元 t,x,y 的函数，其中 x 完全不必联系于方程(3.3.44)的解 $x(t)$；仅当 $x(t)$ 是方程(3.3.44)的解并以 $x=x(t)$ 与 $y=y(t)$ 代入 $\mathscr{L}V(t,x,y)$ 时才可用等式(3.3.47). 正因为要强调 $\mathscr{L}V(t,x,y)$ 与 $LV(t,\bar{x}(t))$ 的上述差别，我们避用记号 $LV(t,x,y)$，尽管它也见于某些文献.

(ii) 与作为 (t,x) 的函数 V 不同，$\mathscr{L}V(t,x,y)$ 多了一个独立变元 y. 即使 V 仅与 x 有关(例如 $V=|x|^p$)，$\mathscr{L}V(t,x,y)$ 一般仍依赖于 t,x,y.

(iii) 若 V,F,G 均不显含 t (此时方程(3.3.44)是自治的)，则 $\mathscr{L}V(t,x,y)$ 与 t

无关，此时可缩写作 $\mathscr{L}V(x,y)$，但其中的 y 仍不能省去.

(iv) 若 $U(y)\equiv 0$，则在式(3.3.45)中 $z=x$，而式(3.3.47)成为

$$LV(t,x(t))=\mathscr{L}V(t,x(t),y(t)). \tag{3.3.47$'$}$$

将定理3.3.9用于方程(3.3.44)得

定理 3.3.11 设 $p\geqslant 1$，存在非负常数 $\lambda_0,\lambda_j,\kappa_j$，使得 $\kappa=\left(\sum\kappa_j\right)^{1/p}\in[0,1/2)$，且以下条件满足：

$$\sum_j\lambda_j<\lambda_0(1-2\kappa)^p, \tag{3.3.48}$$

$$|U(y)|^p\leqslant\sum_j\kappa_j|y_j|^p, \tag{3.3.49}$$

$$\begin{aligned}&(p/2)|z|^{p-2}[2z^{\mathrm{T}}F(t,x,y)+|G(t,x,y)|^2+(p-2)|z|^{-2}|z^{\mathrm{T}}G(t,x,y)|^2]\\&\leqslant-\lambda_0|x|^p+\sum_j\lambda_j|y_j|^p,\end{aligned} \tag{3.3.50}$$

以上 $t\geqslant 0,x\in\mathbf{R}^d,y=(y_1,y_2,\cdots,y_k)\in\mathbf{R}^{dk},z=x-U(y)$，则方程(3.3.44)的零解 p 阶矩指数稳定. 若进而设 $p\geqslant 2$，

$$|F(t,x,y)|\vee|G(t,x,y)|\leqslant K(|x|+|y|), \tag{3.3.51}$$

K 是正常数，则方程(3.3.44)的零解 a.s. 指数稳定.

证 只要验明：条件(3.3.48)～(3.3.51)依次推出条件(3.3.39)，(3.3.19)，(3.3.40)与(3.3.34a). 以 $\sum\lambda_j$ 取代 λ_1^+ 知(3.3.48)⇒(3.3.39). 由条件(3.3.49)有

$$\begin{aligned}\mathrm{E}|u(x_t)|^p&=\mathrm{E}|U(y(t))|^p\\&\leqslant\sum_j\kappa_j\mathrm{E}|x(t-\delta_j(t))|^p\\&\leqslant\sum_j\kappa_j\|x_t\|_0^p=\kappa^p\|x_t\|_0^p,\end{aligned}$$

此不等式的作用与条件(3.3.19)相当. 令 $V=|x|^p$，则结合式(3.3.46)与(3.3.50)有

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\mathscr{L}V(t,\varphi)&\leqslant-\lambda_0\mathrm{E}|\varphi(0)|^p+\sum_j\lambda_j\mathrm{E}|\varphi(-\delta_j(t))|^p\\&\leqslant-\lambda_0\mathrm{E}|\varphi(0)|^p+\sum_j\lambda_j\|\varphi\|_0^p,\end{aligned}$$

可见以 $\sum\lambda_j$ 取代 λ_1 有(3.3.50)⇒(3.3.40). 由条件(3.3.51)有

$$\begin{aligned}\mathrm{E}|f(t,x_t)|^p&=\mathrm{E}|F(t,x(t),y(t))|^p\\&\leqslant\mathrm{const}\Big[\mathrm{E}|x(t)|^p+\sum_j\mathrm{E}|x(t-\delta_j(t))|^p\Big]\\&\leqslant\mathrm{const}\|x_t\|_0^p.\end{aligned}$$

对 $E|g(t,x_t)|^p$ 有类似估计,因此有(3.3.51)⇒(3.3.34a). 于是定理得证. □

下面是应用定理 3.3.11 的一个例子,它也是定理 3.2.4 的部分推广.

定理 3.3.12　设存在非负常数 λ,κ_j,μ_j 与 $\alpha_0,\alpha_j,\beta_0,\beta_j$, 使得 $\kappa=\left(\sum\kappa_j\right)^{1/2}\in[0,1/2)$ 及以下条件满足:

$$\begin{cases}2\lambda(1-2\kappa)^2+4\beta_0\kappa(1-\kappa)>\alpha(2-2\kappa+\kappa^2)+\beta+2\mu,\\ \alpha=\sum_j\alpha_j,\quad \beta=\beta_0+\sum_j\beta_j,\quad \mu=\sum_j\mu_j;\end{cases}\tag{3.3.52}$$

$$|U(y)|^2\leqslant\sum_j\kappa_j|y_j|^2;\tag{3.3.53}$$

$$(x-U(y))^{\mathrm T}F(t,x,0)\leqslant-\lambda|x|^2+\sum_j\mu_j|y_j|^2,\tag{3.3.54a}$$

$$|F(t,x,0)-F(t,\bar x,y)|\leqslant\alpha_0|x-\bar x|+\sum_j\alpha_j|y_j|,\tag{3.3.54b}$$

$$|G(t,x,y)|^2\leqslant\beta_0|x|^2+\sum_j\beta_j|y_j|^2,\tag{3.3.54c}$$

以上 $t\geqslant0,x,\bar x\in\mathbf R^d,y=(y_1,y_2,\cdots,y_k)\in\mathbf R^{dk}$. 则方程(3.3.44)的零解均方指数稳定且 a. s. 指数稳定.

证　只需对 $p=2$ 逐一验证定理 3.3.11 的条件. 不妨设 $\kappa>0$. $p=2$ 时条件(3.3.49)即(3.3.53). 容易看出条件(3.3.54b)与(3.3.54c)一起推出(3.3.51). 余下只要验证条件(3.3.48)与(3.3.50). 设 $x\in\mathbf R^d,y=(y_1,y_2,\cdots,y_k)\in\mathbf R^{dk},z=x-U(y)$, 则

$$\begin{aligned}
&2z^{\mathrm T}F(t,x,y)+|G(t,x,y)|^2\\
&\leqslant 2z^{\mathrm T}F(t,x,0)+2|z||F(t,x,0)-F(t,x,y)|+|G(t,x,y)|^2\\
&\leqslant -2\lambda|x|^2+2\sum_j\mu_j|y_j|^2+2|z|\sum_j\alpha_j|y_j| \quad (\text{用}(3.3.54\mathrm a),(3.3.54\mathrm b))\\
&\quad+\beta_0|x|^2+\sum_j\beta_j|y_j|^2 \quad (\text{用}(3.3.54\mathrm c))\\
&\leqslant -(2\lambda-\beta_0)|x|^2+\sum_j\left[(2\mu_j+\beta_j)|y_j|^2+\alpha_j(|z|^2+|y_j|^2)\right]\\
&= -(2\lambda-\beta_0)|x|^2+\sum_j(\alpha_j+\beta_j+2\mu_j)|y_j|^2+\alpha|x-U(y)|^2\\
&\leqslant -(2\lambda-\beta_0)|x|^2+\sum_j(\alpha_j+\beta_j+2\mu_j)|y_j|^2\\
&\quad+\alpha\left(\frac{|x|^2}{1-\varepsilon}+\frac{1}{\varepsilon}\sum_j\kappa_j|y_j|^2\right) \quad (\text{用}(3.3.53),(1.3.57))\\
&= -\lambda_0|x|^2+\sum_j\lambda_j|y_j|^2,
\end{aligned}$$

其中

$$\lambda_0 = 2\lambda - \beta_0 - \alpha(1-\varepsilon)^{-1}, \quad \lambda_j = \alpha_j + \beta_j + 2\mu_j + \alpha\kappa_j\varepsilon^{-1}.$$

于是条件(3.3.50)形式上已满足(对 $p=2$).余下只要说明:对适当选取的 $\varepsilon \in (0,1)$,上述的 λ_j 满足不等式(3.3.48)(对 $p=2$).算出

$$\lambda_0(1-2\kappa)^2 - \sum_j \lambda_j$$

$$= (1-2\kappa)^2\left(2\lambda - \beta_0 - \frac{\alpha}{1-\varepsilon}\right) - \alpha - \beta + \beta_0 - 2\mu - \frac{\alpha\kappa^2}{\varepsilon} \triangleq h,$$

$$\frac{\partial h}{\partial \varepsilon} = -\frac{\alpha(1-2\kappa)^2}{(1-\varepsilon)^2} + \frac{\alpha\kappa^2}{\varepsilon^2}.$$

由 $\partial h/\partial\varepsilon = 0$ 解出 $\varepsilon = \kappa/(1-\kappa) \in (0,1)$(注意 $0<\kappa<1/2$).以此 ε 代入 h 得

$$h = 2\lambda(1-2\kappa)^2 + 4\beta_0\kappa(1-\kappa) - \alpha(2-2\kappa+\kappa^2) - \beta - 2\mu > 0, \quad (\text{用}(3.3.52))$$

这就验证了条件(3.3.48).于是定理得证. □

若取 $\kappa = 0$(因而 $U(\cdot)\equiv 0, \mu = 0$),则式(3.3.52)简化为 $\lambda > \alpha + \beta/2$,这正好与(3.2.16a)(取 $p=2$)一致.因此可以说定理 3.3.12 部分地推广了定理 3.2.4.

现在将定理 3.3.11 或定理 3.3.12 用于线性方程

$$\mathrm{d}[x(t) - Ky(t)] = [-Ax(t) + By(t)]\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{m} D_k y(t)\mathrm{d}w_k(t), \tag{3.3.55}$$

其中 $A,B,K,D_k \in \mathbf{R}^{d\times d}(1\leqslant k\leqslant m)$,$y(t) = x(t-\delta(t))$,$\delta(\cdot):\mathbf{R}_+ \to [0,\tau]$ 为非零连续函数.若将方程(3.3.55)写成标准形式(3.3.44),则有

$$U(y) = Ky, \quad F = -Ax + By, \quad G = [D_1y, D_2y, \cdots, D_my].$$

取 $p=2$,则条件(3.3.49)可写成 $|U(y)| \leqslant \kappa|y|$,$\kappa = \|K\|$,设 $0<\kappa<1/2$,

$$\begin{aligned}
\text{式(3.3.50) 左端} &= 2(x-Ky)^{\mathrm{T}}(-Ax+By) + \sum_k |D_ky|^2 \\
&= -2x^{\mathrm{T}}Ax + 2y^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}Ax + 2x^{\mathrm{T}}By - 2y^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}By + \sum_k |D_ky|^2 \\
&\leqslant -\lambda|x|^2 + 2\kappa\|A\|\,|x|\,|y| + 2\|B\|\,|x|\,|y| \\
&\quad + 2\kappa\|B\|\,|y|^2 + S|y|^2 \\
&\leqslant -\lambda|x|^2 + \varepsilon\|A\|^2|x|^2 + \varepsilon^{-1}\kappa^2|y|^2 \\
&\quad + \eta|x|^2 + \eta^{-1}\|B\|^2|y|^2 + (2\kappa\|B\| + S)|y|^2 \\
&\triangleq -\lambda_0|x|^2 + \lambda_1|y|^2,
\end{aligned}$$

其中 $x,y\in\mathbf{R}^d$,$\lambda = \lambda_{\min}(A+A^{\mathrm{T}})$,$S = \sum\|D_i\|^2$,$\varepsilon,\eta > 0$ 待定,

$$\lambda_0 = \lambda - \varepsilon\|A\|^2 - \eta, \quad \lambda_1 = \varepsilon^{-1}\kappa^2 + \eta^{-1}\|B\|^2 + 2\kappa\|B\| + S.$$

令 $\mu = \lambda_0(1-2\kappa)^2 - \lambda_1$,则

$$\frac{\partial\mu}{\partial\varepsilon} = -\ \|A\|^2(1-2\kappa)^2 + \frac{\kappa^2}{\varepsilon^2}, \quad \frac{\partial\mu}{\partial\eta} = -(1-2\kappa)^2 + \frac{\|B\|^2}{\eta^2}.$$

由 $\partial\mu/\partial\varepsilon = 0$ 与 $\partial\mu/\partial\eta = 0$ 分别解出

$$\varepsilon = \kappa/\|A\|(1-2\kappa), \quad \eta = \|B\|/(1-2\kappa).$$

以这样的 ε,η 代入 μ, 条件 $\mu > 0$ (即(3.3.48))可写成

$$\lambda(1-2\kappa)^2 > 2(\kappa\|A\| + \|B\|)(1-2\kappa) + 2\kappa\|B\| + S,$$

即

$$\lambda_{\min}(A+A^{\mathrm{T}}) > \frac{2(\|A\|\ \|K\| + \|B\|)}{1-2\|K\|} + \frac{2\|B\|\ \|K\| + \sum\|D_k\|^2}{(1-2\|K\|)^2}. \tag{3.3.56}$$

于是由定理 3.3.11 推出

推论 3.3.13　若 $\kappa \triangleq \|K\| < 1/2$ 且条件(3.3.56)满足,则方程(3.3.55)的零解均方指数稳定与 a. s. 指数稳定.

如果应用定理 3.3.12,则将得到稍不同的结果. 仍设 $\kappa = \|K\| < 1/2$, 算出

$$\begin{aligned}(x-Ky)^{\mathrm{T}}F(x,0) &= (x-Ky)^{\mathrm{T}}(-Ax) = -x^{\mathrm{T}}Ax + y^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}Ax\\ &\leqslant \frac{1}{2}(-\lambda|x|^2 + \varepsilon\|A\|^2|x|^2 + \varepsilon^{-1}\kappa^2|y|^2);\end{aligned}$$

$$|F(x,0) - F(\bar{x},y)| \leqslant \|A\|\ |x-\bar{x}| + \|B\|\ |y|;$$

$$|G(x,y)|^2 \leqslant S|y|^2, \quad S = \sum_k \|D_k\|^2.$$

于是依定理 3.3.12 中的记号有 $2\mu = \varepsilon^{-1}\kappa^2, \alpha = \|B\|, \beta_0 = 0, \beta = S$, 而(3.3.54a)中的 λ 现在为 $(\lambda-\varepsilon)/2$. 因此条件(3.3.52)可表成

$$(\lambda - \varepsilon\|A\|^2)(1-2\kappa)^2 > \|B\|(2-2\kappa+\kappa^2) + S + \varepsilon^{-1}\kappa^2.$$

以 $\varepsilon = \kappa/\|A\|(1-2\kappa)$ 代入后化简为

$$\lambda(1-2\kappa)^2 > 2(\kappa\|A\| + \|B\|)(1-2\kappa) + \|B\|(2\kappa+\kappa^2) + S,$$

即

$$\begin{aligned}\lambda_{\min}(A+A^{\mathrm{T}}) >\ & \frac{2(\|A\|\ \|K\| + \|B\|)}{1-2\|K\|}\\ &+ \frac{2\|B\|\ \|K\| + \|B\|\ \|K\|^2 + \sum\|D_k\|^2}{(1-2\|K\|)^2}.\end{aligned} \tag{3.3.57}$$

与式(3.3.56)比较,条件(3.3.57)略强. 这表明以定理 3.3.12 取代定理 3.3.11,就判别法的灵敏性而言可能有所损失. 但就运用的简便性而言,则定理 3.3.12 可能略胜一筹. 若 $B = 0$, 则条件(3.3.56)与(3.3.57)简化为同一条件:

$$\lambda_{\min}(A+A^{\mathrm{T}}) > \frac{2\|A\|\ \|K\|(1-2\|K\|) + \sum\|D_k\|^2}{(1-2\|K\|)^2}.$$

例如,对于一维方程

$$d[x(t)-\kappa x(t-\delta(t))]=-ax(t)dt+bx(t-\delta(t))dw(t),$$

其中 $0\leqslant\kappa<1/2, a>0$, 条件(3.3.56)或(3.3.57)相当于

$$2a(1-2\kappa)(1-3\kappa)>b^2.$$

线性方程(3.3.55)可推广为更一般的中立型线性 SFDE:

$$d[x(t)-Kx_t]=[-Ax(t)+Bx_t]dt+\sum_k D_k x_t dw_k(t), \qquad (3.3.58)$$

其中 $A\in\mathbf{R}^{d\times d}, K, B, D_k$ 均为从 C 到 $\mathbf{R}^d$ 的有界线性算子. 与方程(3.3.55)不同,对方程(3.3.58)不能应用定理3.3.11,而必须用定理3.3.9. 设定条件:

$$\begin{cases}E|K\varphi|^2\leqslant\kappa^2\|\varphi\|_0^2, \quad E|B\varphi|^2\leqslant b^2\|\varphi\|_0^2,\\ E|D_k\varphi|^2\leqslant\rho_k^2\|\varphi\|_0^2, \quad \varphi\in L^2_{\mathscr{F}}(\Omega,C),\end{cases} \qquad (3.3.59)$$

其中 κ, b, ρ_k 是非负常数, $\kappa<1/2$. 令

$$f(\varphi)=-A\varphi(0)+B\varphi, \quad g(\varphi)=[D_1\varphi, D_2\varphi, \cdots, D_m\varphi].$$

今考察条件(3.3.43). 任给 $\varphi\in L^2_{\mathscr{F}}(\Omega,C)$, 有

$$\begin{aligned}(3.3.43)\text{ 左端}&=E[2(\varphi(0)-K\varphi)^T f(\varphi)+|g(\varphi)|^2]\\ &=2E[(\varphi(0)-K\varphi)^T(-A\varphi(0)+B\varphi)+\sum_k E|D_k\varphi|^2]\\ &\leqslant-\lambda E|\varphi(0)|^2+2E[|A\varphi(0)||K\varphi|]+2E[|\varphi(0)||B\varphi|]\\ &\quad+2E[|K\varphi||B\varphi|]+\sum_k\rho_k^2\|\varphi\|_0^2 \qquad (\lambda=\lambda_{\min}(A+A^T))\\ &\leqslant-\lambda E|\varphi(0)|^2+\varepsilon\|A\|E|\varphi(0)|^2+\varepsilon^{-1}\kappa^2\|A\|\ \|\varphi\|_0^2\\ &\quad+\eta E|\varphi(0)|^2+\eta^{-1}b^2\|\varphi\|_0^2+2b\kappa\|\varphi\|_0^2+\sum_k\rho_k^2\|\varphi\|_0^2,\end{aligned}$$

其中 $\varepsilon,\eta>0$ 待定. 现在已完全看出,以上估计与条件(3.3.56)的推导几乎一致. 因此,不必写出细节就能确信,不等式(3.3.39)相当于

$$\lambda_{\min}(A+A^T)>\frac{2(\kappa\|A\|+b)}{1-2\kappa}+\frac{2b\kappa+\sum\rho_k^2}{(1-2\kappa)^2}. \qquad (3.3.60)$$

于是由定理3.3.9推出

定理 3.3.14 设线性算子 K, B, D_k 满足条件(3.3.59), $\kappa<1/2$ 且条件(3.3.60)满足,则方程(3.3.58)的零解均方指数稳定与 a.s. 指数稳定.

任给有界线性算子 $B: C\to\mathbf{R}^d$, 由 Riesz 表示定理, B 可表为积分算子:

$$\begin{aligned}B\varphi&=\left[\sum_j\int_{-\tau}^0\varphi_j(\theta)db_{1j}(\theta),\cdots,\sum_j\int_{-\tau}^0\varphi_j(\theta)db_{dj}(\theta)\right]^T\\ &=\int_{-\tau}^0[dB(\theta)]\varphi(\theta),\end{aligned} \qquad (3.3.61)$$

其中 $B(\theta)=[b_{ij}(\theta)]$ 是区间 $[-\tau,0]$ 上的 $\mathbf{R}^{d\times d}$ 值有界变差函数. 若令

$$\beta_{ij} = \overset{0}{\underset{-\tau}{\mathrm{V}}}(b_{ij}), \quad \beta = \|[\beta_{ij}]\|, \tag{3.3.62}$$

则可建立以下结果:

引理 3.3.15　设 $B\varphi$ 与 β 分别依式(3.3.61)与(3.3.62),则

$$|B\varphi| \leqslant \beta\|\varphi\|, \quad \varphi \in C, \tag{3.3.63}$$

$$\mathrm{E}|B\varphi|^2 \leqslant \beta^2\|\varphi\|_0^2, \qquad \varphi \in L^2_{\mathscr{F}}(\Omega, C), \tag{3.3.64}$$

且存在 $[-\tau,0]$ 上的概率测度 μ 与常数 $\kappa \geqslant 0$,使得

$$|B\varphi| \leqslant \kappa\int_{-\tau}^{0}|\varphi(\theta)|\,\mathrm{d}\mu, \quad \varphi \in C. \tag{3.3.65}$$

类似地,令

$$K\varphi = \int_{-\tau}^{0}[\mathrm{d}K(\theta)]\varphi(\theta), \quad D_k\varphi = \int_{-\tau}^{0}[\mathrm{d}D_k(\theta)]\varphi(\theta), \quad 1 \leqslant k \leqslant m,$$

则方程(3.3.58)实际上是一个中立型线性随机积分微分方程:

$$\mathrm{d}\left[x(t) - \int_{-\tau}^{0}(\mathrm{d}K(\theta))x(t+\theta)\right] = \left[-Ax(t) + \int_{-\tau}^{0}(\mathrm{d}B(\theta))x(t+\theta)\right]\mathrm{d}t + \sum_k\int_{-\tau}^{0}(\mathrm{d}D_k(\theta))x(t+\theta)\mathrm{d}w_k(t). \tag{3.3.58$'$}$$

而条件(3.3.60)相应地改写成

$$\lambda_{\min}(A + A^{\mathrm{T}}) > \frac{2(\kappa\|A\| + \beta)}{1 - 2\kappa} + \frac{2\beta\kappa + \sum d_k^2}{(1 - 2\kappa)^2}, \tag{3.3.60$'$}$$

对照式(3.3.62),其中 κ 与 d_k 的意义自明.

第4章 选择论题

前两章的材料无疑是很基本的,发挥的余地还很大.但要从丰富的文献资料中选择若干论题作为补充,却难以令人满意.任何选择方案都可能有偏颇之嫌,而且,对一些非常活跃的研究领域只能挂一漏万.不过,我们的重点是寻求方法上的启示,而不追求内容上的完备.从这个意义上说,本章所选择的材料自有其价值.

本章的内容大体上围绕一个中心课题:SDE 的解的长期动态行为.无论从理论上或应用上说,这无疑都是值得特别关注的问题.

我们在前两章中考察过的方程包括:SDE,SFDE,NSFDE,以及 SDDE、微分积分方程等,这已经是一个颇具规模的谱系了.但原则上,所有这些方程都由如下的 NSFDE 包揽无遗:

$$d[x(t) - u(x_t)] = f(t,x_t)dt + g(t,x_t)dw(t). \tag{4.0.1}$$

因此,本章的内容自然尽可能对形如(4.0.1)的中立型方程展开.在这个意义上,本章可以说是§3.3 的延续,因而自然沿用§3.3 中的所有记号与设定,尤其是继续使用已证明为方便的记号 $\bar{x}(t) = x(t) - u(x_t)$. 不过,在方程(4.0.1)这种一般形式下,我们的讨论有时行之不远,因而必然转向某些更特殊形式的方程,特别是 SDDE:

$$\begin{aligned} & d[x(t) - U(x - \delta(t))] \\ & = F(t,x(t),x(t-\delta(t)))dt + G(t,x(t),x(t-\delta(t)))dw(t). \end{aligned} \tag{4.0.2}$$

本章所遵循的一些统一设定如下.以 $x(t,\xi)$ 记所讨论方程初值问题的解,总假定它在区间 $[-\tau,\infty)$ 上唯一地存在,初始时间取为 $t_0 = 0$, 而初始值 ξ 总限定为**有界**,这意味着 $\xi(\theta,\omega)$ 是 $[-\tau,0] \times \Omega$ 上的 L^∞ 函数.这一限定带来很多方便,且通常能被接受.易见

$$\|\xi\|_0^p \leqslant E\|\xi\|^p \leqslant \|\xi\|_\infty^p, \quad p > 0.$$

总假定 $g(t,\varphi)$ (或 $G(t,x,y)$)**局部有界**,这意味着

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant n,\ \|\varphi\|\leqslant n} |g(t,\varphi)| < \infty, \quad \forall n \geqslant 1.$$

这就能保证某些由 g (或 G)定义的 Itô 不定积分是连续局部鞅,而这一点在本章中是重要的(这为应用定理 1.2.11 所必须).一般来说,局部有界是一个不算苛刻的限制.凡涉及 Razumikhin 定理或其推论时总认定相关的函数连续.此外,在未加说明时,$y(t)$ 总用来表示 $x(t-\delta(t))$.

鉴于将频繁地用到下标 i,j,k, 为明确起见,一次性地约定其变程为 $1 \leqslant i \leqslant n$, $1 \leqslant j \leqslant J, 1 \leqslant k \leqslant m$. 只要未另作规定,本章将保持这一约定而不再处处注明.

§4.1　再论稳定性

前两章中所获得的稳定性结果无疑是基本而重要的，但远不足以满足应用之需要. 至少可朝两个方向推进已有结果：其一是对已熟知的稳定性问题开发出新的判别法，尤其是提出更有效的 Liapunov 函数；其二是提出新的稳定性概念，并建立相应的判别法. 这两个发展方向都有其重要性，且都受到来自实际需要的推动.

本节首先考虑一般的 NSFDE：

$$d[x(t)-u(x_t)]=f(t,x_t)dt+g(t,x_t)dw(t). \tag{4.1.1}$$

同时也特别注意到其特例

$$dx(t)=f(t,x_t)dt+g(t,x_t)dw(t), \tag{4.1.2}$$

$$dx(t)=f(t,x(t))dt+g(t,x(t))dw(t). \tag{4.1.3}$$

方程(4.1.1)~(4.1.3)已分别见于(3.3.1)，(3.1.5)与(4.1.2)，对其中的函数及所用记号均沿用已有的设定. 对于稳定性问题自然要求

$$u(0)=f(t,0)\equiv 0,\quad g(t,0)\equiv 0.$$

迄今当作主要考虑对象的指数稳定性，其实质无非是以指数函数 $e^{-\gamma t}$（γ 是正常数）控制方程的解 $x(t,\xi)$ 的轨道或其均值 $E|x(t,\xi)|^p$. 一个自然的推广是以某个一般的“参照函数” ψ 取代指数函数，从而获得“ψ 稳定”概念. 为便于分析，对函数 $\psi(t)$ 作如下设定：$0<\psi(t)\in C^1[-\tau,\infty)$，$\psi_1(t)\triangleq\psi'(t)/\psi(t)<0$，$\psi(0)=1$，$\psi(\infty)=0$；

$$\begin{cases}\pi=\inf\limits_{t\geq 0}\dfrac{\psi(t-\tau)}{\psi(t)},\quad \rho=\sup\limits_{t\geq 0}\dfrac{\psi(t-\tau)}{\psi(t)}<\infty,\\ \phi_0=\inf\limits_{t\geq 0}|\psi_1(t)|,\quad \phi=\sup\limits_{t\geq 0}|\psi_1(t)|<\infty.\end{cases} \tag{4.1.4}$$

必定 $\phi>0$，$\rho>1$（除非 $\tau=0$）. 注意 $\psi_1(t)$ 正表示函数 $\psi(t)$ 的“增长率”，限定 $\phi<\infty$ 在于使 $\psi(t)$ 不致下降过快. 函数 $\psi(t)$ 的两个常用例子是

(i) $\psi(t)=e^{-t}$，$\psi_1(t)=-1$，$\rho=\pi=e^{\tau}$，$\phi=\phi_0=1$；

(ii) $\psi(t)=(1+\sigma t)^{-1}(0<\sigma<1/\tau)$，$\rho=(1-\sigma\tau)^{-1}$，$\pi=1$，$\phi=\sigma$，$\phi_0=0$.

函数 $\psi(t)$ 的其他例子尚多，例如 $\psi(t)=e^{-t}(1+\sigma t)(0<\sigma<1/(1+\tau))$ 便是. 还可注意的是，若 $\gamma>0$，则 ψ^γ 如同 ψ 一样亦满足 $\psi^\gamma(0)=1$，$\psi^\gamma(\infty)=0$，且 ρ 与 ϕ 分别代之以 ρ^γ 与 $\gamma\phi$. 可见，ψ 与 ψ^γ 之间的转换是很简单的，因而“ψ 稳定”与“ψ^γ 稳定”（准确定义见下文）是同类的问题，只是 γ 表达了某种程度的差别.

4.1.1　矩稳定性

首先仿照定义 2.3.1(iv) 作以下定义.

定义 4.1.1 设 $p,\gamma>0$. 若方程(4.1.1)的解 $x(t,\xi)$ 恒满足(对照(2.3.8))

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\ln \mathrm{E}|x(t,\xi)|^p}{|\ln\psi(t)|}\leqslant-\gamma, \tag{4.1.5}$$

则说方程(4.1.1)的零解 p **阶矩 ψ^γ 稳定**;二阶矩 ψ^γ 稳定也称为**均方 ψ^γ 稳定**. 当 $\psi(t)=\mathrm{e}^{-t}$ 与 $\psi(t)=(1+\sigma t)^{-1}(0<\sigma<1/\tau)$ 时,p 阶矩 ψ^γ 稳定分别称为 p 阶矩指数稳定与 p **阶矩多项式稳定**.

条件(4.1.5)显然等价于

$$\sup_{t\geqslant0}\psi^{-\mu}(t)\mathrm{E}|x(t,\xi)|^p<\infty,\quad \forall\mu\in(0,\gamma).$$

而这通常又代以稍强的条件

$$\mathrm{E}|x(t,\xi)|^p\leqslant\beta\psi^\gamma(t),\quad t\geqslant0, \tag{4.1.6}$$

其中 $\beta>0$ 与 t 无关(但一般与 γ,ξ 有关).

形式上多少类似于定义 4.1.1 的稳定性定义散见于文献中,只是所用术语各异,一些作者称为"矩指数稳定",式(4.1.5)中的 γ 自然当作某种矩 Liapunov 指数.

下面建立的矩稳定判别法,多半是在一定条件下得到一个形如(4.1.6)的矩估计,其中 γ 是某个由条件决定的正数,它取得愈大,结论就愈好. 若令 $x(t)=x(t,\xi)$,则为得到估计式(4.1.6),只要估计函数 $\psi^{-\gamma}(t)\mathrm{E}|x(t)|^p$ 的上界. 因此约定记号

$$\begin{cases}h(t)=\psi^{-\gamma}(t)\mathrm{E}|x(t)|^p, & H(t)=\sup\limits_{-\tau\leqslant s\leqslant t}h(s),\\ \tilde h(t)=\psi^{-\gamma}(t)\mathrm{E}|\tilde x(t)|^p, & \widetilde H(t)=\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant t}\tilde h(s),\end{cases} \tag{4.1.7}$$

其中 $\tilde x(t)=x(t)-u(x_t)(t\geqslant0)$. 注意 $h(t)$ 对于 $t\geqslant-\tau$ 有定义且 $h(\theta)\leqslant\|\xi\|_0^p(-\tau\leqslant\theta\leqslant0)$,而 $\tilde h(t)$ 则只对于 $t\geqslant0$ 有定义. 依式(4.1.7)定义的记号十分简便,本章中将反复使用,其中所含的 $x(t)=x(t,\xi)$ 及参数 γ,p 由上下文确定.

首先,推广定理 2.3.3(i)建立如下简单结果.

定理 4.1.2 设 $p\geqslant1$;存在常数 $c_1,c_2,\mu>0,\kappa\in[0,1)$ 与 $V(t,x)\in C^{1,2}(\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^d)$,可测函数 $\zeta(t)$,使得 $\zeta(t)\psi^{-\mu}(t)\in L^1(\mathbf{R}_+)$ ①,且以下条件满足:

$$\mathrm{E}|u(\varphi)|^p\leqslant\kappa^p\|\varphi\|_0^p,\quad \varphi\in L^p_{\mathscr F}(\Omega,C), \tag{4.1.8}$$

$$c_1|x|^p\leqslant V(t,x)\leqslant c_2|x|^p,\quad t\geqslant0,x\in\mathbf{R}^d, \tag{4.1.9}$$

$$\mathscr{L}V(t,\varphi)\leqslant\zeta(t)+\mu\psi_1(t)V(t,\tilde\varphi(0)),\quad t\geqslant0,\varphi\in C, \tag{4.1.10}$$

其中 $\mathscr{L}V(t,\varphi)$ 与 $\tilde\varphi(0)$ 依(3.3.17);$\gamma=\mu\wedge(\ln\kappa^{-p}/\ln\rho)$,则方程(4.1.1)的零

① 因 $\psi^{-\mu}(t)$ 无界增长,此条件要求 $\zeta(t)$"足够小",似乎作用不大. 但有例子表明,引入函数 $\zeta(t)$ 可实质性地减弱条件(4.1.10). 在涉及函数 $\zeta(t)$ 的论证中不妨总认定 $\zeta(t)\geqslant0$(否则代之以 $|\zeta(t)|$),这一点今后将不特别说明.

解 p 阶矩 ψ^{γ} 稳定,且成立

$$\begin{cases} c_1\mathrm{E}|x(t,\xi)|^p \leqslant \left[\beta c_1 \|\xi\|_0^p + (1-\kappa_1)^{-p}\|\zeta\psi^{-\gamma}\|_1\right]\psi^{\gamma}(t), \quad t \geqslant 0, \\ \beta = \dfrac{c_2}{c_1}\left(\dfrac{1+\kappa}{1-\kappa_1}\right)^p, \quad \kappa_1 = \kappa\rho^{\gamma/p}, \end{cases} \tag{4.1.11}$$

其中 ρ 依式(4.1.4).当 $\rho = 1$ 时约定 $\gamma = \mu$(今后在类似情况下皆如此).

证　不妨设 $p > 1, \kappa \in (0,1)$($p = 1$ 或 $\kappa = 0$ 的情况易直接处理,今后在类似情况下均不予考虑,不再特别说明).显然,只要对

$$0 < \gamma < \mu \wedge (\ln \kappa^{-p}/\ln \rho) \tag{4.1.12}$$

证式(4.1.11).取定方程(4.1.1)的一个解 $x(t) = x(t,\xi)$,依(4.1.7)中的记号有

$$\begin{aligned} h(t) &\leqslant \psi^{-\gamma}(t)\left[(1-\kappa_1)^{1-p}\mathrm{E}|\tilde{x}(t)|^p + \kappa_1^{1-p}\kappa^p\|x_t\|_0^p\right] \\ &\leqslant (1-\kappa_1)^{1-p}\tilde{h}(t) + \kappa_1 H(t), \quad t \geqslant 0, \end{aligned}$$

注意由式(4.1.12)有 $\kappa_1 \in (0,1)$.由以上不等式推出

$$\begin{aligned} H(t) &\leqslant \|\xi\|_0^p \vee \left[(1-\kappa_1)^{1-p}\widetilde{H}(t) + \kappa_1 H(t)\right] \\ &\leqslant \left[\|\xi\|_0^p \vee (1-\kappa_1)^{1-p}\widetilde{H}(t)\right] + \kappa_1 H(t), \end{aligned}$$

解此不等式得(对照(3.3.13))

$$H(t) \leqslant \frac{\|\xi\|_0^p}{1-\kappa_1} \vee \frac{\widetilde{H}(t)}{(1-\kappa_1)^p}, \quad t \geqslant 0. \tag{4.1.13}$$

式(4.1.13)表明问题归于估计 $\tilde{h}(t)$.为估计 $\tilde{h}(t)$,应用条件(4.1.9)与(4.1.10):

$$\begin{aligned} c_1\psi^{-\gamma}(t)|\tilde{x}(t)|^p &\leqslant \psi^{-\gamma}(t)V(t,\tilde{x}(t)) \\ &= V(0,\tilde{x}(0)) + \int_0^t L[\psi^{-\gamma}(s)V(x,\tilde{x}(s))]\mathrm{d}s + M(t), \end{aligned}$$

其中 $M(t)$ 是一个连续局部鞅,$M(0) = 0$,其表达式无需详细写出.由条件(4.1.10)有

$$\int_0^t L[\psi^{-\gamma}(s)V(s,\tilde{x}(s))]\mathrm{d}s \leqslant \int_0^t \zeta(s)\psi^{-\gamma}(s)\mathrm{d}s \leqslant \|\zeta\psi^{-\gamma}\|_1.$$

于是由定理1.2.11(iii)有

$$\begin{aligned} c_1\tilde{h}(t) &\leqslant \mathrm{E}V(0,\tilde{x}(0)) + \|\zeta\psi^{-\gamma}\|_1 \\ &\leqslant c_2(1+\kappa)^p\|\xi\|_0^p + \|\zeta\psi^{-\gamma}\|_1, \quad t \geqslant 0, \end{aligned}$$

最后一步参考定理3.3.7之证.将对 $\tilde{h}(t)$(从而 $\widetilde{H}(t)$)的以上估计代入式(4.1.13),并注意 $1-\kappa_1 \geqslant (1-\kappa_1)^p$,即得(4.1.11)中的不等式.　□

注意式(4.1.13)的证明仅用到条件(4.1.8)与(4.1.12),并不涉及函数 V 及与之关联的条件(4.1.9),(4.1.10),这一点是今后应用不等式(4.1.13)时须注意的.

若将定理4.1.2用于方程(4.1.2),则应取 $\kappa = 0$,此时条件(4.1.8)不必考虑,$p \geqslant 1$ 可改为 $p > 0$,而式(4.1.11)则简化为(取 $\zeta(t) \equiv 0$)

$$\mathrm{E}|x(t,\xi)|^p \leqslant (c_2/c_1)\|\xi\|_0^p\psi^{\mu}(t), \quad t \geqslant 0,$$

这颇接近于(2.3.23a)中的矩估计. 若将定理4.1.2用于方程(4.1.3), 则除了不必用条件(4.1.8)之外, 还可将条件(4.1.10)改写为(取$\zeta(t)\equiv 0$)

$$\mathscr{L}V(t,x) \leqslant \mu\psi_1(t)V(t,x), \quad t \geqslant 0, x \in \mathbf{R}^d,$$

或$\alpha \leqslant \mu\psi_1(t)$, α依(2.3.31). 然后分别取$\psi(t) = e^{-t}$与$\psi(t) = (1+t)^{-1}$得到

推论4.1.3 设$p>0$; 存在$V(t,x) \in C^{1,2}(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d)$与正常数$c_1, c_2, \gamma$, 使得条件(4.1.9)及以下条件满足

$$\alpha \leqslant -\gamma \quad \text{或}\ \alpha \leqslant -\gamma/(1+t), \quad (\alpha\ \text{依}(2.3.31))$$

则方程(4.1.3)的零解p阶矩指数稳定或p阶矩多项式稳定, 且对$t \geqslant 0, x_0 \in \mathbf{R}^d$有

$$\mathrm{E}|x(t,x_0)|^p \leqslant (c_2/c_1)|x_0|^p e^{-\gamma t}$$

或

$$\mathrm{E}|x(t,x_0)|^p \leqslant (c_2/c_1)|x_0|^p(1+t)^{-\gamma}.$$

以上推论显然已蕴涵定理2.3.2(i)的结论.

至此, 不妨插入一个有趣的事实. 设$V(t,x)$依定理4.1.2,

$$U(t,x) = \psi^{-\mu}(t)V(t,x).$$

不难验证

$$\mathscr{L}U(t,\varphi) = \psi^{-\mu}(t)[\mathscr{L}V(t,\varphi) - \mu\psi_1(t)V(t,\varphi(0))];$$

而条件(4.1.9)与(4.1.10)则分别等价于

$$c_1\psi^{-\mu}(t)|x|^p \leqslant U(t,x) \leqslant c_2\psi^{-\mu}(t)|x|^p, \quad t \geqslant 0, x \in \mathbf{R}^d, \qquad (4.1.9)'$$

$$\mathscr{L}U(t,\varphi) \leqslant \zeta_1(t), \quad t \geqslant 0, \varphi \in C, \qquad (4.1.10)'$$

其中$\zeta_1(t) = \zeta(t)\psi^{-\mu}(t) \in L^1(\mathbf{R}_+)$. 这就可将定理4.1.2改写为

定理4.1.2′ 设$p \geqslant 1$; 存在常数$c_1, c_2, \mu > 0, \kappa \in [0,1)$与$U(t,x) \in C^{1,2}(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d)$, $\zeta_1(t) \in L^1(\mathbf{R}_+)$, 使得条件(4.1.8)与(4.1.9)′, (4.1.10)′满足, 则定理4.1.2之结论成立, 只是在式(4.1.11)中以$\|\zeta_1\|_1$取代$\|\zeta\psi^{-\gamma}\|_1$.

与定理4.1.2的不同之处是, 因将函数$\psi^{-\mu}(t)$吸收进了Liapunov函数$U(t,x)$, 条件(4.1.10)′变得很简洁了, 而为此付出的代价是用稍繁的条件(4.1.9)′取代了(4.1.9). 本节及以下几节中涉及函数ψ的定理均可作类似改造. 但这种改变并不导致实质上新的结论, 今后将不予考虑.

关于矩稳定性, 迄今所得的最重要的结果大概要算Razumikhin定理3.3.7. 令人欣慰的是, 它有如下堪称完美的推广.

定理4.1.4 设$p \geqslant 1$; 存在常数$c_1, c_2, \mu > 0, \kappa \in [0,1), q > (c_2/c_1)(1-\kappa)^{-p}$与$V(t,x) \in C^{1,2}([-\tau,\infty) \times \mathbf{R}^d)$, $\zeta(t) \in C(\mathbf{R}_+)$, 使得$\zeta(t)\psi^{-\mu}(t) \in L^1(\mathbf{R}_+)$, 且条件(4.1.8), (4.1.9)及以下条件满足:

$$\begin{cases} \varphi \in L^p_{\mathscr{F}_t}(\Omega, C), \mathrm{E}V(t+\theta,\varphi(\theta)) \leqslant q\mathrm{E}V(t,\tilde{\varphi}(0)), \quad \forall \theta \in [-\tau, 0] \\ \Rightarrow \mathrm{E}\mathscr{L}V(t,\varphi) \leqslant \zeta(t) + \mu\psi_1(t)\mathrm{E}V(t,\tilde{\varphi}(0)), \quad t \geqslant 0. \end{cases} \tag{4.1.14}$$

则方程(4.1.1)的零解 p 阶矩 ψ^γ 稳定,且(4.1.1)的解 $x(t,\xi)$ 满足

$$\begin{cases} c_1\mathrm{E}|x(t,\xi)|^p \leqslant [\beta c_1 \|\xi\|_0^p + (1-\kappa_1)^{-p}\|\zeta\psi^{-\gamma}\|_1]\psi^\gamma(t), \quad t \geqslant 0, \\ \beta = \dfrac{c_2}{c_1}\left(\dfrac{1+\kappa}{1-\kappa_1}\right)^p, \quad \kappa_1 = \kappa\rho^{\gamma/p}, \\ \gamma = \mu \wedge \{(\ln\rho)^{-1}\ln[q_1(1+\kappa q_1^{1/p})^{-p}]\}, \quad q_1 = c_1 q/c_2. \end{cases} \tag{4.1.15}$$

注 与定理4.1.2比较,关键的条件(4.1.14)弱于条件(4.1.10);除了 γ 的表达式之外,式(4.1.15)与(4.1.11)并无区别.因 $q_1(1+\kappa q_1^{1/p})^{-p} < \kappa^{-p}$,式(4.1.15)中的 γ 较小,因而结论(4.1.15)稍弱于(4.1.11),这可看作因减弱条件(4.1.10)而付出的代价.

证 类似于定理4.1.2之证,可设 $p>1, \kappa \in (0,1)$,

$$0 < \gamma < \mu \wedge \left\{(\ln\rho)^{-1}\ln\left[q_1(1+\kappa q_1^{1/p})^{-p}\right]\right\}. \tag{4.1.16}$$

由条件(4.1.16)推出 $\kappa_1 = \kappa\rho^{\gamma/p} \in (0,1)$.

取定方程(4.1.1)的一个解 $x(t) = x(t,\xi)$,依式(4.1.7)中的记号,只要证

$$h(t) \leqslant \beta\|\xi\|_0^p + \frac{1}{c_1(1-\kappa_1)^p}\int_0^t \zeta(s)\psi^{-\gamma}(s)\mathrm{d}s, \quad t \geqslant 0.$$

因仍可用不等式(4.1.13)(注意(4.1.16)⇒(4.1.12)),故只需证

$$c_1\tilde{h}(t) \leqslant \beta c_1\|\xi\|_0^p(1-\kappa_1)^p + \int_0^t \zeta(s)\psi^{-\gamma}(s)\mathrm{d}s, \quad t \geqslant 0.$$

而这又归于证(用条件(4.1.9))

$$\begin{aligned} W(t) &\triangleq \psi^{-\gamma}(t)\mathrm{E}V(t,\tilde{x}(t)) - \int_0^t \zeta(s)\psi^{-\gamma}(s)\mathrm{d}s \\ &\leqslant \beta c_1\|\xi\|_0^p(1-\kappa_1)^p \triangleq \beta_1, \quad t \geqslant 0. \end{aligned}$$

易见 $W(0) \leqslant \beta_1$(参看定理4.1.2之证).若存在最小的 $r \in \mathbf{R}_+$,使得在 $[0,r]$ 上 $W(t) \leqslant \beta_1$,则必 $W(r) = \beta_1$.若 $0 \leqslant t \in [r-\tau, r]$,则

$$\begin{aligned} \mathrm{E}V(t,x(t)) &\leqslant c_2\psi^\gamma(t)h(t) \leqslant c_2\psi^\gamma(t)\left[\beta\|\xi\|_0^p + \frac{1}{c_1(1-\kappa_1)^p}\int_0^t \zeta(s)\psi^{-\gamma}(s)\mathrm{d}s\right] \\ &\leqslant \frac{c_2\psi^\gamma(t)}{c_1(1-\kappa_1)^p}\left[\beta_1 + \int_0^r \zeta(s)\psi^{-\gamma}(s)\mathrm{d}s\right] \\ &= \frac{c_2\psi^\gamma(t)}{c_1(1-\kappa_1)^p}\psi^{-\gamma}(r)\mathrm{E}V(r,\tilde{x}(r)) \leqslant q\mathrm{E}V(r,\tilde{x}(r)), \end{aligned}$$

其中用到 $(c_2/c_1)\rho^\gamma(1-\kappa_1)^{-p} \leqslant q$,这易从式(4.1.16)推出.若 $r-\tau \leqslant t < 0$,则

$$\mathrm{E}V(t,x(t)) \leqslant c_2\|\xi\|_0^p \leqslant \beta_1 = W(r) \leqslant \psi^{-\gamma}(r)\mathrm{E}V(r,\tilde{x}(r))$$

$$\leqslant \rho^{\gamma}\mathrm{E}V(r,\tilde{x}(r)) \leqslant q\mathrm{E}V(r,\tilde{x}(r)),$$

其中用到 $\psi^{-\gamma}(r) \leqslant \psi^{-\gamma}(\tau) \leqslant \rho^{\gamma} \leqslant q$. 于是可对 $\varphi = x_r$ 应用(4.1.14):

$$\begin{aligned}\mathrm{E}LV(r,\tilde{x}(r)) &\leqslant \zeta(r) + \mu\psi_1(r)\mathrm{E}V(r,\tilde{x}(r)) \\ &< \zeta(r) + \gamma\psi_1(r)\mathrm{E}V(r,\tilde{x}(r)),\end{aligned}$$

其中用到 $\gamma < \mu$ 与 $\psi_1(r)\mathrm{E}V(r,\tilde{x}(r)) < 0$(参考定理3.3.7之证). 于是当 $\delta > 0$ 充分小时有

$$W(r)\Big|_r^{r+\delta} = \int_r^{r+\delta}\psi^{-\gamma}(t)\left[\mathrm{E}LV(t,\tilde{x}(t)) - \gamma\psi_1(t)\mathrm{E}V(t,\tilde{x}(t)) - \zeta(t)\right]\mathrm{d}t \leqslant 0.$$

这就如同定理3.3.7之证一样得出矛盾. 因此式(4.1.15)必成立. □

取 $\psi(t) = \mathrm{e}^{-t}$,$\zeta(t) \equiv 0$ 从定理4.1.4恰好得出定理3.3.7,可见定理4.1.4是定理3.3.7的一个完全推广. 其次,若取 $V = |x|^p$,$\psi(t) = (1+\sigma t)^{-1}(0 < \sigma < 1/\tau)$,则从定理4.1.4得出

推论4.1.5 设 $p \geqslant 1$;存在常数 $\mu > 0$,$\kappa \in [0,1)$,$q > (1-\kappa)^{-p}$,$\sigma \in (0,1/\tau)$ 与 $\zeta(t) \in C(\mathbf{R}_+)$,使得 $t^{\mu}\zeta(t) \in L^1(\mathbf{R}_+)$,且条件(4.1.8)及以下条件满足:

$$\begin{cases}\varphi \in L^p_{\mathscr{F}_t}(\Omega,C), \quad \|\varphi\|_0^p \leqslant q\mathrm{E}|\tilde{\varphi}(0)|^p \\ \Rightarrow \mathrm{E}\mathscr{L}V(t,\varphi) \leqslant \zeta(t) - \mu\sigma(1+\sigma t)^{-1}\mathrm{E}|\tilde{\varphi}(0)|^p, \quad t \geqslant 0,\end{cases}$$

其中 $V = |x|^p$,则方程(4.1.1)的零解 p 阶矩多项式稳定,且成立

$$\begin{cases}\overline{\lim_{t\to\infty}}\dfrac{\ln \mathrm{E}|x(t,\xi)|^p}{\ln t} \leqslant -\gamma, \\ \gamma = \mu \wedge \left\{\ln[q^{-1}(1+\kappa q^{-1/p})^p]/\ln(1-\sigma\tau)\right\}.\end{cases}$$

一旦推广了定理3.3.7,就可将定理3.3.7的一系列推论转移到 ψ 稳定的情况. 首先给出定理3.3.9的如下推广.

定理4.1.6 设 $p \geqslant 1$,$V = |x|^p$;存在常数 $\alpha > 0$,$\lambda_0,\lambda_1 \in \mathbf{R}$,$\kappa \in [0,1/2)$ 与 $\zeta(t) \in C(\mathbf{R}_+)$,使得 $\zeta(t)\psi^{-\alpha}(t) \in L^1(\mathbf{R}_+)$,且条件(4.1.8)及以下条件满足:

$$0 \leqslant \lambda_1 < \lambda_0(1-2\kappa)^p; \tag{4.1.17}$$

$$\mathrm{E}\mathscr{L}V(t,\varphi) \leqslant \zeta(t) + \psi_1(t)\left[\lambda_0\mathrm{E}|\varphi(0)|^p - \lambda_1\|\varphi\|_0^p\right], \tag{4.1.18}$$

其中 $\varphi \in L^p_{\mathscr{F}_t}(\Omega,C)$,$t \geqslant 0$. 则方程(4.1.1)的零解 p 阶矩 ψ^{γ} 稳定,且其解 $x(t,\xi)$ 满足

$$\mathrm{E}|x(t,\xi)|^p \leqslant \frac{(1+\kappa)^p\|\xi\|_0^p + \|\zeta\psi^{-\gamma}\|_1}{(1-\kappa\rho^{\gamma/p})^p}\psi^{\gamma}(t), \quad t \geqslant 0, \tag{4.1.19}$$

其中 $\gamma = \alpha \wedge \mu$[①],$\mu = \lambda_0(1-\kappa q^{1/p})^p - q\lambda_1$,$q > (1-\kappa)^{-p}$ 由下式唯一决定:

---

① 若取 $\zeta(t) \equiv 0$,则 $\alpha > 0$ 可随意选取,因而可设 $\gamma = \mu$. 今后遇到类似情况时(如在推论4.1.7中),可作同样考虑.

$$\lambda_0(1-\kappa q^{1/p})^p - q\lambda_1 = \ln[q(1+\kappa q^{1/p})^{-p}]/\ln\rho. \tag{4.1.20}$$

证　分别以 $\mu(q)$ 与 $h(q)$ 记式(4.1.20)之左端与右端，令 $q_0=(1-\kappa)^{-p}$，$q_1=\lambda_0(\kappa\lambda_0^{1/p}+\lambda_1^{1/p})^{-p}$. 由条件(4.1.17)推出 $q_0<q_1$；$\mu(q)$ 与 $h(q)$ 在区间$[q_0,q_1]$上分别为严格单调减与严格单调增，$\mu(q_1)=0=h(q_0)$. 于是存在唯一的 $q\in(q_0,q_1)$，使得 $\mu(q)=h(q)$. 固定此 q 并令 $\mu=\mu(q)$，则 $\gamma=\alpha\wedge\mu\wedge h(q)$.

若 $\varphi\in L^p_{\mathscr{F}_t}(\Omega,C)$ 满足 $\|\varphi\|_0^p\leqslant qh, h=\mathrm{E}|\tilde{\varphi}(0)|^p$，则利用定理3.3.9之证已得的不等式 $\mathrm{E}|\varphi(0)|^p\geqslant h(1-\kappa q^{1/p})^p$（注意由 $q<q_1<\kappa^{-p}$ 推出 $\kappa q^{1/p}<1$）有

$$\lambda_0\mathrm{E}|\varphi(0)|^p-\lambda_1\|\varphi\|_0^p\geqslant h[\lambda_0(1-\kappa q^{1/p})^p-q\lambda_1]=\mu h.$$

这结合条件(4.1.18)推出条件(4.1.14)满足，于是可用定理4.1.4得出要证结论. □

若将定理4.1.6用于方程(4.1.2)与(4.1.3)，则其结论可表述得更简单.

(i) 取 $\kappa=0$，则式(4.1.17)相当于 $0\leqslant\lambda_1<\lambda_0$，式(4.1.19)与(4.1.20)则分别简化为

$$\mathrm{E}|x(t,\xi)|^p\leqslant[\|\xi\|_0^p+\|\zeta\psi^{-\gamma}\|_1]\psi^\gamma(t), \gamma=\alpha\wedge(\lambda_0-q\lambda_1); \tag{4.1.19$'$}$$

$$\lambda_0-q\lambda_1=\ln q/\ln\rho. \tag{4.1.20$'$}$$

(ii) 若 $\kappa=\tau=0$，则 $\rho=1, q=1, \gamma=\alpha\wedge(\lambda_0-\lambda_1)$，式(4.1.19)$'$成为

$$\mathrm{E}|x(t,x_0)|^p\leqslant[|x_0|^p+\|\zeta\psi^{-\gamma}\|_1]\psi^\gamma(t),\quad t\geqslant 0, x_0\in\mathbf{R}^d.$$

条件(4.1.18)可代之以 $\mathscr{L}V(t,x)\leqslant\zeta(t)+\mu\psi_1(t)|x|^p, \mu=\lambda_0-\lambda_1>0.$

取 $p=2$，从定理4.1.6及其后的说明得到

推论4.1.7　设存在常数 $\kappa\in[0,1/2), \alpha>0, \lambda_0,\lambda_1\in\mathbf{R}$ 与 $\zeta(t)\in C(\mathbf{R}_+)$，使得 $\zeta(t)\varphi^{-\alpha}(t)\in L^1(\mathbf{R}_+)$，$0\leqslant\lambda_1<\lambda_0(1-2\kappa)^2$，且条件(4.1.8)及以下条件满足：

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}[2\tilde{\varphi}^{\mathrm{T}}(0)f(t,\varphi)+|g(t,\varphi)|^2]\\&\leqslant\zeta(t)+\psi_1(t)[\lambda_0\mathrm{E}|\varphi(0)|^2-\lambda_1\|\varphi\|_0^2],\end{aligned} \tag{4.1.21}$$

其中 $\varphi\in L^2_{\mathscr{F}_t}(\Omega,C), t\geqslant 0$. 则方程(4.1.1)的零解均方 ψ^γ 稳定，且成立

$$\mathrm{E}|x(t,\xi)|^2\leqslant\frac{(1+\kappa)^2\|\xi\|_0^2+\|\zeta\psi^{-\gamma}\|_1}{(1-\kappa\rho^{\gamma/2})^2}\psi^\gamma(t),\quad t\geqslant 0, \tag{4.1.22}$$

其中 $\gamma=\alpha\wedge\mu, \mu=\lambda_0(1-\kappa\sqrt{q})^2-q\lambda_1, q>(1-\kappa)^{-2}$ 由下式唯一决定：

$$\lambda_0(1-\kappa\sqrt{q})^2-q\lambda_1=\ln[q(1+\kappa\sqrt{q})^{-2}]/\ln\rho.$$

若将推论4.1.7用于方程(4.1.2)，则 $\gamma=\alpha\wedge(\lambda_0-q\lambda_1), q>1$ 决定于等式 $\lambda_0-q\lambda_1=\ln q/\ln\rho$，式(4.1.22)简化为

$$\mathrm{E}|x(t,\xi)|^2\leqslant[\|\xi\|_0^2+\|\zeta\psi^{-\gamma}\|_1]\psi^\gamma(t),\quad t\geqslant 0. \tag{4.1.22$'$}$$

若将推论4.1.7用于方程(4.1.3)，则条件(4.1.21)可代之以条件

$$2x^{\mathrm{T}}f(t,x)+|g(t,x)|^2\leqslant\zeta(t)+\mu\psi_1(t)|x|^2,\quad t\geqslant 0,\ x\in\mathbf{R}^d,\qquad(4.1.21)'$$

其中 μ 是某个正常数;令 $\gamma=\alpha\wedge\mu$,则方程(4.1.3)的解满足

$$\mathrm{E}|x(t,x_0)|^2\leqslant(|x_0|^2+\|\zeta\psi^{-\gamma}\|_1)\psi^{\gamma}(t),\quad t\geqslant 0,\ x_0\in\mathbf{R}^d.\qquad(4.1.22)''$$

Razumikhin 定理固然不失为精巧,但如我们已多次看到的,其条件不易验证,这成为有效应用它的障碍. Razumikhin 定理的每次成功应用都有赖于确定定理条件中那个颇为神秘的 q,而这并非总是方便的. 这就促使我们再回到定理 4.1.2 的方法,即借助于用 $\mathscr{L}V(t,\varphi)$ 表达的某个条件直接估计 $h(t)$ 或 $\tilde{h}(t)$(依(4.1.7)). 不过,现在我们要作两点关键的改进:其一是改变条件(4.1.10)的右端,使之依赖于 φ 在整个区间 $[-\tau,0]$ 的上的值,而不是仅仅用到 $\varphi(0)$;其二是采用一个可能更有效的 Liapunov 函数

$$W(t,x)=V(t,x)+\sum_j\int_{t-\tau_j}^{t}[x^{\mathrm{T}}(\theta)Q_jx(\theta)]^{p/2}\mathrm{d}\theta,\qquad(4.1.23)$$

其中 $x(t)$ 是方程(4.1.1)的某个给定的解(注意不应与作为独立变元的 $x\in\mathbf{R}^d$ 混淆!),Q_j 为适当选定的半正定矩阵,$\tau_j\in(0,\tau]$. 关于函数 $W(t,x)$ 最值得注意的事实是

$$\begin{aligned}\mathscr{L}W(t,\varphi)&=\mathscr{L}V(t,\varphi)+\sum_j\{[x^{\mathrm{T}}(t)Q_jx(t)]^{p/2}-[x^{\mathrm{T}}(t-\tau_j)Q_jx(t-\tau_j)]^{p/2}\}\\&=\mathscr{L}V(t,\varphi)+\sum_j\{[\varphi^{\mathrm{T}}(0)Q_j\varphi(0)]^{p/2}-[\varphi^{\mathrm{T}}(-\tau_j)Q_j\varphi(-\tau_j)]^{p/2}\}\quad(\text{令 }\varphi=x_t)\\&\leqslant\mathscr{L}V(t,\varphi)+\sum_j[\|Q_j\|^{p/2}|\varphi(0)|^p-q_j^{p/2}|\varphi(-\tau_j)|^p],\end{aligned}$$

其中 $q_j=\lambda_{\min}(Q_j)$. 可见,式(4.1.23)右端第二项的加入有助于降低含 $|\varphi(-\tau_j)|^p$ 的项,这对于用关于 $\mathscr{L}W(t,\varphi)$ 的某个不等式表出稳定性条件常常是重要的. 凡需降低含 $|\varphi(0)|^p$ 的项的场合,用式(4.1.23)表出的 Liapunov 函数未必有利.

记住已作总约定:$1\leqslant j\leqslant J$. 此外,仿照式(4.1.4)约定

$$\pi_j=\inf_{t\geqslant 0}\frac{\psi(t-\tau_j)}{\psi(t)},\quad\rho_j=\sup_{t\geqslant 0}\frac{\psi(t-\tau_j)}{\psi(t)}.\qquad(4.1.24)$$

显然 $1\leqslant\pi_j\leqslant\pi,\pi_j\leqslant\rho_j\leqslant\rho(\pi,\rho$ 依式(4.1.4)).

定理 4.1.8 设 $p\geqslant 1$;存在常数 $\kappa\in[0,1),c_1,c_2,\gamma>0,a\in\mathbf{R},a_j,b\geqslant 0,\tau_j\in(0,\tau]$,$[-\tau,0]$ 上的概率测度 μ,ν,函数 $V(t,x)\in C^{1,2}(\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^d)$ 与 $\zeta(t)$,半正定矩阵 Q_j,使得 $\zeta(t)\psi^{-\gamma}(t)\in L^1(\mathbf{R}_+)$,且条件(4.1.9)及以下条件满足:

$$|u(\varphi)|\leqslant\kappa\int_{-\tau}^{0}|\varphi(\theta)|\,\mathrm{d}\mu,\quad\varphi\in C,\qquad(4.1.25)$$

$$\mathscr{L}V(t,\varphi)\leqslant\zeta(t)-a|\varphi(0)|^p+\sum_j a_j|\varphi(-\tau_j)|^p+b\int_{-\tau}^{0}|\varphi(\theta)|^p\mathrm{d}\nu\qquad(4.1.26\mathrm{a})$$

或

$$\mathscr{L}V(t,\varphi)+\sum_j\{[\varphi^{\mathrm{T}}(0)Q_j\varphi(0)]^{p/2}-[\varphi^{\mathrm{T}}(-\tau_j)Q_j\varphi(-\tau_j)]^{p/2}\}$$

$$\leqslant\zeta(t)+a|\varphi(0)|^p-\sum_j a_j|\varphi(-\tau_j)|^p+b\int_{-\tau}^0|\varphi(\theta)|^p\mathrm{d}\nu,\quad(4.1.26\mathrm{b})$$

其中 $t\geqslant 0,\varphi\in C$. 则在以下两种情况下方程(4.1.1)的零解 p 阶矩 ψ^γ 稳定:

(i) 条件(4.1.26a)满足, $b+\sum a_j<a,\gamma=\varepsilon\wedge(\ln\kappa^{-p}/\ln\rho)$, ε 是以下方程的唯一正解:

$$b\rho^\varepsilon+c_2\varepsilon\phi(1+\kappa\rho^{\varepsilon/p})^p+\sum_j a_j\rho_j^\varepsilon=a.\qquad(\rho,\phi\text{ 依}(4.1.4))\quad(4.1.27\mathrm{a})$$

(ii) 条件(4.1.26b)满足, $\gamma\in(0,\ln\kappa^{-p}/\ln\rho]$, 且

$$a+b\rho^\gamma+c_2\gamma\phi(1+\kappa\rho^{\gamma/p})^p+\sum_j\|Q_j\|^{p/2}(\rho_j^\gamma-1)$$

$$<[c_1(1-\kappa\rho^{\gamma/p})^p/\check{\tau}]\wedge\sum_j a_j\pi_j^\gamma,\qquad(4.1.27\mathrm{b})$$

其中 $\check{\tau}=\max\tau_j$(下同). 当 $a+b<[c_1(1-\kappa)^p/\check{\tau}]\wedge\sum a_j$ 时满足式(4.1.27b)的 $\gamma\in(0,\ln\kappa^{-p}/\ln\rho]$ 必存在.

证 取定方程(4.1.1)的一个解 $x(t)=x(t,\xi)$, 只要证 $h(t)$(记号依式(4.1.7))有界. 如通常一样,不妨设 $p>1,0<\kappa<1,0<\gamma<\ln\kappa^{-p}/\ln\rho$, 因而 $\kappa_1\triangleq\kappa\rho^{\gamma/p}\in(0,1)$. 用 Hölder 不等式易从式(4.1.25)推出

$$|u(\varphi)|^p\leqslant\kappa^p\int_{-\tau}^0|\varphi(\theta)|^p\mathrm{d}\mu,\quad\varphi\in C.$$

这又推出不等式(4.1.8),因而不等式(4.1.13)可用.

考虑情况(i). 易见方程(4.1.27a)有唯一正解 ε. 设 $0<\gamma<\varepsilon\wedge(\ln\kappa^{-p}/\ln\rho)$, 则

$$\begin{aligned}c_1\tilde{h}(t)&\leqslant\mathrm{E}[\psi^{-\gamma}(t)V(t,\tilde{x}(t))]\\&\leqslant\mathrm{const}+\mathrm{E}\int_0^t V(s,\tilde{x}(s))\mathrm{d}\psi^{-\gamma}(s)+\mathrm{E}\int_0^t\psi^{-\gamma}(s)LV(s,\tilde{x}(s))\mathrm{d}s\\&\triangleq\mathrm{const}+I_1+I_2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_1&\leqslant c_2\gamma\phi\mathrm{E}\int_0^t\psi^{-\gamma}(s)|\tilde{x}(s)|^p\mathrm{d}s\\&\leqslant c_2\gamma\phi(1+\kappa_1)^{p-1}\mathrm{E}\int_0^t\psi^{-\gamma}(s)\Big[|x(s)|^p+\kappa_1^{1-p}\kappa^p\int_{-\tau}^0|x(s+\theta)|^p\mathrm{d}\mu(\theta)\Big]\mathrm{d}s\\&=c_2\gamma\phi(1+\kappa_1)^{p-1}\Big[\int_0^t h(s)+\kappa_1^{1-p}\kappa^p\int_{-\tau}^0\mathrm{d}\mu(\theta)\int_0^t\psi^{-\gamma}(s)\mathrm{E}|x(s+\theta)|^p\mathrm{d}s\Big]\\&\leqslant\mathrm{const}+c_2\gamma\phi(1+\kappa_1)^p\int_0^t h(s)\mathrm{d}s;\end{aligned}$$

$$I_2\leqslant\mathrm{E}\int_0^t\psi^{-\gamma}(s)\Big[\zeta(s)-a|x(s)|^p+\sum_j a_j|x(s-\tau_j)|^p$$

$$+ b\int_{-\tau}^{0} |x(s+\theta)|^p \mathrm{d}\nu(\theta)\Big]\mathrm{d}s \qquad (\text{用}(4.1.26\text{a}))$$

$$\leqslant \text{const} - a\int_0^t h(s)\mathrm{d}s + \sum_j a_j\rho_j^\gamma \int_{-\tau}^t h(s)\mathrm{d}s + b\rho^\gamma\int_{-\tau}^t h(s)\mathrm{d}s$$

$$\leqslant \text{const} + \Big(-a + b\rho^\gamma + \sum_j a_j\rho_j^\gamma\Big)\int_0^t h(s)\mathrm{d}s.$$

综上得

$$c_1\tilde{h}(t) \leqslant \text{const} + c\int_0^t h(s)\mathrm{d}s, \quad t \geqslant 0,$$

其中

$$c = b\rho^\gamma + c_2\gamma\phi(1+\kappa_1)^p + \sum_j a_j\rho_j^\gamma - a$$

$$\leqslant b\rho^\varepsilon + c_2\varepsilon\phi(1+\kappa\rho^{\varepsilon/p})^p + \sum_j a_j\rho_j^\varepsilon - a = 0.$$

故得 $\tilde{h}(t) \leqslant \text{const}$; 然后由式(4.1.13)得所要证.

对于情况(ii),使用由式(4.1.23)定义的 $W(t,x)$,有

$$c_1\tilde{h}(t) \leqslant \mathrm{E}[\psi^{-\gamma}(t)W(t,\tilde{x}(t))]$$

$$= \text{const} + I_1 + \mathrm{E}\int_0^t \mathrm{d}\psi^{-\gamma}(s)\sum_j\int_{s-\tau_j}^s [x^{\mathrm{T}}(\theta)Q_jx(\theta)]\mathrm{d}\theta$$

$$+ \mathrm{E}\int_0^t \psi^{-\gamma}(s)LW(s,\tilde{x}(s))\mathrm{d}s$$

$$\triangleq \text{const} + I_1 + I_2 + I_3,$$

其中 I_1 如同情况(i)之证. 分别估计 I_2 与 I_3 如下:

$$I_2 \leqslant \sum_j \|Q_j\|^{p/2}\int_{-\tau}^t \mathrm{E}|x(\theta)|^p\mathrm{d}\theta\int_\theta^{\theta+\tau_j}\mathrm{d}\psi^{-\gamma}(s)$$

$$= \sum_j \|Q_j\|^{p/2}\int_{-\tau}^t h(\theta)\left[\frac{\psi^\gamma(\theta)}{\psi^\gamma(\theta+\tau_j)} - 1\right]\mathrm{d}\theta$$

$$\leqslant \text{const} + \sum_j \|Q_j\|^{p/2}(\rho_j^\gamma - 1)\int_0^t h(s)\mathrm{d}s;$$

$$I_3 \leqslant \mathrm{E}\int_0^t \psi^{-\gamma}(s)\Big[\zeta(s) + a|x(s)|^p - \sum_j a_j|x(s-\tau_j)|^p$$

$$+ b\int_{-\tau}^0 |x(s+\theta)|^p\mathrm{d}\nu(\theta)\Big]\mathrm{d}s \qquad (\text{用}(4.1.26\text{b}))$$

$$\leqslant \text{const} + (a + b\rho^\gamma)\int_0^t h(s)\mathrm{d}s - \sum_j a_j\pi_j\int_0^{t-\check{\tau}} h(s)\mathrm{d}s.$$

在不等式(4.1.27b)两端之间插入一非负数 ω [①],综合对 $I_1 \sim I_3$ 的估计得

---

① 若式(4.1.27b)之右端 $=0(\Leftrightarrow \sum a_j = 0)$,则取 $\omega = 0$, 显然同样可完成证明. 今后在类似情况下亦照此处理,不另作说明.

$$c_1\tilde{h}(t) \leqslant \text{const} - \omega\int_0^{t-\check{\tau}} h(s)\,\mathrm{d}s + \omega\int_0^t h(s)\,\mathrm{d}s$$
$$\leqslant \text{const} + \omega\check{\tau}H(t), \quad t \geqslant 0^{①},$$
$$\tilde{H}(t) \leqslant \text{const} + c_1^{-1}\omega\,\check{\tau}H(t).$$

以此代入不等式(4.1.13)得

$$H(t) \leqslant \text{const} + \frac{\omega\check{\tau}H(t)}{c_1(1-\kappa_1)^p}.$$

结合 $\omega\check{\tau} < c_1(1-\kappa_1)^p$ 得 $H(t) \leqslant \text{const}$，如所要证. □

适当选择 V,τ_j 与 Q_j，可将定理4.1.8 作多种不同的应用，不必尽述. 取 $V=|x|^p$，或许是特别值得注意的情况.

推论 4.1.9　设 $p\geqslant 1, V=|x|^p$；存在常数 $\kappa\in[0,1), a\in\mathbf{R}, a_j, b\geqslant 0, \tau_j\in(0,\tau]$，$[-\tau,0]$ 上的概率测度 μ,ν，半正定矩阵 Q_j，使得条件(4.1.25)满足且

$$\mathscr{L}V(t,\varphi)\leqslant -a|\varphi(0)|^p+\sum_j a_j|\varphi(-\tau_j)|^p+b\int_{-\tau}^0|\varphi(\theta)|^p\mathrm{d}\nu \qquad (4.1.26\text{a})'$$

或

$$\mathscr{L}V(t,\varphi)+\sum_j\{[\varphi^{\mathrm{T}}(0)Q_j\varphi(0)]^{p/2}-[\varphi^{\mathrm{T}}(-\tau_j)Q_j\varphi(-\tau_j)]^{p/2}\}$$
$$\leqslant a|\varphi(0)|^p-\sum_j a_j|\varphi(-\tau_j)|^p+b\int_{-\tau}^0|\varphi(\theta)|^p\mathrm{d}\nu, \qquad (4.1.26\text{b})'$$

其中 $t\geqslant 0,\varphi\in C$. 则在以下两种情况下方程(4.1.1)的零解 p 阶矩 ψ^γ 稳定：

(i) 条件(4.1.26a)′满足，$b+\sum a_j < a, \gamma=\varepsilon\wedge(\ln\kappa^{-p}/\ln\rho)$，$\varepsilon$ 是以下方程的唯一正解：

$$b\rho^\varepsilon+\varepsilon\phi(1+\kappa\rho^{\varepsilon/p})^p+\sum_j a_j\rho_j^\varepsilon=a. \qquad (4.1.27\text{a})'$$

(ii) 条件(4.1.26b)′满足，$0<\gamma\leqslant\ln\kappa^{-p}/\ln\rho$，

$$a+b\rho^\gamma+\gamma\phi(1+\kappa\rho^{\gamma/p})^p+\sum_j\|Q_j\|^{p/2}(\rho_j^\gamma-1)$$
$$<[(1-\kappa\rho^{\gamma/p})^p/\check{\tau}]\wedge\sum_j a_j\pi_j^{\ \gamma}. \qquad (4.1.27\text{b})'$$

当 $a+b<[(1-\kappa)^p/\check{\tau}]\wedge\sum a_j$ 时满足式(4.1.27b)′的 $\gamma\in(0,\ln\kappa^{-p}/\ln\rho]$ 必存在.

推论4.1.9 实质上已蕴涵 Randjelovic 等(2007)的主要结果定理1，且更为一般，处理方法也简单得多.

注意到条件(4.1.26a)′与(4.1.26b)′呈某种对偶性是有趣的. 与从 Razu-

---

① 以上论证隐蔽地用了假定 $t\geqslant\check{\tau}$. 不过，不难说明即使对于 $0\leqslant t<\check{\tau}$，所得不等式也是成立的. 今后将多次遇到类似情况，不再另作说明.

mikhin 定理所获印象似乎不同，在用 $\mathscr{L}V(t,\varphi)$ 表达的稳定性条件中，$\varphi(0)$ 与 $\varphi(-\tau_j)$ 的地位可有条件地互换，$\varphi(0)$ 不必一定居于支配地位. 这一事实今后将在类似形式下多次出现，是很值得注意的.

若进一步限制 $p=2,\tau_j\equiv\tau_1$，则得到更特殊的以下推论：

推论 4.1.10 设存在常数 $\kappa\in[0,1),a\in\mathbf{R},a_1,b\geqslant 0,\tau_1\in(0,\tau],[-\tau,0]$ 上的概率测度 μ,ν，半正定矩阵 Q，使得条件(4.1.25)及以下条件满足：

$$2\tilde{\varphi}^{\mathrm{T}}(0)f(t,\varphi)+|g(t,\varphi)|^2$$
$$\leqslant -a|\varphi(0)|^2+a_1|\varphi(-\tau_1)|^2+b\int_{-\tau}^{0}|\varphi(\theta)|^2\mathrm{d}\nu \quad (4.1.26\mathrm{a})''$$

或

$$2\tilde{\varphi}^{\mathrm{T}}(0)f(t,\varphi)+|g(t,\varphi)|^2+\varphi^{\mathrm{T}}(0)Q\varphi(0)-\varphi^{\mathrm{T}}(-\tau_1)Q\varphi(-\tau_1)$$
$$\leqslant a|\varphi(0)|^2-a_1|\varphi(-\tau_1)|^2+b\int_{-\tau}^{0}|\varphi(\theta)|^2\mathrm{d}\nu, \quad (4.1.26\mathrm{b})''$$

其中 $t\geqslant 0,\varphi\in C$. 则在以下两种情况下方程(4.1.1)的零解均方 ψ^{γ} 稳定：

(i) 条件(4.1.26a)″满足，$a_1+b<a,\gamma=\varepsilon\wedge(\ln\kappa^{-2}/\ln\rho)$，$\varepsilon$ 是以下方程的唯一正解：

$$b\rho^{\varepsilon}+\varepsilon\phi(1+\kappa\rho^{\varepsilon/2})^2+a_1\rho_1^{\varepsilon}=a. \quad (4.1.27\mathrm{a})''$$

(ii) 条件(4.1.26b)″满足，$0<\gamma\leqslant\ln\kappa^{-2}/\ln\rho$，

$$a+b\rho^{\gamma}+\gamma\phi(1+\kappa\rho^{\gamma/2})^2+\|Q\|(\rho_1^{\gamma}-1)$$
$$<(a_1\pi_1^{\gamma})\wedge[\tau_1^{-1}(1-\kappa\rho^{\gamma/2})^2]. \quad (4.1.27\mathrm{b})''$$

当 $a+b<a_1\wedge[\tau_1^{-1}(1-\kappa)^2]$ 时满足式(4.1.27b)″的 $\gamma\in(0,\ln\kappa^{-2}/\ln\rho]$ 必存在.

看两个应用推论 4.1.9 和推论 4.1.10 的具体例子.

例 4.1.11 考虑线性方程

$$\mathrm{d}\left[x(t)-\int_{-\tau}^{0}K(\theta)x(t+\theta)\mathrm{d}\theta\right]$$
$$=[-Ax(t)+\sum_j A_jx(t-\tau_j)]\mathrm{d}t+\sum_k\int_{-\tau}^{0}B_k(\theta)x(t+\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}w_k(t), \quad (*)$$

其中 $A,A_j,B_k(\theta),K(\theta)\in\mathbf{R}^{d\times d},\tau_j\in(0,\tau]$. 令

$$u(\varphi)=\int_{-\tau}^{0}K(\theta)\varphi(\theta)\mathrm{d}\theta,\quad f(\varphi)=-A\varphi(0)+\sum_j A_j\varphi(-\tau_j),$$

$$g(\varphi)=\int_{-\tau}^{0}[B_1(\theta)\varphi(\theta),\cdots,B_m(\theta)\varphi(\theta)]\mathrm{d}\theta,\quad \varphi\in C,$$

则

$$|u(\varphi)|\leqslant\int_{-\tau}^{0}\|K(\theta)\|\,|\varphi(\theta)|\,\mathrm{d}\theta\triangleq\kappa\int_{-\tau}^{0}|\varphi(\theta)|\,\mathrm{d}\mu,$$

其中 $\kappa \mathrm{d}\mu = \|K(\theta)\|\mathrm{d}\theta$,假定 $\kappa = \int_{-\tau}^{0}\|K(\theta)\|\mathrm{d}\theta < 1$,

$$|g(\varphi)|^2 \leqslant \left\{\int_{-\tau}^{0}\left[\sum_k |B_k(\theta)\varphi(\theta)|^2\right]^{1/2}\mathrm{d}\theta\right\}^2$$

$$\leqslant \tau\int_{-\tau}^{0}\sum_k \|B_k(\theta)\|^2|\varphi(\theta)|^2\mathrm{d}\theta.$$

令 $V = |x|^2, \sigma = \lambda_{\min}(A + A^{\mathrm{T}})$,则

$$\mathscr{L}V(t,\varphi) = 2\left[\varphi(0) - \int_{-\tau}^{0}K(\theta)\varphi(\theta)\mathrm{d}\theta\right]^{\mathrm{T}}\left[-A\varphi(0) + \sum_j A_j\varphi(-\tau_j)\right] + |g(\varphi)|^2$$

$$\leqslant -\sigma|\varphi(0)|^2 + 2\sum_j \varphi^{\mathrm{T}}(0)A_j\varphi(-\tau_j)$$

$$+ 2\int_{-\tau}^{0}\left[A\varphi(0) - \sum_j A_j\varphi(-\tau_j)\right]^{\mathrm{T}}K(\theta)\varphi(\theta)\mathrm{d}\theta + |g(\varphi)|^2$$

$$\leqslant -\sigma|\varphi(0)|^2 + \sum_j \|A_j\|\left[|\varphi(0)|^2 + |\varphi(-\tau_j)|^2\right]$$

$$+ \int_{-\tau}^{0}\left[\varepsilon\|A\|^2|\varphi(0)|^2 + \varepsilon^{-1}\|K(\theta)\|^2|\varphi(\theta)|^2\right]\mathrm{d}\theta$$

$$+ \sum_j\int_{-\tau}^{0}\left[\varepsilon_j\|A_j\|^2|\varphi(-\tau_j)|^2 + \varepsilon_j^{-1}\|K(\theta)\|^2|\varphi(\theta)|^2\right]\mathrm{d}\theta$$

$$+ \tau\int_{-\tau}^{0}\sum_k \|B_k(\theta)\|^2|\varphi(\theta)|^2\mathrm{d}\theta$$

$$\triangleq -a|\varphi(0)|^2 + \sum_j a_j|\varphi(-\tau_j)|^2 + b\int_{-\tau}^{0}|\varphi(\theta)|^2\mathrm{d}\nu,$$

其中 $\varepsilon, \varepsilon_j > 0$,

$$a = \sigma - \sum_j \|A_j\| - \varepsilon\tau\|A\|^2, \quad a_j = \|A_j\| + \varepsilon_j\tau\|A_j\|^2,$$

$$b\mathrm{d}\nu = \left[\left(\varepsilon^{-1} + \sum_j \varepsilon_j^{-1}\right)\|K(\theta)\|^2 + \tau\sum_k \|B_k(\theta)\|^2\right]\mathrm{d}\theta,$$

$$b = \int_{-\tau}^{0}\left[\left(\varepsilon^{-1} + \sum_j \varepsilon_j^{-1}\right)\|K(\theta)\|^2 + \tau\sum_k \|B_k(\theta)\|^2\right]\mathrm{d}\theta,$$

假定上式中的积分存在且有限. 令 $h = a - b - \sum a_j$,则

$$\frac{\partial h}{\partial \varepsilon} = -\tau\|A\|^2 + \varepsilon^{-2}\int_{-\tau}^{0}\|K(\theta)\|^2\mathrm{d}\theta,$$

$$\frac{\partial h}{\partial \varepsilon_j} = -\tau\|A_j\|^2 + \varepsilon_j^{-2}\int_{-\tau}^{0}\|K(\theta)\|^2\mathrm{d}\theta.$$

从 $\partial h/\partial\varepsilon = 0 = \partial h/\partial\varepsilon_j$ 解出 $\varepsilon, \varepsilon_j > 0$,代入 h 的表达式后得

$$h = \sigma - 2\sum_j \|A_j\| - 2\sqrt{\tau}\left(\|A\| + \sum \|A_j\|\right)\left[\int_{-\tau}^{0}\|K(\theta)\|^2\mathrm{d}\theta\right]^{1/2}$$

$$-\tau\int_{-\tau}^{0}\sum_{k}\|B_k(\theta)\|^2\mathrm{d}\theta.$$

于是由推论 4.1.9(用情况(i))得,当 $h>0$, 即

$$\lambda_{\min}(A+A^{\mathrm{T}})>2\sum_j\|A_j\|+\tau\sum_k\int_{-\tau}^{0}\|B_k(\theta)\|^2\mathrm{d}\theta$$
$$+2\sqrt{\tau}(\|A\|+\sum_j\|A_j\|)\left[\int_{-\tau}^{0}\|K(\theta)\|^2\mathrm{d}\theta\right]^{1/2}$$

时,存在 $\gamma>0$,使得方程(*)的零解均方 ψ^{γ} 稳定.

例 4.1.12 考虑半线性方程

$$\mathrm{d}[x(t)-Kx(t-\tau_1)]=[-Ax(t)+Bx(t-\tau_1)]\mathrm{d}t+g(t,x_t)\mathrm{d}w(t),\quad (**)$$

其中 $K,A,B\in\mathbf{R}^{d\times d},\kappa\triangleq\|K\|<1,\tau_1\in(0,\tau],g(t,0)\equiv0$,

$$|g(t,\varphi)|^2\leqslant b_0|\varphi(0)|^2+b\int_{-\tau}^{0}|\varphi(\theta)|^2\mathrm{d}\nu,$$

此处 $b_0,b\geqslant0,\nu$ 是 $[-\tau,0]$ 上的概率测度. 令

$$u(\varphi)=K\varphi(-\tau_1),\quad f(\varphi)=-A\varphi(0)+B\varphi(-\tau_1),\quad \varphi\in C.$$

取 μ 为点 $-\tau_1$ 处的 Dirac 测度使 $u(\varphi)$ 满足条件(4.1.25). 以 Φ 记式(4.1.26b)″之左端,则

$$\begin{aligned}\Phi&=2[\varphi(0)-K\varphi(-\tau_1)]^{\mathrm{T}}[-A\varphi(0)+B\varphi(-\tau_1)]\\&\quad+|g(t,\varphi)|^2+\varphi^{\mathrm{T}}(0)Q\varphi(0)-\varphi^{\mathrm{T}}(-\tau_1)Q\varphi(-\tau_1)\\&=[\varphi^{\mathrm{T}}(0),\varphi^{\mathrm{T}}(-\tau_1)]H\begin{bmatrix}\varphi(0)\\\varphi(-\tau_1)\end{bmatrix}+|g(t,\varphi)|^2\\&\leqslant(b_0-\lambda)|\varphi(0)|^2-\lambda|\varphi(-\tau_1)|^2+b\int_{-\tau}^{0}|\varphi(\theta)|^2\mathrm{d}\nu,\end{aligned}$$

其中 H 是如下 $2d$ 阶的对称矩阵:

$$H=\begin{bmatrix}Q-A-A^{\mathrm{T}} & B+A^{\mathrm{T}}K\\ B^{\mathrm{T}}+K^{\mathrm{T}}A & -Q-B^{\mathrm{T}}K-K^{\mathrm{T}}B\end{bmatrix},$$

假定 $\lambda_{\min}(H)\leqslant-\lambda\leqslant0$. 于是由推论 4.1.10(用情况(ii))得,若

$$b_0-\lambda+b<\lambda\wedge[\tau_1^{-1}(1-\kappa)^2],$$

则存在 $\gamma>0$, 使得方程(* *)的零解均方 ψ^{γ} 稳定.

选择 Q 与 λ 的一个简单方法如下:设

$$\lambda_{\min}(A+A^{\mathrm{T}})=\sigma\geqslant s=\lambda_{\min}(B^{\mathrm{T}}K+K^{\mathrm{T}}B),\quad Q=qI,$$

则

$$\begin{aligned}\Phi&\leqslant-\sigma|\varphi(0)|^2+\|B+A^{\mathrm{T}}K\|[|\varphi(0)|^2+|\varphi(-\tau_1)|^2]-s|\varphi(-\tau_1)|^2\\&\quad+|g(t,\varphi)|^2+q[|\varphi(0)|^2-|\varphi(-\tau_1)|^2]\\&=-(\sigma-\|B+A^{\mathrm{T}}K\|-q)|\varphi(0)|^2\end{aligned}$$

$$-(s-\|B+A^{\mathrm{T}}K\|+q)|\varphi(-\tau_1)|^2+|g(t,\varphi)|^2.$$

于是，只要令

$$\lambda=\sigma-\|B+A^{\mathrm{T}}K\|-q=s-\|B+A^{\mathrm{T}}K\|+q,$$

即可解出

$$q=\frac{\sigma-s}{2}\geqslant 0,\quad \lambda=\frac{\sigma+s}{2}-\|B+A^{\mathrm{T}}K\|,$$

假定 $\lambda\geqslant 0$. 这样的 $Q=qI$ 与 λ 即能合乎所求.

4.1.2　轨道稳定性

如在上一章所见，a. s. 轨道稳定性与矩稳定性呈某种对应关系. 从根本上说，其区别只在于，前者基于解的轨道估计，后者则基于矩估计，而两种估计常常互成对应，因而在方法上可互相借鉴. 这就毫不奇怪，上一小节中提出的概念、结论与方法可适当地转移到轨道稳定性.

首先，参照定义 4.1.1 提出以下定义.

定义 4.1.13　若有正常数 γ，方程(4.1.1)的解 $x(t,\xi)$ 恒满足

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\ln|x(t,\xi)|}{|\ln\psi(t)|}\leqslant-\gamma,\text{a. s.},\tag{4.1.28}$$

则说方程(4.1.1)的零解a. s. ψ^{γ}**稳定**. a. s. 指数稳定与**a. s. 多项式稳定**的意义自明.

条件(4.1.28)等价于

$$\sup_{t\geqslant 0}\psi^{-\mu}(t)|x(t,\xi)|<\infty,\text{a. s.},\quad\forall\mu\in(0,\gamma).$$

这又可代以稍强的条件

$$|x(t,\xi)|\leqslant\beta\psi^{\gamma}(t),\text{a. s.},\quad t\geqslant 0,$$

其中 $\beta>0$ 与 t 无关(但一般与 γ,ξ 有关).

如同在 3.3.3 节的开头已提到的，大体上说，得出轨道稳定性的方法有三种：其一是在一定附加条件下直接从矩稳定性推出相应的轨道稳定性；其二是利用定理 1.2.11(i)或(iii)直接作轨道估计；其三是利用指数鞅不等式作轨道估计. 这几种方法依次在下面考虑.

直接从矩稳定性推出轨道稳定性或许是很值得的，下面就是一个这样的结果，它可看作定理 3.3.8 的推广.

定理 4.1.14　设 $p\geqslant 1$；方程(4.1.1)的一个解 $x(t)=x(t,\xi)$ 满足条件

$$\mathrm{E}|x(t)|^p\leqslant\beta\psi^{\mu}(t),\quad t\geqslant 0,\tag{4.1.29}$$

其中 β,μ 是与 t 无关的正常数；存在 $\kappa\in[0,1)$ 与正常数 ε,K，使条件(4.1.8)及以下条件满足：

$$\sum_n\psi^{\varepsilon}(n\tau)<\infty,\tag{4.1.30}$$

$$\begin{cases} \mathrm{E}\,|\,f(t,x_t)\,|^p \vee \mathrm{E}\,|\,g(t,x_t)\,|^p \leqslant K\,\|x_t\|_0^p, \quad p \geqslant 2, & (4.1.31\mathrm{a}) \\ \mathrm{E}[\sup\limits_{t-\tau\leqslant s\leqslant t}|\,f(s,x_s)\,|^p] \vee \mathrm{E}[\sup\limits_{t-\tau\leqslant s\leqslant t}|\,g(s,x_s)\,|^p] & \\ \leqslant K\,\|x_t\|_0^p, \quad 1 \leqslant p < 2. & (4.1.31\mathrm{b}) \end{cases}$$

若 $\delta \triangleq \mu \wedge (\ln \kappa^{-p}/\ln \rho) > \varepsilon, \gamma = \delta - \varepsilon$, 则成立

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\ln|\,x(t)\,|^p}{|\ln \psi(t)\,|} \leqslant -\gamma, \text{a. s.}. \tag{4.1.32}$$

因此,若方程(4.1.1)的零解 p 阶矩 ψ^μ 稳定,条件(4.1.31)对方程(4.1.1)的任何解 $x(t) = x(t,\xi)$ 满足,则方程(4.1.1)的零解是 a.s. $\psi^{\gamma/p}$ 稳定的.

证　大体上沿用定理3.3.8的证法.

(i) 建立不等式

$$\mathrm{E}\,\|\tilde{x}_{n\tau}\|^p \leqslant c_1\psi^\mu(n\tau), \quad n \geqslant 2,$$

其中 $c_1 > 0$ 与 n 无关. 依定理3.3.8之证的记号有 $\mathrm{E}\,\|\tilde{x}_{n\tau}\|^p \leqslant I_1 + I_2 + I_3$, 其中

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{const } \mathrm{E}\,|\,\tilde{x}(n\tau - \tau)\,|^p \\ &\leqslant \text{const } [\mathrm{E}\,|\,x(n\tau-\tau)\,|^p + \kappa^p\,\|x_{n\tau-\tau}\|_0^p] && (\text{用}(4.1.8)) \\ &\leqslant \text{const } [\psi^\mu(n\tau-\tau) + \sup_{n\tau-2\tau\leqslant t\leqslant n\tau-\tau}\psi^\mu(t)] && (\text{用}(4.1.29)) \\ &\leqslant \text{const } [\rho^\mu\psi^\mu(n\tau) + \rho^{2\mu}\psi^\mu(n\tau)] && (\text{用}(4.1.4)) \\ &\leqslant \text{const } \psi^\mu(n\tau). \end{aligned}$$

若 $p \geqslant 2$, 则

$$\begin{aligned} I_3 &= \text{const } \mathrm{E}\left[\sup_{n\tau-\tau\leqslant t\leqslant n\tau}\left|\int_{n\tau-\tau}^t g(s,x_s)\mathrm{d}w(s)\right|^p\right] \\ &\leqslant \text{const}\int_{n\tau-\tau}^{n\tau}\mathrm{E}\,|\,g(t,x_t)\,|^p\mathrm{d}t && (\text{用}(1.3.46)) \\ &\leqslant \text{const}\int_{n\tau-\tau}^{n\tau}\|x_t\|_0^p\mathrm{d}t && (\text{用}(4.1.31\mathrm{a})) \\ &\leqslant \text{const}\int_{n\tau-\tau}^{n\tau}\sup_{t-\tau\leqslant s\leqslant t}\psi^\mu(s)\,\mathrm{d}t && (\text{用}(4.1.29)) \\ &\leqslant \text{const } \psi^\mu(n\tau). \end{aligned}$$

若 $1 \leqslant p < 2$, 则

$$\begin{aligned} I_3 &\leqslant \text{const } \mathrm{E}\left[\int_{n\tau-\tau}^{n\tau}|\,g(t,x_t)\,|^2 dt\right]^{\frac{p}{2}} && (\text{用}(1.3.48)) \\ &\leqslant \text{const } \mathrm{E}\left[\sup_{n\tau-\tau\leqslant t\leqslant n\tau}|\,g(t,x_t)\,|^p\right] \\ &\leqslant \text{const } \|x_{n\tau}\|_0^p \leqslant \text{const } \psi^\mu(n\tau). && (\text{用}(4.1.31\mathrm{b})) \end{aligned}$$

类似可证 $I_2 \leqslant \text{const } \psi^\mu(n\tau)$. 综上得所要不等式.

(ii) 证明对于几乎所有 $\omega \in \Omega$ 有

$$|\tilde{x}(t)|^p \leqslant c_2\psi^\gamma(t), \quad t \geqslant 0, \tag{4.1.33}$$

其中 $c_2 > 0$ 与 t 无关(但可能与 ω 有关). 因

$$P(\|\tilde{x}_{n\tau}\|^p \geqslant \psi^\gamma(n\tau)) \leqslant \psi^{-\gamma}(n\tau)\mathrm{E}\|\tilde{x}_{n\tau}\|^p \leqslant c_1\psi^\varepsilon(n\tau),$$

故由条件(4.1.30)可用 Borel-Cantelli 引理得,对几乎所有 $\omega \in \Omega$,当 n 充分大且 $n\tau - \tau \leqslant t \leqslant n\tau$ 时有

$$|\tilde{x}(t)|^p \leqslant \|\tilde{x}_{n\tau}\|^p < \psi^\gamma(n\tau) \leqslant \mathrm{const}\,\psi^\gamma(t),$$

于是得不等式(4.1.33).

(iii) 证式(4.1.32). 取定 $\omega \in \Omega$, 使式(4.1.33)成立. 固定此 ω,令 $x(t) = x(t,\omega)$, $h(t) = \psi^{-\gamma}(t)|x(t)|^p$, $H(t) = \sup\limits_{-\tau\leqslant s\leqslant t} h(s)$, 则用式(4.1.33)与条件(4.1.8)可建立

$$h(t) \leqslant c_2(1-\kappa_1)^{1-p} + \kappa_1 H(t), \qquad t \geqslant 0,$$

其中 $\kappa_1 = \kappa\rho^{\gamma/p} < 1$(用 $\gamma < \ln\kappa^{-p}/\ln\rho$). 由此解出(参照式(4.1.13))

$$H(t) \leqslant \frac{\|\xi\|^p}{1-\kappa_1} \vee \frac{c_2}{(1-\kappa_1)^p} \triangleq c_3, \quad t \geqslant 0,$$

从而 $|x(t)|^p \leqslant c_3\psi^\gamma(t)\,(t \geqslant 0)$. 这显然推出式(4.1.32). □

若取 $\psi(t) = \mathrm{e}^{-t}$,则对任给 $\varepsilon > 0$ 条件(4.1.30)满足(假定 $\tau > 0$),于是令 $\varepsilon \to 0$, 由式(4.1.32)得

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\, t^{-1}\ln|x(t)|^p \leqslant -[\mu \wedge (\tau^{-1}\ln\kappa^{-p})], \text{a. s.}.$$

这表明在很一般的条件下矩指数稳定推出 a. s. 指数稳定,这正是定理3.3.8 的结论. 若取 $\psi(t) = (1+\sigma t)^{-1}\,(0 < \sigma < 1/\tau)$, 则对任给 $\varepsilon > 1$ 条件(4.1.30)满足,于是有

推论 4.1.15　设 $p \geqslant 1$;方程(4.1.1)的一个解 $x(t)$ 满足条件

$$\mathrm{E}|x(t)|^p \leqslant \beta(1+\sigma t)^{-\mu}, \quad t \geqslant 0,$$

其中 $\beta > 0$ 与 $\mu > 1$ 与 t 无关;存在常数 $\kappa \in [0, 1-\sigma\tau)$, $K > 0$, 使条件(4.1.8)与(4.1.31)满足,则成立

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\ln|x(t)|^p}{\ln t} \leqslant 1 - \left[\mu \wedge \frac{p\ln\kappa}{\ln(1-\sigma\tau)}\right], \text{a. s.}.$$

以上结论表明,在很一般的条件下,适当高次的矩多项式稳定推出 a. s. 多项式稳定.

现在转向直接应用定理1.2.11(iii)作解的轨道估计. 仿照式(4.1.7),约定

$$\begin{cases} h(t) = \psi^{-\gamma}(t)|x(t)|^2, & H(t) = \sup\limits_{-\tau\leqslant s\leqslant t} h(s), \\ \tilde{h}(t) = \psi^{-\gamma}(t)|\tilde{x}(t)|^2, & \tilde{H}(t) = \sup\limits_{0\leqslant s\leqslant t} \tilde{h}(s). \end{cases} \tag{4.1.34}$$

但应注意与(4.1.7)不同,此处的 $h(t)$ 等是随机函数. 现在的问题是,对方程(4.1.1)的任意解 $x(t) = x(t,\xi)$ 与某个 $\gamma > 0$ 确定 $h(t)$ 为 a. s. 轨道有界,隐含于

$h(t)$ 中的 γ 与 ξ 由上下文决定. 下面是一个对应于定理 4.1.2 的轨道稳定性结果.

定理 4.1.16　设存在常数 $\kappa \in [0,1)$, $c,\mu > 0$ 与 $V(t,x) \in C^{1,2}(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d)$, 可测函数 $\zeta(t)$, 使得 $\zeta(t)\psi^{-\mu}(t) \in L^1(\mathbf{R}_+)$, 且条件(4.1.10)及以下条件满足:

$$|u(\varphi)| \leqslant \kappa \|\varphi\|, \quad \varphi \in C, \tag{4.1.35}$$

$$c|x|^2 \leqslant V(t,x), \quad t \geqslant 0, x \in \mathbf{R}^d. \tag{4.1.36}$$

则方程(4.1.1)的零解 a.s. $\psi^{\gamma/2}$ 稳定, $\gamma = \mu \wedge (\ln \kappa^{-2}/\ln \rho)$.

证　取定方程(4.1.1)的一个解 $x(t) = x(t,\xi)$, 设 $0 < \gamma < \mu \wedge (\ln \kappa^{-2}/\ln \rho)$, 依式(4.1.34)中的记号, 只要证 $h(t)$ 为 a.s. 轨道有界. 类似于定理 4.1.2 之证, 首先建立 $h(t)$ 与 $\tilde{h}(t)$ 之间的联系. 不妨设 $\kappa \in (0,1)$, 则 $\kappa_1 \triangleq \kappa\rho^{\gamma/2} \in (0,1)$, 于是

$$\begin{aligned} h(t) &\leqslant \psi^{-\gamma}(t)\left[\frac{|\tilde{x}(t)|^2}{1-\kappa_1} + \frac{\kappa^2 \|x_t\|^2}{\kappa_1}\right] \\ &\leqslant (1-\kappa_1)^{-1}\tilde{h}(t) + \kappa_1 H(t), \quad t \geqslant 0. \end{aligned}$$

由此易得(对照式(4.1.13))

$$H(t) \leqslant \frac{\|\xi\|^2}{1-\kappa_1} \vee \frac{\widetilde{H}(t)}{(1-\kappa_1)^2}, \quad t \geqslant 0. \tag{4.1.37}$$

式(4.1.37)表明只要证 $\tilde{h}(t)$ 为 a.s. 轨道有界. 为估计 $\tilde{h}(t)$, 应用条件(4.1.36)与(4.1.10):

$$\begin{aligned} c\,\tilde{h}(t) &\leqslant \psi^{-\gamma}(t)V(t,\tilde{x}(t)) \\ &= V(0,\tilde{x}(0)) + \int_0^t L[\psi^{-\gamma}(s)V(s,\tilde{x}(s))]\mathrm{d}s + M(t), \end{aligned}$$

其中 $M(t)$ 是一个连续局部鞅, $M(0) = 0$. 由条件(4.1.10)推出

$$\int_0^t L[\psi^{-\gamma}(s)V(s,\tilde{x}(s))]\mathrm{d}s$$

有常数上界. 于是由定理 1.2.11(iii)得出 $\tilde{h}(t)$ a.s. 轨道有界, 如所要证.　□

如同不等式(4.1.13)一样, 不等式(4.1.37)(或其变种)在本章中将被反复使用. 亦宜注意, 式(4.1.37)仅依赖于条件(4.1.35)与不等式 $\gamma < \ln \kappa^{-2}/\ln \rho$, 而不涉及函数 V 及与之关联的条件(4.1.10)与(4.1.36).

若将定理 4.1.16 用于方程(4.1.2), 则应取 $\kappa = 0$, 此时用不着条件(4.1.35), 且 $\gamma = \mu$. 若将定理 4.1.16 用于方程(4.1.3), 则如已指出的, 条件(4.1.10)可写成(取 $\zeta(t) \equiv 0$)

$$\alpha \leqslant \gamma\psi_1(t), \quad t \geqslant 0, \quad x \in \mathbf{R}^d, \quad \alpha \text{ 依}(2.3.31).$$

然后取 $\psi(t) = \mathrm{e}^{-t}$ 或 $\psi(t) = (1+t)^{-1}$, 由定理 4.1.16 得

推论 4.1.17　设存在 $V(t,x) \in C^{1,2}(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d)$ 与正常数 c,γ, 使得条件(4.1.36)及以下条件满足:

$$\alpha \leqslant -\gamma \quad 或 \quad \alpha \leqslant -\gamma(1+t)^{-1}, \qquad (\alpha\text{ 依}(2.3.31))$$

则方程(4.1.3)的零解 a.s. 指数稳定或 a.s. 多项式稳定,且对任给 $x_0 \in \mathbf{R}^d$ 有

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} t^{-1}\ln|x(t,x_0)|^2 \leqslant -\gamma, \text{a.s.}$$

或

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\ln|x(t,x_0)|^2}{\ln t} \leqslant -\gamma, \text{a.s.}.$$

与定理4.1.8相对照,有以下均方稳定性与轨道稳定性结果.

定理4.1.18　设存在常数 $\kappa \in [0,1), c_1, c_2 > 0, a \in \mathbf{R}, a_j, b \geqslant 0, \tau_j \in (0,\tau]$, $[-\tau,0]$ 上的概率测度 μ,ν,函数 $V(t,x) \in C^{1,2}(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d)$ 与 $\zeta(t)$,使得条件(4.1.25)及以下条件满足:

$$c_1|x|^2 \leqslant V(t,x) \leqslant c_2|x|^2, \quad t \geqslant 0, x \in \mathbf{R}^d; \tag{4.1.38}$$

$$\mathscr{L}V(t,\varphi) \leqslant \zeta(t) - a|\varphi(0)|^2 + \sum_j a_j|\varphi(-\tau_j)|^2 + b\int_{-\tau}^0 |\varphi(\theta)|^2 d\nu, \tag{4.1.39}$$

其中 $t \geqslant 0, \varphi \in C; b + \sum a_j < a, \gamma = \varepsilon \wedge (\ln\kappa^{-2}/\ln\rho)$,$\varepsilon$ 是以下方程的唯一正解:

$$b\rho^{\varepsilon} + c_2\varepsilon\phi(1+\kappa\rho^{\varepsilon/2})^2 + \sum_j a_j\rho_j^{\varepsilon} = a, \tag{4.1.40}$$

其中 ρ,ϕ 依式(4.1.4),ρ_j 依式(4.1.24);$\zeta(t)\psi^{-\gamma}(t) \in L^1(\mathbf{R}_+)$. 则方程(4.1.1)的零解均方 ψ^{γ} 稳定与 a.s. $\psi^{\gamma/2}$ 稳定.

证　均方 ψ^{γ} 稳定性结论直接从定理4.1.8(情况(i))得出. a.s. 轨道稳定性的证明亦类似于定理4.1.8情况(i)之证,只需写出一个梗概. 取定方程(4.1.1)的一个解 $x(t) = x(t,\xi)$,不妨设 $\kappa \in (0,1), 0 < \gamma < \varepsilon \wedge (\ln\kappa^{-2}/\ln\rho)$,只要证 $\tilde{h}(t)$(记号依式(4.1.34))a.s. 轨道有界. 由条件(4.1.38)有

$$c_1\tilde{h}(t) \leqslant \psi^{-\gamma}(t)V(t,\tilde{x}(t)) = V(0,\tilde{x}(0)) + I + M(t),$$

其中 $M(t)$ 是一实值连续局部鞅,$M(0) = 0$;

$$\begin{aligned} I &= \int_0^t L[\psi^{-\gamma}(s)V(s,\tilde{x}(s))]ds \\ &= \int_0^t V(s,\tilde{x}(s))d\psi^{-\gamma}(s) + \int_0^t \psi^{-\gamma}(s)LV(s,\tilde{x}(s))ds \\ &\triangleq I_1 + I_2. \end{aligned}$$

类似于定理4.1.8之证,可得估计:

$$I_1 \leqslant c_2\gamma\phi\int_0^t \tilde{h}(s)ds \leqslant \eta_1 + c_2\gamma\phi(1+\kappa_1)^2\int_0^t h(s)ds, \quad \kappa_1 = \kappa\rho^{\gamma/2},$$

$$\begin{aligned} I_2 &\leqslant \int_0^t \psi^{-\gamma}(s)\Big[\zeta(s) - a|x(s)|^2 + \sum_j a_j|x(s-\tau_j)|^2 + b\int_{-\tau}^0 |x(s+\theta)|^2 d\nu(\theta)\Big]ds \\ &\leqslant \eta_2 + \Big(-a + \sum_j a_j\rho_j^{\gamma} + b\rho^{\gamma}\Big)\int_0^t h(s)ds, \end{aligned}$$

以上 η_1,η_2（及下面的 η_3,η_4）是与 t 无关的非负有界随机变量. 综上得到

$$I \leqslant \eta_3 + c\int_0^t h(s)\,\mathrm{d}s,$$

其中

$$c = b\rho^{\gamma} + c_2\gamma\phi(1+\kappa_1)^2 + \sum_j a_j\rho_j^{\gamma} - a$$

$$\leqslant b\rho^{\varepsilon} + c_2\varepsilon\phi(1+\kappa\rho^{\varepsilon/2})^2 + \sum_j a_j\rho_j^{\varepsilon} - a = 0.$$

这就得到 $I \leqslant \eta_3$，从而 $c_1\tilde{h}(t) \leqslant \eta_4 + M(t)\ (t \geqslant 0)$，于是由定理 1.2.11(iii) 推出 $\tilde{h}(t)$ 为 a.s. 轨道有界，如所要证. □

在定理 4.1.8(ii)（取 $p=2$）之下，类似可证（沿用上面的记号）

$$c_1\tilde{h}(t) \leqslant \text{const} + \omega\check{\tau}H(t) + M(t).$$

结合式(4.1.37)得 $H(t) \leqslant \alpha + \beta M_1(t)$，其中 α,β 与 t 无关，$M_1(t) = \sup_{0\leqslant s\leqslant t} M(s)$. 但 $M_1(t)$ 不再是局部鞅，故无法应用定理 1.2.11(iii) 得出 $H(t)$ 为 a.s. 轨道有界. 由此看来，就轨道稳定性而言，定理 4.1.8 中的两种情况并不对等. 类似的现象后面还将多次出现，值得注意.

现在看一个应用指数鞅不等式的结果，它可看作定理 2.3.9(i) 的某种推广.

定理 4.1.19 设 $x(t)$ 是方程(4.1.1)的一个解，$\forall t \geqslant 0$，有 $\tilde{x}(t) \neq 0$，a.s.，存在常数 $c>0$，$\kappa \in [0,1)$ 与 $V(t,x) \in C^{1,2}(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d)$，$\zeta(t) \in L^1(\mathbf{R}_+)$ 及在 $\delta = 1$ 邻近有定义的连续函数 $\mu(\delta)$，使得 $\mu \triangleq \mu(1) > 0$，且条件(4.1.35)，(4.1.36)及以下条件满足：

$$\frac{LV(t,\tilde{x}(t))}{V(t,\tilde{x}(t))} - \frac{\delta}{2}|Z(t)|^2 \leqslant \zeta(t) + \mu(\delta)\psi_1(t), \qquad t \geqslant 0, \tag{4.1.41}$$

其中 $\delta \in (0,1)$ 邻近 1，$Z(t) = V_x(t,\tilde{x}(t))g(t,x_t)/V(t,\tilde{x}(t))$. 则成立

$$\varlimsup_{t\to\infty} \frac{\ln|x(t)|^2}{|\ln\psi(t)|} \leqslant -\gamma, \text{a.s.}, \tag{4.1.42}$$

其中 $\gamma = \mu \wedge (\ln\kappa^{-2}/\ln\rho)$. 因此，若方程(4.1.1)的任何非零解 $x(t)$ 使条件(4.1.41)满足，则方程(4.1.1)的零解 a.s. $\psi^{\gamma/2}$ 稳定.

证 可设 $0 < \gamma < \mu \wedge (\ln\kappa^{-2}/\ln\rho)$，只要证 $h(t)$（依式(4.1.34)）a.s. 轨道有界. 因仍可用不等式(4.1.37)，故只需证 $\tilde{h}(t)$ a.s. 轨道有界. 由条件(4.1.36)及(1.3.37)有

$$\begin{aligned}\ln[c\,\tilde{h}(t)] &\leqslant \ln[\psi^{-\gamma}(t)V(t,\tilde{x}(t))]\\ &= \ln V(0,\tilde{x}(0)) - \gamma\ln\psi(t) + M(t)\\ &\quad + \int_0^t\left[\frac{LV(s,\tilde{x}(s))}{V(s,\tilde{x}(s))} - \frac{1}{2}|Z(s)|^2\right]\mathrm{d}s,\end{aligned} \tag{4.1.43}$$

其中 $M(t) = \int_0^t Z(s)\,\mathrm{d}w(s)$. 以 $\varphi(t)$ 记 $1/\psi(t)$ 的反函数，则 $\varphi(t)\ (t \geqslant -\tau)$ 严格单

调增且 $\varphi(\infty)=\infty$. 取 $\delta\in(0,1)$ 充分接近于1,由指数鞅不等式有

$$P\Big(\sup_{0\leq t\leq\varphi(e^{n+1})}\Big[M(t)-\frac{1-\delta}{2}\int_0^t|Z(s)|^2ds\Big]\geq\frac{2\ln n}{1-\delta}\Big)\leq\frac{1}{n^2}.$$

由 Borel-Cantelli 引理,a. s. 地,当 n 充分大且 $\varphi(e^n)\leq t\leq\varphi(e^{n+1})$ 时有

$$\begin{aligned}M(t)&\leq\frac{1-\delta}{2}\int_0^t|Z(s)|^2ds+\frac{2\ln n}{1-\delta}\\&\leq\frac{1-\delta}{2}\int_0^t|Z(s)|^2ds+\frac{2\ln|\ln\psi(t)|}{1-\delta},\end{aligned}$$

最后一步用了 $e^n\leq 1/\psi(t)$. 以上述不等式代入(4.1.43)得 a. s. 地,当 t 充分大时有

$$\begin{aligned}\ln[c\,\tilde{h}(t)]&\leq\ln V(0,\tilde{x}(0))-\gamma\ln\psi(t)+2(1-\delta)^{-1}\ln|\ln\psi(t)|\\&\quad+\int_0^t\Big[\frac{LV(s,\tilde{x}(s))}{V(s,\tilde{x}(s))}-\frac{\delta}{2}|Z(s)|^2\Big]ds\\&\leq\ln V(0,\tilde{x}(0))+2(1-\delta)^{-1}\ln|\ln\psi(t)|\\&\quad+\int_0^t\zeta(s)ds-q|\ln\psi(t)|,\end{aligned}$$

最后一步用了条件(4.1.41), $q=\mu(\delta)-\gamma$. 因 $\mu=\mu(1)>\gamma$,故不妨设 $q>0$,从而当 t 充分大时有

$$q|\ln\psi(t)|>2(1-\delta)^{-1}\ln|\ln\psi(t)|.$$

这就得 a. s. 地,当 t 充分大时有

$$\ln[c\,\tilde{h}(t)]\leq\ln V(0,\tilde{x}(0))+\|\zeta\|_1,$$

这正表明 $\tilde{h}(t)$ a. s. 轨道有界,如所要证. □

将定理4.1.19用于方程(4.1.3)得到

推论4.1.20　设存在正常数 c 与 $V(t,x)\in C^{1,2}(\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^d)$, $\zeta(t)\in L^1(\mathbf{R}_+)$ 及在 $\delta=1$ 邻近有定义的连续函数 $\mu(\delta)$,使得 $\mu\triangleq\mu(1)>0$, 条件(4.1.36)满足,且

$$\alpha-\delta\beta\leq\zeta(t)+\mu(\delta)\psi_1(t),\quad t\geq0,x\in\mathbf{R}^d,\qquad(4.1.41)'$$

其中 α,β 依(2.3.31),则方程(4.1.3)的零解 a. s. $\psi^{\mu/2}$ 稳定.

特别,取 $\psi=e^{-t}$, $\zeta(t)\equiv0$, 从推论4.1.20得出定理2.3.9(i)的结论.

4.1.3　延迟微分方程

现在考虑较方程(4.1.1)更特殊的方程

$$d[x(t)-U(y(t))]=F(t,x(t),y(t))dt+G(t,x(t),y(t))dw(t);\quad(4.1.44)$$

$$d[x(t)-Ky(t)]=[-Ax(t)+By(t)]dt+G(t,x(t),y(t))dw(t),\quad(4.1.45)$$

其中 $U:\mathbf{R}^d\to\mathbf{R}^d$, $F:\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d\to\mathbf{R}^d$, $G:\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d\to\mathbf{R}^{d\times m}$, $y(t)=x(t-\delta(t))$, $\delta(t)\in C^1(\mathbf{R}_+,[0,\tau])$;在式(4.1.45)中 $K,A,B\in\mathbf{R}^{d\times d}$. 假定

$$U(0)=0\equiv F(t,0,0),\quad G(t,0,0)\equiv0,$$

$G(t,x,y)$ 局部有界;当应用 Razumikhin 型定理时认定函数 U,F 与 G 均连续.

为便于分析,对函数 $\delta(t)$ 与 $\psi(t)$ 作如下约定:令 $\tau_0 = \inf_{t\geq 0}\delta(t)$,

$$\begin{cases}\eta = \inf\limits_{t\geq 0}[1-\delta'(t)] > 0, & \eta_0 = \sup\limits_{t\geq 0}[1-\delta'(t)] < \infty, \\ \pi_0 = \inf\limits_{t\geq 0}\dfrac{\psi(t-\tau_0)}{\psi(t)}, & \rho_0 = \sup\limits_{t\geq 0}\dfrac{\psi(t-\tau_0)}{\psi(t)}.\end{cases} \tag{4.1.46}$$

不等式 $1-\eta_0 \leq \delta'(t) \leq 1-\eta$ 表明时滞 $\delta(t)$ 的变化较为平缓,这应当是合理的. 易见 $\eta \leq 1$; 若 $\delta(t) \equiv \tau$,则 $\tau_0 = \tau, \eta = \eta_0 = 1, \rho_0 = \rho, \pi_0 = \pi$ (依(4.1.4)).

方程(4.1.44)可看作方程(4.1.1)的特例(取 $u(x_t) = U(y(t)), f(t,\varphi) = F(t,\varphi(0),\varphi(-\delta(t))), g(t,\varphi) = G(t,\varphi(0),\varphi(-\delta(t)))$),因而可对其应用上两小节中对方程(4.1.1)所建立的结果. 下面仅举一结论以作说明.

定理 4.1.21 设 $p\geq 1$;存在常数 $\alpha>0, \lambda_0, \lambda_1 \in \mathbf{R}, \kappa\in[0,1/2)$ 与 $\zeta(t)\in C(\mathbf{R}_+)$,使得 $\zeta(t)\psi^{-\alpha}(t) \in L^1(\mathbf{R}_+)$,且条件(4.1.17)及以下条件满足:

$$|U(y)| \leq \kappa |y|, \quad y\in \mathbf{R}^d, \tag{4.1.47}$$

$$(p/2)|z|^{p-2}[2z^{\mathrm{T}}F(t,x,y) + |G(t,x,y)|^2 + (p-2)|z|^{-2}|z^{\mathrm{T}}G(t,x,y)|^2]$$
$$\leq \zeta(t) + \psi_1(t)(\lambda_0|x|^p - \lambda_1|y|^p), \quad t\geq 0, x,y\in\mathbf{R}^d, z = x-U(y). \tag{4.1.48}$$

则对某个 $\gamma>0$,方程(4.1.44)的零解 p 阶矩 ψ^γ 稳定. 若进而设 $p\geq 2$,

$$|F(t,x,y)|\vee|G(t,x,y)| \leq K(|x|+|y|), \quad t\geq 0, x,y\in\mathbf{R}^d, \tag{4.1.49}$$

K 是正常数,条件(4.1.48)中 $\psi_1(t)\equiv 1$, 则方程(4.1.44)的零解 a.s. 指数稳定.

证 因条件(4.1.47)与(4.1.48)分别推出条件(4.1.8)与(4.1.18),故定理中的矩稳定结论直接由定理 4.1.6 得出. 若 $p\geq 2$,则条件(4.1.49)推出(4.1.31a),于是可应用定理 4.1.14(取 $\psi(t) = \mathrm{e}^{-t}$)得 a.s. 指数稳定的结论. □

我们更感兴趣于建立适应方程(4.1.44)结构特点的稳定性判别法. 下面要考虑的判别法与定理 4.1.8 颇相类似,它用到类似于(4.1.23)的如下 Liapunov 函数:

$$V(t,x) = |x|^p + \int_{t-\delta(t)}^{t}[x^{\mathrm{T}}(s)Qx(s)]^{p/2}\mathrm{d}s. \tag{4.1.50}$$

对如上的 $V(t,x)$, 除了注意在 4.1.1 节中指出的那些特点之外,还要指出:若以 $R(t)$ 记式(4.1.50)右端的第二项,则有

$$R'(t) = [x^{\mathrm{T}}(t)Qx(t)]^{p/2} - [1-\delta'(t)][y^{\mathrm{T}}(t)Qy(t)]^{p/2}$$
$$\leq [x^{\mathrm{T}}(t)Qx(t)]^{p/2} - \eta[y^{\mathrm{T}}(t)Qy(t)]^{p/2}. \quad (\text{用(4.1.46)}) \tag{4.1.51}$$

定理 4.1.22 设 $p\geq 1$; 存在常数 $\kappa\in[0,1), \alpha>0, \lambda\in\mathbf{R}, \mu\geq 0$ 与可测函数 $\zeta(t)$,半正定矩阵 Q,使得 $\zeta(t)\psi^{-\alpha}(t)\in L^1(\mathbf{R}_+)$,且条件(4.1.47)及以下条件满足:

$$I \triangleq (p/2)|z|^{p-2}[2z^{\mathrm{T}}F(t,x,y) + |G(t,x,y)|^2$$

$$+(p-2)|z|^{-2}|z^{\mathrm{T}}G(t,x,y)|^{2}]$$
$$\leqslant \zeta(t)-\lambda|x|^{p}+\mu|y|^{p} \tag{4.1.52a}$$

或

$$I+(x^{\mathrm{T}}Qx)^{p/2}-\eta(y^{\mathrm{T}}Qy)^{p/2}\leqslant \zeta(t)+\lambda|x|^{p}-\mu|y|^{p}, \tag{4.1.52b}$$

其中 $t\geqslant 0, x,y\in \mathbf{R}^{d}, z=x-U(y)$；$\gamma=\alpha\wedge\varepsilon\wedge(\ln\kappa^{-p}/\ln\rho)$. 则在以下两种情况下方程(4.1.44)的零解 p 阶矩 ψ^{γ} 稳定：

(i) 条件(4.1.52a)满足，$\mu<\eta\lambda$，$\varepsilon\in(0,(\lambda-\eta^{-1}\mu)/\phi]$ 是以下方程的唯一正解：

$$\varepsilon\,\phi\,\eta^{-1}(\eta^{1/p}+\kappa\rho^{\varepsilon/p})^{p}+\eta^{-1}\mu\rho^{\varepsilon}=\lambda. \quad (\rho,\phi \text{ 依}(4.1.4)) \tag{4.1.53a}$$

(ii) 条件(4.1.52b)满足，且

$$\lambda<(\eta_0^{-1}\mu)\wedge[\tau^{-1}(1-\kappa)^{p}],\quad \eta_0^{-1}\mu\leqslant\|Q\|^{p/2}, \tag{4.1.54}$$

其中 η_0,π_0 依(4.1.46)；ε 是以下方程的唯一正解：

$$\|Q\|^{p/2}(1-\rho^{\varepsilon})-\varepsilon\phi\eta^{-1}(\eta^{1/p}+\kappa\rho^{\varepsilon/p})^{p}+(\eta_0^{-1}\mu\pi_0^{\varepsilon})\wedge[\tau^{-1}(1-\kappa\rho^{\varepsilon/p})^{p}]=\lambda. \tag{4.1.53b}$$

尽管定理4.1.22与定理4.1.8所考虑的方程与条件都有很大不同，但其结论却是高度类似的，当 $\delta(t)\equiv\tau$ 时尤其如此. 下面将看到，二者在证法上也很接近.

证 不妨只考虑情况(ii)，情况(i)是类似的，且更简单. 以 $\varphi(\varepsilon)$ 记方程(4.1.53b)之左端，则由条件(4.1.54)推出 $\varphi(\varepsilon)$ 对 $\varepsilon>0$ 严格单调减，$\varphi(0)>\lambda$，而 $\varphi(\infty)=-\infty$. 故方程(4.1.53b)有唯一正解 ε，固定此 ε. 设 $0<\gamma<\alpha\wedge\varepsilon\wedge(\ln\kappa^{-p}/\ln\rho)$，则 $\varphi(\gamma)>\varphi(\varepsilon)=\lambda$，于是必有非负数 ω 使得

$$(\eta_0^{-1}\mu\pi_0^{\gamma})\wedge[\tau^{-1}(1-\kappa\rho^{\gamma/p})^{p}]>\omega>\lambda+\|Q\|^{p/2}(\rho^{\gamma}-1)+\gamma\phi\eta^{-1}(\eta^{1/p}+\kappa\rho^{\gamma/p})^{p}.$$

取定方程(4.1.44)的解 $x(t)=x(t,\xi)$，只要证 $h(t)$(依式(4.1.7))有界. 如同定理4.1.8之证，关键在于估计 $\tilde{h}(t)$. 设 V 依式(4.1.50)，则

$$\begin{aligned}\tilde{h}(t)&\leqslant \mathrm{E}[\psi^{-\gamma}(t)V(t,\tilde{x}(t))]\\&\leqslant \mathrm{const}+\mathrm{E}\int_0^t\psi^{-\gamma}(s)[-\gamma\psi_1(s)V(s,\tilde{x}(s))+LV(s,\tilde{x}(s))]\mathrm{d}s\\&=\mathrm{const}+I_1+I_2+I_3,\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}I_1&=-\gamma\mathrm{E}\int_0^t\psi^{-\gamma}(s)\psi_1(s)|\tilde{x}(s)|^{p}\mathrm{d}s\\&\leqslant\gamma\phi\mathrm{E}\int_0^t\psi^{-\gamma}(s)[(1-\sigma)^{1-p}|x(s)|^{p}+\sigma^{1-p}\kappa^{p}|y(s)|^{p}]\mathrm{d}s\quad(0<\sigma<1)\\&\leqslant\mathrm{const}+\gamma\phi[(1-\sigma)^{1-p}+\eta^{-1}\sigma^{1-p}\kappa_1^{p}]\int_0^t h(s)\mathrm{d}s\qquad(\kappa_1=\kappa\rho^{\gamma/p})\\&=\mathrm{const}+\gamma\phi\eta^{-1}(\eta^{1/p}+\kappa_1)^{p}\int_0^t h(s)\mathrm{d}s,\qquad(\text{取 }\sigma=\kappa_1/(\kappa_1+\eta^{1/p}))\end{aligned}$$

$$I_2=\mathrm{E}\int_0^t\mathrm{d}\psi^{-\gamma}(s)\int_{s-\delta(s)}^{s}[x^{\mathrm{T}}(\theta)Qx(\theta)]^{p/2}\mathrm{d}\theta$$

$$\leqslant \text{const} + \|Q\|^{p/2}(\rho^{\gamma}-1)\int_0^t h(s)\mathrm{d}s;$$

$$I_3 = \mathrm{E}\int_0^t \psi^{-\gamma}(s)LV(s,\tilde{x}(s))\mathrm{d}s$$

$$\leqslant \mathrm{E}\int_0^t \psi^{-\gamma}(s)[\zeta(s)+\lambda|x(s)|^p-\mu|y(s)|^p]\mathrm{d}s \qquad (\text{用}(4.1.52\text{b}))$$

$$\leqslant \text{const} + \lambda\int_0^t h(s)\mathrm{d}s - \eta_0^{-1}\mu\pi_0^{\gamma}\int_0^{t-\tau}h(s)\mathrm{d}s$$

$$\leqslant \text{const} + (\lambda-\omega)\int_0^t h(s)\mathrm{d}s + \omega\tau H(t),$$

最后一步用到 $\eta_0^{-1}\mu\pi_0^{\gamma} > \omega$. 综上得

$$\tilde{h}(t) \leqslant \text{const} + \omega\tau H(t).$$

因式(4.1.13)仍可用,而$\omega\tau < (1-\kappa_1)^p$,故由以上不等式推出$h(t)$有界,如所要证. □

对照定理4.1.18,由定理4.1.22过渡到以下结果是很自然的.

定理4.1.23 设存在常数$\kappa \in [0,1)$,$\alpha > 0$,$\lambda \in \mathbf{R}$,$\mu \geqslant 0$与可测函数$\zeta(t)$,半正定矩阵Q,使得$\zeta(t)\psi^{-\alpha}(t) \in L^1(\mathbf{R}_+)$,且条件(4.1.47)及以下条件满足:

$$2z^{\mathrm{T}}F(t,x,y)+|G(t,x,y)|^2 \leqslant \zeta(t)-\lambda|x|^2+\mu|y|^2 \qquad (4.1.55\text{a})$$

或

$$2z^{\mathrm{T}}F(t,x,y)+|G(t,x,y)|^2+x^{\mathrm{T}}Qx-\eta y^{\mathrm{T}}Qy$$

$$\leqslant \zeta(t)+\lambda|x|^2-\mu|y|^2,\quad t\geqslant 0, x,y\in\mathbf{R}^d, z=x-U(y), \qquad (4.1.55\text{b})$$

$\gamma = \alpha \wedge \varepsilon \wedge (\ln\kappa^{-2}/\ln\rho)$. 则在以下两种情况下方程(4.1.44)的零解均方ψ^{γ}稳定,在情况(i)之下 a.s. $\psi^{\gamma/2}$稳定:

(i) 条件(4.1.55a)满足,$\mu < \eta\lambda$,$\varepsilon \in (0,(\lambda-\eta^{-1}\mu)/\phi]$是以下方程的唯一正解:

$$\varepsilon\phi\eta^{-1}(\eta^{1/2}+\kappa\rho^{\varepsilon/2})^2+\eta^{-1}\mu\rho^{\varepsilon} = \lambda. \qquad (4.1.56\text{a})$$

(ii) 条件(4.1.55b)满足,

$$\lambda < (\eta_0^{-1}\mu)\wedge[\tau^{-1}(1-\kappa)^2],\quad \eta_0^{-1}\mu \leqslant \|Q\|.$$

ε是以下方程的唯一正解:

$$\|Q\|(\rho^{\varepsilon}-1)+\varepsilon\phi\eta^{-1}(\eta^{1/2}+\kappa\rho^{\varepsilon/2})^2+\lambda$$

$$=(\eta_0^{-1}\mu\pi_0^{\varepsilon})\wedge[\tau^{-1}(1-\kappa\rho^{\varepsilon/2})^2]. \qquad (4.1.56\text{b})$$

值得注意的是,定理4.1.22(或定理4.1.23)的主要条件(4.1.52)(或(4.1.55))与$\psi(t)$无关,这不免使人怀疑定理能否有效应对ψ的不同选择.幸而,由方程(4.1.53)(或(4.1.56))决定的ε毕竟依赖于函数$\psi(t)$,这就使定理的结论不能不受制于$\psi(t)$的选择.

定理4.1.22(或定理4.1.23)还可作多方面的推广.首先,式(4.1.50)右端的

$|x|^p$可换成更一般的函数. 其次,式(4.1.52a)与(4.1.52b)之右端可增加一些项,在联系于方程的解进行估计时这些项将"互相抵消". 这一思想十分简单,但非常有用,可发展为一个有重要价值的普遍方法,本书中将多次运用,下面举出一个简单结果以作初步说明,其证明与定理4.1.22略同,故予省去.

定理4.1.24　设$p \geqslant 1$;存在常数$\kappa \in [0,1)$,$c_1, c_2 > 0$,$\lambda \in \mathbf{R}$,$\mu \geqslant 0$,$\gamma \in (0, \ln \kappa^{-p}/\ln \rho]$,函数$V(t,x) \in C^{1,2}(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d)$,$p_i(x)$,$q_i(x) \in C(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}_+)$及函数$\zeta(t)$,半正定矩阵$Q$,使得$\zeta(t)\psi^{-\gamma}(t) \in L^1(\mathbf{R}_+)$,且条件(4.1.9),(4.1.47)及以下条件满足:

$$\eta p_i(x) \geqslant \rho^\gamma q_i(x), \quad x \in \mathbf{R}^d, 1 \leqslant i \leqslant n,$$

$$\mathscr{L}V(t,x,y) \leqslant \zeta(t) - \lambda |x|^p + \mu |y|^p - \sum_i [p_i(x) - q_i(y)] \quad (4.1.52\text{a})'$$

或

$$\mathscr{L}V(t,x,y) + (x^{\mathrm{T}}Qx)^{p/2} - \eta(y^{\mathrm{T}}Qy)^{p/2}$$
$$\leqslant \zeta(t) + \lambda |x|^p - \mu |y|^p - \sum_i [p_i(x) - q_i(y)], \quad (4.1.52\text{b})'$$

其中$t \geqslant 0$,$x,y \in \mathbf{R}^d$. 则在以下两种情况下方程(4.1.44)的零解p阶矩ψ^γ稳定,在情况(i)之下a.s. $\psi^{\gamma/2}$稳定:

(i) 条件(4.1.52a)′满足,且

$$c_2\gamma\phi\eta^{-1}(\eta^{1/p} + \kappa\rho^{\gamma/p})^p + \eta^{-1}\mu\rho^\gamma \leqslant \lambda. \qquad (\rho, \phi \text{ 依}(4.1.4)) \quad (4.1.53\text{a})'$$

(ii) 条件(4.1.52b)′满足,且

$$c_2\gamma\phi\eta^{-1}(\eta^{1/p} + \kappa\rho^{\gamma/p})^p + \lambda + \|Q\|^{p/2}(\rho^\gamma - 1)$$
$$< (\eta_0^{-1}\mu\pi_0^\gamma) \wedge [c_1\tau^{-1}(1 - \kappa\rho^{\gamma/p})^p]. \quad (\eta_0, \pi_0 \text{ 依}(4.1.46)) \quad (4.1.53\text{b})'$$

接近于定理4.1.24的结果,可参考文献(Luo等, 2006).

下面考虑更特殊的方程(4.1.45). 鉴于方程(4.1.45)的半线性结构,对它更宜应用定理4.1.23,且可指望更多地运用代数工具. 易见

$$2(x - Ky)^{\mathrm{T}}(-Ax + By)$$
$$\leqslant (\|B + A^{\mathrm{T}}K\| - \sigma)|x|^2 + (\|B + A^{\mathrm{T}}K\| - s)|y|^2,$$

其中$\sigma = \lambda_{\min}(A + A^{\mathrm{T}})$,$s = \lambda_{\min}(K^{\mathrm{T}}B + B^{\mathrm{T}}K)$;对$z = (x,y) \in \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d$有

$$2(x - Ky)^{\mathrm{T}}(-Ax + By) + x^{\mathrm{T}}Qx - \eta y^{\mathrm{T}}Qy = z^{\mathrm{T}}Hz,$$

$$H = \begin{bmatrix} Q - A - A^{\mathrm{T}} & B + A^{\mathrm{T}}K \\ B^{\mathrm{T}} + K^{\mathrm{T}}A & -\eta Q - K^{\mathrm{T}}B - B^{\mathrm{T}}K \end{bmatrix}. \quad (4.1.57)$$

回忆一下在处理例4.1.12时已用过类似的矩阵了. 若$\lambda_{\max}(H) \leqslant -\lambda$,且函数$G$满足条件

$$|G(t,x,y)|^2 \leqslant \zeta(t) + \mu|x|^2 + \nu|y|^2, \quad t \geqslant 0, x,y \in \mathbf{R}^d, \quad (4.1.58)$$

令$F = -Ax + By$,则有

$$\text{式(4.1.55b)左端} \leqslant \zeta(t) + (\mu - \lambda)|x|^2 - (\lambda - \nu)|y|^2.$$

这就在形式上满足了条件(4.1.55b),从而可直接应用定理4.1.23得

定理4.1.25 设 $\kappa = \|K\| < 1$;存在常数 $\alpha > 0, \lambda, \mu, \nu \in \mathbf{R}$ 与可测函数 $\zeta(t)$,半正定矩阵 Q,使得 $\zeta(t)\psi^{-\alpha}(t) \in L^1(\mathbf{R}_+)$, $\lambda_{\max}(H) \leqslant -\lambda$, H 依式(4.1.57),且条件(4.1.58)满足;$\gamma = \alpha \wedge \varepsilon \wedge (\ln \kappa^{-2}/\ln \rho)$, ρ, ϕ 依式(4.1.4).则在以下两种情况下方程(4.1.45)的零解均方 ψ^γ 稳定,在情况(i)之下 a.s. $\psi^{\gamma/2}$ 稳定:

(i) 以下不等式满足:

$$(\|B + A^{\mathrm{T}}K\| + \nu - s)^+ < \eta(\sigma - \mu - \|B + A^{\mathrm{T}}K\|), \tag{4.1.59a}$$

ε 是以下方程的唯一正解:

$$\begin{aligned} &\varepsilon\phi\eta^{-1}(\eta^{1/2} + \kappa\rho^{\varepsilon/2})^2 + \eta^{-1}\rho^{\varepsilon}(\|B + A^{\mathrm{T}}K\| + \nu - s)^+ \\ &= \sigma - \mu - \|B + A^{\mathrm{T}}K\|. \end{aligned} \tag{4.1.60a}$$

(ii) 以下不等式满足:

$$\mu - \lambda < [\eta_0^{-1}(\lambda - \nu)] \wedge [\tau^{-1}(1 - \kappa)^2], \quad 0 \leqslant \eta_0^{-1}(\lambda - \nu) \leqslant \|Q\|; \tag{4.1.59b}$$

ε 是以下方程的唯一正解:

$$\begin{aligned} &\mu - \lambda + \|Q\|(\rho^{\varepsilon} - 1) + \varepsilon\phi\eta^{-1}(\eta^{1/2} + \kappa\rho^{\varepsilon/2})^2 \\ &= [\eta_0^{-1}\pi_0^{\varepsilon}(\lambda - \nu)] \wedge [\tau^{-1}(1 - \kappa\rho^{\varepsilon/2})^2]. \end{aligned} \tag{4.1.60b}$$

若以 $Q = qI$ 代入式(4.1.57),则对任给 $z = (x, y) \in \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d$,有

$$\begin{aligned} z^{\mathrm{T}}Hz &= x^{\mathrm{T}}(qI - A - A^{\mathrm{T}})x + 2x^{\mathrm{T}}(B + A^{\mathrm{T}}K)y - y^{\mathrm{T}}(\eta qI + K^{\mathrm{T}}B + B^{\mathrm{T}}K)y \\ &\leqslant -(\sigma - q - \|B + A^{\mathrm{T}}K\|)|x|^2 - (\eta q + s - \|B + A^{\mathrm{T}}K\|)|y|^2, \end{aligned}$$

其中 $\sigma = \lambda_{\min}(A + A^{\mathrm{T}})$, $s = \lambda_{\min}(K^{\mathrm{T}}B + B^{\mathrm{T}}K)$. 因此,若选取 q 使得

$$\sigma - q - \|B + A^{\mathrm{T}}K\| = \eta q + s - \|B + A^{\mathrm{T}}K\| \triangleq \lambda,$$

则有 $z^{\mathrm{T}}Hz \leqslant -\lambda|z|^2$,从而 $\lambda_{\max}(H) \leqslant -\lambda$. 可见应取

$$q = \frac{\sigma - s}{1 + \eta}, \quad \lambda = \frac{\eta\sigma + s}{1 + \eta} - \|B + A^{\mathrm{T}}K\|. \tag{4.1.61}$$

对如上选取的 λ, q 与 $Q = qI$,不等式(4.1.59b)成为

$$\lambda > \frac{\eta_0\mu + \nu}{1 + \eta_0} \vee [\mu - \tau^{-1}(1 - \kappa)^2], \quad 0 \leqslant \lambda - \nu \leqslant \eta_0 q. \tag{4.1.62}$$

依据以上分析,由定理4.1.25得

推论4.1.26 设 $\kappa = \|K\| < 1$;存在常数 $\alpha > 0, \mu, \nu \in \mathbf{R}$ 与可测函数 $\zeta(t)$,使得 $\zeta(t)\psi^{-\alpha}(t) \in L^1(\mathbf{R}_+)$,且条件(4.1.58)满足;$\gamma = \alpha \wedge \varepsilon \wedge (\ln \kappa^{-2}/\ln \rho)$, q, λ 依式(4.1.61),其中 σ, s 为

$$\sigma = \lambda_{\min}(A + A^{\mathrm{T}}) \geqslant \lambda_{\min}(K^{\mathrm{T}}B + B^{\mathrm{T}}K) = s. \tag{4.1.63}$$

若条件(4.1.62)满足,ε 是方程(4.1.60b)的唯一正解,在(4.1.60b)中 $\|Q\| = q$,则方程(4.1.45)的零解均方 ψ^γ 稳定.

今以一个线性方程来解释以上结论.

例 4.1.27 考虑线性方程

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}[x(t)-Ky(t)]\\&=[-Ax(t)+By(t)]\mathrm{d}t+Cx(t)\mathrm{d}w_1(t)+Dy(t)\mathrm{d}w_2(t),\quad(4.1.64)\end{aligned}$$

其中 $K,A,B,C,D\in\mathbf{R}^{d\times d}$，$\kappa=\|K\|<1$，$y(t)=x(t-\tau)$，$w=(w_1,w_2)^{\mathrm{T}}$ 是一个二维 Brown 运动.

(i) 一般情况. 取 $\mu=\|C\|^2$，$\nu=\|D\|^2$，$\zeta(t)\equiv 0$ 使 $G=(Cx,Dy)$ 满足条件(4.1.58). 在式(4.1.60b) ~ (4.1.62) 中令 $\eta=\eta_0=1$，$\pi_0=\pi$，$\phi=1$，$\|Q\|=q$，依次得到

$$\rho^{\varepsilon}q+\varepsilon(1+\kappa\rho^{\varepsilon/2})^2-[\pi^{\varepsilon}(\lambda-\nu)]\wedge[\tau^{-1}(1-\kappa\rho^{\varepsilon/2})^2]=\lambda-\mu+q,\quad(4.1.65)$$

$$q=(\sigma-s)/2,\quad\lambda=(\sigma+s)/2-\|B+A^{\mathrm{T}}K\|,\quad(4.1.66)$$

$$2\lambda>(\mu+\nu)\vee 2[\mu-\tau^{-1}(1-\kappa)^2],\ 0\leqslant\lambda-\nu\leqslant q,\quad(4.1.67)$$

其中，σ,s 依式(4.1.63). 由推论 4.1.26，若条件(4.1.67)满足，$\sigma\geqslant s$，$\gamma=\varepsilon\wedge(\ln\kappa^{-2}/\ln\rho)$，$\varepsilon$ 是方程(4.1.65)的唯一正解，则方程(4.1.64)的零解均方 ψ^{γ} 稳定.

(ii) 特殊情况. 取 $\tau=0.2$，

$$K=\begin{bmatrix}0.2&-0.3\\0.1&-0.2\end{bmatrix},\quad A=\begin{bmatrix}6&-2\\2&8\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-1&1\\1&2\end{bmatrix},$$

$$C=\begin{bmatrix}1&-1\\0&0.2\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}0.3&0\\-1.2&1\end{bmatrix}.$$

依次算出 $\kappa=\|K\|=0.4236$，$\sigma=\lambda_{\min}(A+A^{\mathrm{T}})=12$，$s=\lambda_{\min}(K^{\mathrm{T}}B+B^{\mathrm{T}}K)=-0.3$，$\|B+A^{\mathrm{T}}K\|=3.3528$，$\mu=\|C\|^2=2.0202$，$\nu=\|D\|^2=2.2439$. 然后由式(4.1.66)得 $q=6.15$，$\lambda=2.4972$. 可验证条件(4.1.59)与(4.1.67)均满足.

若取 $\psi(t)=\mathrm{e}^{-t}$，则 $\rho=\pi=\mathrm{e}^{0.2}$，$\phi=1$；方程(4.1.60a)与(4.1.65)分别为

$$5.8967\mathrm{e}^{0.2\varepsilon}+\varepsilon(1+0.4236\mathrm{e}^{0.1\varepsilon})^2=6.627,$$

$$6.1467\mathrm{e}^{0.2\varepsilon}+\varepsilon(1+0.4236\mathrm{e}^{0.1\varepsilon})^2=6.627.$$

二式的解分别为 $\varepsilon=0.2240$ 与 $\varepsilon=0.1459$，可见前者略佳. 若取 $\psi(t)=(1+t)^{-1}$，则 $\rho=1.25$，$\pi=1=\phi$；方程(4.1.60a)与(4.1.65)分别为

$$5.8967\times1.25^{\varepsilon}+\varepsilon(1+0.4236\times1.25^{\varepsilon/2})^2=6.627,$$

$$6.15\times1.25^{\varepsilon}+\varepsilon(1+0.4236\times1.25^{\varepsilon/2})^2=6.6303.$$

二式的解分别为 0.2147 与 0.1395，亦以前者为佳. 在以上两种情况下 $\ln\kappa^{-2}/\ln\rho$ 均大于 ε，故由推论 4.1.26 得，方程(4.1.64)的解 $x(t)$ 满足：

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\mathrm{E}|x(t)|^2}{t}\leqslant-0.2240,\quad\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\ln\mathrm{E}|x(t)|^2}{\ln t}\leqslant-0.2147.$$

后一结果显然不足取.

在定理 4.1.25 中,关键的条件是 $\lambda_{\max}(H) \leqslant -\lambda$,且通常 $\lambda > 0$,因而 H 是负定的. 将稳定性条件集中体现于某个矩阵 H 的负定性,这一思想在稳定性理论中颇具普通价值,因而值得形成某些更形式化的方法. 首先作记号约定:

$$\begin{cases} A > 0 \Leftrightarrow A \text{ 正定}, A \geqslant 0 \Leftrightarrow A \text{ 半正定}, \\ A > B \Leftrightarrow A - B > 0 \Leftrightarrow B < A, A \geqslant B \text{ 仿此}. \end{cases} \tag{4.1.68}$$

引理 4.1.28(Schur) 对于适当阶数的矩阵 A,B,C, 以下条件互相等价:

(i) $M = \begin{bmatrix} A & C \\ C^{\mathrm{T}} & -B \end{bmatrix} < 0$;

(ii) $N = \begin{bmatrix} B & C^{\mathrm{T}} \\ C & -A \end{bmatrix} > 0$;

(iii) $B > 0, A + CB^{-1}C^{\mathrm{T}} < 0$.

证 直接观察看出,可用合同变换将 M 变为 $-N$ 与 $\operatorname{diag}(A + CB^{-1}C^{\mathrm{T}}, -B)$,由此立得所要结论. □

注意到 $A \leqslant 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$,有 $A - \varepsilon I < 0$,用一适当极限过程,可将引理 4.1.28 推广到分别以≤与≥取代<与>的情况,只是 B 可逆仍应预先假定.

在稳定性问题中运用一定的矩阵不等式,已经成为一种标准的方法,以致形成了 **LMI 方法**(linear matrix inequality approach)这一术语. 下面就是应用 LMI 方法的一个简单例子.

定理 4.1.29 设 $\kappa = \|K\| < 1$; 存在矩阵 $P,Q,C,D,\gamma \in (0, \ln \kappa^{-2}/\ln \rho]$ 与函数 $\zeta(t)$,使得 $P > 0, Q \geqslant 0, \zeta(t)\psi^{-\gamma}(t) \in L^1(\mathbf{R}_+)$,且以下条件满足:

$$|\sqrt{P}G(t,x,y)|^2 \leqslant \zeta(t) + |\sqrt{P}Cx|^2 + |\sqrt{P}Dy|^2, \quad t \geqslant 0, x, y \in \mathbf{R}^d, \tag{4.1.69}$$

$$H = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & C^{\mathrm{T}} & 0 & I \\ N_3 & N_4 & 0 & D^{\mathrm{T}} & -K^{\mathrm{T}} \\ C & 0 & -P^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 & -P^{-1} & 0 \\ I & -K & 0 & 0 & -(\gamma\phi P)^{-1} \end{bmatrix} \leqslant 0, \tag{4.1.70}$$

其中 $\sqrt{P}$ 是 P 的正平方根(即 $R \triangleq \sqrt{P} \geqslant 0, R^2 = P$),

$$\begin{cases} N_1 = -PA - A^{\mathrm{T}}P + (1 + \gamma\phi\tau)Q, \quad N_2 = N_3^{\mathrm{T}} = PB + A^{\mathrm{T}}PK, \\ N_4 = -K^{\mathrm{T}}PB - B^{\mathrm{T}}PK - \eta\rho^{-\gamma}Q, \end{cases} \tag{4.1.71}$$

ρ,ϕ 依式(4.1.4). 则方程(4.1.45)的零解均方 ψ^{γ} 稳定.

证 取定方程(4.1.45)的一个解 $x(t) = x(t,\xi)$. 如同定理 4.1.22 之证,只需指明 $\tilde{h}(t) \triangleq \psi^{-\gamma}(t)\mathrm{E}|\tilde{x}(t)|^2$ 有界. 仿照式(4.1.50),令

$$V(t,x) = x^{\mathrm{T}}Px + \int_{t-\delta(t)}^{t} \psi^{\gamma}(t)\psi^{-\gamma}(s)x^{\mathrm{T}}(s)Qx(s)\mathrm{d}s, \qquad (4.1.72)$$

则 $p|x|^2 \leqslant V(t,x), p = \lambda_{\min}(P)$. 于是

$$\begin{aligned} p\tilde{h}(t) &\leqslant \mathrm{E}[\psi^{-\gamma}(t)V(t,\tilde{x}(t))] \\ &\leqslant \mathrm{const} + \mathrm{E}\int_0^t \psi^{-\gamma}(s)[LV(s,\tilde{x}(s)) - \gamma\psi_1(s)V(s,\tilde{x}(s))]\mathrm{d}s \\ &\leqslant \mathrm{const} + \mathrm{E}\int_0^t \psi^{-\gamma}(s)[LV(s,\tilde{x}(s)) + \gamma\phi\tilde{x}^{\mathrm{T}}(s)P\tilde{x}(s)]\mathrm{d}s \\ &\quad + \gamma\phi\mathrm{E}\int_0^t \psi^{-\gamma}(s)\mathrm{d}s\int_{s-\delta(s)}^{s} \psi^{\gamma}(s)\psi^{-\gamma}(\theta)Qx(\theta)\mathrm{d}\theta \\ &\leqslant \mathrm{const} + \mathrm{E}\int_0^t \psi^{-\gamma}(s)[LV(s,\tilde{x}(s)) + \gamma\phi\tilde{x}^{\mathrm{T}}(s)P\tilde{x}(s)]\mathrm{d}s \\ &\quad + \gamma\phi\tau\int_{-\tau}^{t} \psi^{-\gamma}(\theta)x^{\mathrm{T}}(\theta)Qx(\theta)\mathrm{d}\theta, \end{aligned}$$

可见只要证

$$W(t) \triangleq LV(t,\tilde{x}(t)) + \gamma\phi\tilde{x}^{\mathrm{T}}(t)P\tilde{x}(t) + \gamma\phi\tau x^{\mathrm{T}}(t)Qx(t) \leqslant \zeta(t). \qquad (4.1.73)$$

为记号简便起见,下面分别以 x,y 记 $x(t),y(t)$. 结合式(4.1.72)与(3.3.45),(3.3.47)有

$$\begin{aligned} W(t) &\leqslant 2(x-Ky)^{\mathrm{T}}P(-Ax+By) + |\sqrt{P}G(t,x,y)|^2 + x^{\mathrm{T}}Qx \\ &\quad - \eta\rho^{-\gamma}y^{\mathrm{T}}Qy + \gamma\phi(x-Ky)^{\mathrm{T}}P(x-Ky) + \gamma\phi\tau x^{\mathrm{T}}Qx \\ &\leqslant x^{\mathrm{T}}(N_1 + C^{\mathrm{T}}PC + \gamma\phi P)x + x^{\mathrm{T}}(N_2 - \gamma\phi PK)y \\ &\quad + y^{\mathrm{T}}(N_3 - \gamma\phi K^{\mathrm{T}}P)x + y^{\mathrm{T}}(N_4 + D^{\mathrm{T}}PD + \gamma\phi K^{\mathrm{T}}PK)y + \zeta(t) \\ &= z^{\mathrm{T}}Mz + \zeta(t), \end{aligned}$$

其中用到式(4.1.69)与(4.1.71), $z = (x,y)$,

$$\begin{aligned} M &= \begin{bmatrix} N_1 + C^{\mathrm{T}}PC + \gamma\phi P & N_2 - \gamma\phi PK \\ N_3 - \gamma\phi K^{\mathrm{T}}P & N_4 + D^{\mathrm{T}}PD + \gamma\phi K^{\mathrm{T}}PK \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \\ N_3 & N_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C^{\mathrm{T}} & 0 & I \\ 0 & D^{\mathrm{T}} & -K^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P & & \\ & P & \\ & & \gamma\phi P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & D \\ I & -K \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

由式(4.1.70)与引理4.1.28 推出 $M \leqslant 0$, 因而式(4.1.73)成立,如所要证. □

若取 $P = I$, 则由定理4.1.29 得

推论4.1.30　设 $\kappa \triangleq \|K\| < 1$; 存在矩阵 $C,D,Q,\gamma \in (0, \ln\kappa^{-2}/\ln\rho]$ 与函数 $\zeta(t)$,使得 $Q \geqslant 0, \zeta(t)\psi^{-\gamma}(t) \in L^1(\mathbf{R}_+)$,且以下条件满足:

$$|G(t,x,y)|^2 \leqslant |Cx|^2 + |Dy|^2 + \zeta(t), \quad t \geqslant 0, x,y \in \mathbf{R}^d, \qquad (4.1.74)$$

$$\begin{bmatrix} (1+\gamma\phi\tau)Q-A-A^{\mathrm{T}} & B+A^{\mathrm{T}}K & C^{\mathrm{T}} & 0 & I \\ B^{\mathrm{T}}+K^{\mathrm{T}}A & -K^{\mathrm{T}}B-B^{\mathrm{T}}K-\eta\,\rho^{-\gamma}Q & 0 & D^{\mathrm{T}} & -K^{\mathrm{T}} \\ C & 0 & -I & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 & -I & 0 \\ I & -K & 0 & 0 & -(\gamma\phi)^{-1}I \end{bmatrix} \leqslant 0, \quad (4.1.75)$$

则方程(4.1.45)的零解均方 ψ^{γ} 稳定. 特别,若 $\zeta(t)\mathrm{e}^{\gamma t}\in L^1(\mathbf{R}_+)$, 条件(4.1.74)满足,且

$$\begin{bmatrix} (1+\gamma\tau)Q-A-A^{\mathrm{T}} & B+A^{\mathrm{T}}K & C^{\mathrm{T}} & 0 & I \\ B^{\mathrm{T}}+K^{\mathrm{T}}A & -K^{\mathrm{T}}B-B^{\mathrm{T}}K-\eta\mathrm{e}^{-\gamma\tau}Q & 0 & D^{\mathrm{T}} & -K^{\mathrm{T}} \\ C & 0 & -I & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 & -I & 0 \\ I & -K & 0 & 0 & -\gamma^{-1}I \end{bmatrix} \leqslant 0, \quad (4.1.75)'$$

则方程(4.1.45)的零解均方指数稳定与 a. s. 指数稳定.

在定理4.1.29 中,Liapunov 指数 γ 已含于矩阵 H 中,这是其优点,但也是一个缺点:应如何选择 γ 才能使 $H\leqslant 0$？要回避这一困难,有时不免又要回到定理4.1.25 的方法. 下面的结果可以说兼用了定理4.1.25 与定理4.1.29 的方法,它用于较(4.1.45)稍一般的方程

$$\mathrm{d}[x(t)-Ky(t)] = [-Ax(t)+Bg(y(t))]\mathrm{d}t + G(t,x(t),y(t))\mathrm{d}w(t), \quad (4.1.76)$$

其中函数 $g:\mathbf{R}^d\to\mathbf{R}^d$ 满足条件

$$|g(y)|^2 \leqslant |My|^2, \quad y\in\mathbf{R}^d. \quad (4.1.77)$$

改用稍异于(4.1.72)的 Liapunov 函数

$$V(t,x) = x^{\mathrm{T}}Px + \int_{t-\delta(t)}^{t} x^{\mathrm{T}}(s)Qx(s)\,\mathrm{d}s, \quad (4.1.78)$$

依然约定 $x = x(t), y = y(t)$, 则用条件(4.1.74)与(4.1.77)得

$$\begin{aligned} LV(t,\tilde{x}(t)) &\leqslant 2(x-Ky)^{\mathrm{T}}P[-Ax+Bg(y)] + \|P\|\,|G(t,x,y)|^2 + x^{\mathrm{T}}Qx - \eta y^{\mathrm{T}}Qy \\ &\leqslant -2x^{\mathrm{T}}PAx + 2y^{\mathrm{T}}K^{\mathrm{T}}PAx + \sigma|B^{\mathrm{T}}Px|^2 + \sigma^{-1}|My|^2 + \delta|B^{\mathrm{T}}PKy|^2 \\ &\quad + \delta^{-1}|My|^2 + \|P\|[|Cx|^2 + |Dy|^2 + \zeta(t)] + x^{\mathrm{T}}Qx - \eta y^{\mathrm{T}}Qy \\ &= z^{\mathrm{T}}Hz + \|P\|\zeta(t), \end{aligned} \quad (4.1.79)$$

其中 $\sigma,\delta>0, z=(x,y)$,

$$H = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \\ N_2^{\mathrm{T}} & N_3 \end{bmatrix}, \quad (4.1.80)$$

$$\begin{cases} N_1 = Q - PA - A^{\mathrm{T}}P + \sigma PBB^{\mathrm{T}}P + \|P\|C^{\mathrm{T}}C, \quad N_2 = A^{\mathrm{T}}PK, \\ N_3 = (\sigma^{-1}+\delta^{-1})M^{\mathrm{T}}M + \delta K^{\mathrm{T}}PBB^{\mathrm{T}}PK + \|P\|D^{\mathrm{T}}D - \eta Q. \end{cases} \quad (4.1.81)$$

利用以上分析,可形成以下结果.

定理 4.1.31　设 $\kappa = \|K\| < 1$；存在矩阵 P,Q,C,D,M，其中 $P>0,Q\geqslant 0$；存在正常数 $\alpha,\sigma,\delta,\lambda$ 与可测函数 $\zeta(t)$，使得 $\zeta(t)\psi^{-\alpha}(t)\in L^1(\mathbf{R}_+)$，条件(4.1.74)与(4.1.77)满足且 $\lambda_{\max}(H)\leqslant -\lambda$，$H$ 依式(4.1.80)．则方程(4.1.76)的零解均方 ψ^γ 稳定，其中 $\gamma = \alpha\wedge\varepsilon\wedge(\ln\kappa^{-2}/\ln\rho)$，$\varepsilon$ 是以下方程的唯一正解：

$$\|Q\|(\rho^\varepsilon - 1) + \varepsilon\phi\|P\|(1-\kappa)^{-1} = \lambda. \qquad (\rho,\phi \text{ 依(4.1.4)}) \qquad (4.1.82)$$

证　证法类似于定理 4.1.22，不妨写得简略些．易见方程(4.1.82)有唯一正解 ε．取定方程(4.1.76)的一个解 $x(t)=x(t,\xi)$，如通常一样设定 $h(t)$ 与 $\tilde{h}(t)$，则有

$$\tilde{h}(t)\leqslant(1-\kappa)^{-1}h(t)+\kappa\psi^{-\gamma}(t)\mathrm{E}|y(t)|^2,\quad t\geqslant 0. \qquad (4.1.83)$$

只需证 $\tilde{h}(t)$ 有界．设 V 依式(4.1.78)，$p=\lambda_{\min}(P)$，则

$$\begin{aligned}
p\tilde{h}(t) &\leqslant \text{const} + \mathrm{E}\int_0^t \psi^{-\gamma}(s)[LV(s,\tilde{x}(s)) - \gamma\psi_1(s)V(s,\tilde{x}(s))]\mathrm{d}s \\
&\leqslant \text{const} + \mathrm{E}\int_0^t \psi^{-\gamma}(s)\Big[-\lambda|x(s)|^2 - \lambda|y(s)|^2 + \|P\|\zeta(s) \\
&\quad + \gamma\phi\|P\||\tilde{x}(s)|^2 - \gamma\psi_1(s)\int_{s-\delta(s)}^s x^{\mathrm{T}}(\theta)Qx(\theta)\mathrm{d}\theta\Big]\mathrm{d}s \\
&\leqslant \text{const} + \left(\frac{\gamma\phi\|P\|}{1-\kappa} - \lambda\right)\int_0^t h(s)\mathrm{d}s \\
&\quad + (\gamma\phi\kappa\|P\| - \lambda)\int_0^t \psi^{-\gamma}(s)\mathrm{E}|y(s)|^2\mathrm{d}s \\
&\quad + \|Q\|\int_0^t \mathrm{E}|x(\theta)|^2\mathrm{d}\theta\int_\theta^{\theta+\tau}\mathrm{d}\psi^{-\gamma}(s) \\
&\leqslant \text{const} + \left[\|Q\|(\rho^\gamma - 1) + \frac{\gamma\phi\|P\|}{1-\kappa} - \lambda\right]\int_0^t h(s)\mathrm{d}s \\
&\quad + (\gamma\phi\kappa\|P\| - \lambda)\int_0^t \psi^{-\gamma}(s)\mathrm{E}|y(s)|^2\mathrm{d}s \\
&\leqslant \text{const},
\end{aligned}$$

最后一步用到式(4.1.82)，注意由式(4.1.82)推出 $\gamma\phi\kappa\|P\| - \lambda\leqslant 0$．故如所要证．□

特别取 $g(y)\equiv y, P=M=I, C^{\mathrm{T}}C=\mu I, D^{\mathrm{T}}D=\nu I, \sigma=\delta=1$ 得到

推论 4.1.32　设 $\kappa=\|K\|<1$；存在矩阵 $Q\geqslant 0$，常数 $\alpha>0,\mu,\nu\geqslant 0,\lambda>0$ 与可测函数 $\zeta(t)$，使得 $\zeta(t)\psi^{-\alpha}(t)\in L^1(\mathbf{R}_+)$，条件(4.1.58)满足且 $\lambda_{\max}(H)\leqslant-\lambda$，

$$H=\begin{bmatrix} Q-A-A^{\mathrm{T}}+BB^{\mathrm{T}}+\mu I & A^{\mathrm{T}}K \\ K^{\mathrm{T}}A & (2+\nu)I+K^{\mathrm{T}}BB^{\mathrm{T}}K-\eta Q\end{bmatrix}.$$

则方程(4.1.45)的零解均方 ψ^γ 稳定，其中 $\gamma=\alpha\wedge\varepsilon\wedge(\ln\kappa^{-2}/\ln\rho)$，$\varepsilon$ 是以下方程的唯一正解：

$$\|Q\|(\rho^\varepsilon-1)+\varepsilon\phi(1-\kappa)^{-1}=\lambda.$$

4.1.4 随机渐近稳定性

注意到，在 2.3.5 节中研究过的随机稳定性，此后尚未作进一步的考虑. 现在是回到这一问题的时候了. 此处面临双重的推广：一方面要考虑更一般的方程 (4.1.1)，同时要介入一个已证明很起作用的参照函数 ψ. 这些新因素都不免增加问题的复杂性，但 2.3.5 节中的基本思路依然可用.

首先拓广由定义 2.3.1(i)，(ii)所给出的概念.

定义 4.1.33 设 $\gamma \geqslant 0, x(t,\xi)(\xi \in C^b_{\mathscr{F}_0}(\Omega, C))$ 记方程(4.1.1)的解.

(i) 若 $\forall r > 0, \varepsilon \in (0,1), \exists \delta > 0$，使当 $\|\xi\| < \delta$ 时恒有

$$P(|x(t,\xi)| < r\psi^{\gamma}(t)(\forall t \geqslant -\tau)) \geqslant 1 - \varepsilon, \tag{4.1.84}$$

则称方程(4.1.1)的零解 ψ^{γ} 随机稳定.

(ii) 设方程(4.1.1)的零解 ψ^{γ} 随机稳定，$\forall \varepsilon \in (0,1), \exists \delta > 0$，当 $\|\xi\| < \delta$ 时有

$$P\left(\lim_{t\to\infty} \psi^{-\gamma}(t) x(t,\xi) = 0\right) \geqslant 1 - \varepsilon, \tag{4.1.85}$$

则称方程(4.1.1)的零解 ψ^{γ} 随机渐近稳定.

若仿照式(4.1.34)，令 $x(t) = x(t,\xi)$，

$$\begin{cases} h(t) = \psi^{-\gamma}(t)\,|x(t)|, & H(t) = \sup\limits_{-\tau\leqslant s\leqslant t} h(s), \\ \tilde{h}(t) = \psi^{-\gamma}(t)\,|\tilde{x}(t)|, & \tilde{H}(t) = \sup\limits_{0\leqslant s\leqslant t} \tilde{h}(s), \end{cases} \tag{4.1.86}$$

则式(4.1.84)与(4.1.85)可分别改写为

$$P(h(t) < r(\forall t \geqslant -\tau)) \geqslant 1 - \varepsilon, \tag{4.1.84$'$}$$

$$P\left(\lim_{t\to\infty} h(t) = 0\right) \geqslant 1 - \varepsilon. \tag{4.1.85$'$}$$

若 $\gamma = 0$，则定义 4.1.33 中的“ψ^{γ}”可删去. 若 $\delta = \infty$，则从式(4.1.85)推出

$$P\left(\lim_{t\to\infty} h(t) = 0\right) = 1 \text{ 或 } h(t) \to 0, \text{a.s.}, \quad t \to \infty,$$

此时得到 ψ^{γ} 全局随机渐近稳定性. 对照定义 4.1.13 容易看出，若 $\gamma > 0$，则方程 (4.1.1) 的零解 a.s. ψ^{γ} 稳定 $\Leftrightarrow \forall \mu \in (0,\gamma)$，方程(4.1.1)的零解 ψ^{μ} 全局随机渐近稳定.

下面建立定理 2.3.16 与定理 2.3.17 的推广.

定理 4.1.34 设存在 $\kappa \in [0,1), \gamma \in [0, \ln \kappa^{-1}/\ln \rho), \eta > 0$ 与 $V(t,x) \in C^{1,2}(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d)$ 及 K 型函数 Φ，使得条件(4.1.8)及以下条件满足：

$$V(t,0) = 0, V(t,x) \geqslant \Phi(\psi^{-\gamma}(t)\,|x|), \quad t \geqslant 0, |x| < \eta, \tag{4.1.87}$$

$$\mathscr{L}V(t,\varphi) \leqslant 0, \quad t \geqslant 0, \varphi \in C, \|\varphi\| < \eta. \tag{4.1.88}$$

则方程(4.1.1)的零解 ψ^{γ} 随机稳定.

证 由 $0 \leqslant \gamma < \ln \kappa^{-1}/\ln \rho$ 推出 $\kappa_1 \triangleq \kappa\rho^{\gamma} \in [0,1)$. 取定 $r > 0, \varepsilon \in (0,1)$，

不妨设 $r < \eta$. 令 $r_1 = r(1-\kappa_1)$,取 $\delta \in (0,r_1)$,使得

$$|x| \leqslant \delta(1+\kappa) \Rightarrow V(0,x) < \varepsilon\Phi(r_1). \tag{4.1.89}$$

取定方程(4.1.1)的解 $x(t) = x(t,\xi)$, $\|\xi\| < \delta$,依式(4.1.86)的记号,只要证式(4.1.84)′. 因当 $\theta \in [-\tau,0]$ 时 $h(\theta) \leqslant \|\xi\| < \delta < r$,故只要证

$$P(h(t) < r(\forall t \geqslant 0)) \geqslant 1-\varepsilon.$$

类似于式(4.1.37),利用条件(4.1.8)易建立

$$H(t) \leqslant (1-\kappa)^{-1}[\|\xi\| \vee \tilde{H}(t)], \quad t \geqslant 0, \tag{4.1.90}$$

其中 $H(t)$ 与 $\tilde{H}(t)$ 依式(4.1.86), $\|\xi\| < \delta < r_1$. 因此 $\tilde{H}(t) < r_1 \Rightarrow H(t) < r$,于是只要证

$$P(\tilde{h}(t) < r_1) \geqslant 1-\varepsilon, \quad \forall t \geqslant 0.$$

类似于定理2.3.16之证,令 $\tau = \inf\{t \geqslant 0: \tilde{h}(t) \geqslant r_1\}$,只要证 $P(\tau \leqslant t) \leqslant \varepsilon(\forall t > 0)$. 取定 $t > 0$,有

$$\begin{aligned}\Phi(r_1)P(\tau \geqslant t) &= \mathrm{E}[I_{\{\tau\leqslant t\}}\Phi(\tilde{h}(\tau))]\\ &\leqslant \mathrm{E}[I_{\{\tau\leqslant t\}}V(\tau,\tilde{x}(\tau))] \qquad (\text{用}(4.1.87))\\ &\leqslant \mathrm{E}V(\tau \wedge t,\tilde{x}(t\wedge\tau))\\ &\leqslant \mathrm{E}V(0,\tilde{x}(0)) + \mathrm{E}\int_0^{t\wedge\tau} LV(s,\tilde{x}(s))\mathrm{d}s\\ &\leqslant \mathrm{E}V(0,\tilde{x}(0)) < \varepsilon\Phi(r_1), \qquad (\text{用}(4.1.88))\end{aligned}$$

最后一步用了(4.1.89),注意 $|\tilde{x}(0)| \leqslant \delta(1+\kappa)$. 故得 $P(\tau \leqslant t) \leqslant \varepsilon$,如所要证. □

定理 4.1.35　设存在 $\kappa \in [0,1)$, $\gamma \in [0,\ln\kappa^{-1}/\ln\rho)$, $\eta > 0$ 与 $V(t,x) \in C^{1,2}(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d)$ 及 K 型函数 $\Phi_i(i=1,2,3)$,使得条件(4.1.8)及以下条件满足:

$$\Phi_1(\psi^{-\gamma}(t)|x|) \leqslant V(t,x) \leqslant \Phi_2(\psi^{-\gamma}(t)|x|), \quad t \geqslant 0, |x| < \eta, \tag{4.1.91}$$

$$\mathscr{L}V(t,\varphi) \leqslant -\Phi_3(\psi^{-\gamma}(t)|\tilde{\varphi}(0)|), \quad t \geqslant 0, \varphi \in C, \|\varphi\| < \eta. \tag{4.1.92}$$

则方程(4.1.1)的零解 ψ^γ 随机渐近稳定. 若条件(4.1.91),(4.1.92)对 $\eta = \infty$ 成立且

$$\lim_{r\to\infty}\inf_{|x|\geqslant r\psi^\gamma(t)} V(t,x) = \infty, \tag{4.1.93}$$

则方程(4.1.1)的零解 ψ^γ 全局随机渐近稳定.

证　取定 $\varepsilon \in (0,1)$. 因条件(4.1.91),(4.1.92)蕴涵了条件(4.1.87),(4.1.88),故对 $r > 0$,有 $\delta > 0$,使当 $\|\xi\| < \delta$ 时,方程(4.1.1)的解 $x(t) = x(t,\xi)$ 满足(参考定理4.1.34之证)

$$P(\tilde{h}(t) < r_1(\forall t \geqslant 0)) \geqslant 1-\varepsilon/4, \tag{4.1.94}$$

其中 $r_1 = r(1-\kappa_1)$, $\kappa_1 = \kappa\rho^\gamma$;不妨设 $r < \eta$, $\delta < r_1$. 今证式(4.1.85)′. 若 $\tilde{h}(t) \to 0$,则由式(4.1.90)推出 $h(t)$ 有界;然后由易见的不等式

$$h(t) \leqslant \tilde{h}(t) + \kappa_1 \sup_{t-\tau\leqslant s\leqslant t} h(s), \quad t \geqslant 0$$

推出

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} h(t) \leqslant (1-\kappa_1)^{-1} \lim_{t\to\infty} \tilde{h}(t) = 0.$$

这表明为证(4.1.85)′只要证 $P(\lim_{t\to\infty} \tilde{h}(t) = 0) \geqslant 1-\varepsilon$；而这又归于证

$$P\left(\overline{\lim_{t\to\infty}} h(t) \leqslant \beta\right) \geqslant 1-\varepsilon, \quad \forall \beta > 0. \tag{4.1.95}$$

取定 $\beta>0$，取 $\alpha \in (0,\beta)$，使 $4\Phi_2(\alpha) < \varepsilon \Phi_1(\beta)$. 令

$$\tau_\alpha = \inf\{t \geqslant 0 : \tilde{h}(t) \leqslant \alpha\}, \quad \tau_r = \inf\{t \geqslant 0 : \tilde{h}(t) \geqslant r_1\}.$$

式(4.1.94)表明 $P(\tau_r = \infty) \geqslant 1-\varepsilon/4$. $\forall t>0$，有

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant \mathrm{E}V(t\wedge\tau_\alpha\wedge\tau_r, \tilde{x}(t\wedge\tau_\alpha\wedge\tau_r)) \\
&= \mathrm{E}V(0,\tilde{x}(0)) + \mathrm{E}\int_0^{t\wedge\tau_\alpha\wedge\tau_r} LV(s,\tilde{x}(s))\mathrm{d}s \\
&\leqslant \mathrm{E}V(0,\tilde{x}(0)) - \mathrm{E}\int_0^{t\wedge\tau_\alpha\wedge\tau_r} \Phi_3(\tilde{h}(s))\mathrm{d}s \qquad (\text{用}(4.1.92)) \\
&\leqslant \mathrm{E}V(0,\tilde{x}(0)) - \Phi_3(\alpha)\mathrm{E}(t\wedge\tau_\alpha\wedge\tau_r) \\
&\leqslant \mathrm{E}V(0,\tilde{x}(0)) - \Phi_3(\alpha)tP(\tau_\alpha\wedge\tau_r \geqslant t).
\end{aligned}$$

这推出 $P(\tau_\alpha\wedge\tau_r \geqslant t) \leqslant \mathrm{E}V(0,\tilde{x}(0))/t\Phi_3(\alpha) \to 0 (t\to\infty)$，因此 $P(\tau_\alpha\wedge\tau_r = \infty) = 0$，从而如定理2.3.17之证有 $P(\tau_\alpha < \infty) \geqslant 1-\varepsilon/4$.

取 $\theta>0$，使 $P(\tau_\alpha<\theta) \geqslant 1-\varepsilon/2$，则必 $P(\tau_\alpha < \theta\wedge\tau_r) \geqslant 1-3\varepsilon/4$. 如同定理2.3.17之证一样定义停时 σ 及 $\tau_\beta = \inf\{t>\sigma : \tilde{h}(t) \geqslant \beta\}$，只要证 $P(\tau_\beta \leqslant t) \leqslant \varepsilon/4 (\forall t \geqslant \theta)$. 取定 $t \geqslant \theta$，则

$$\begin{aligned}
\Phi_1(\beta)P(\tau_\beta \leqslant t) &= \mathrm{E}[I_{\{\tau_\beta\leqslant t\}}\Phi_1(\tilde{h}(\tau_\beta))] \\
&\leqslant \mathrm{E}[I_{\{\tau_\beta\leqslant t\}}V(\tau_\beta,\tilde{x}(\tau_\beta))] \qquad (\text{用}(4.1.91)) \\
&= \mathrm{E}[I_{\{\tau_\beta\leqslant t\}}V(t\wedge\tau_\beta,\tilde{x}(t\wedge\tau_\beta))] \\
&\leqslant \mathrm{E}[I_{\{\tau_\beta\leqslant t\}}V(t\wedge\sigma,\tilde{x}(t\wedge\sigma))] \qquad (\text{用}\sigma\leqslant\tau_\beta\text{与}(4.1.92)) \\
&\leqslant \mathrm{E}[I_{\{\tau_\alpha<\theta\wedge\tau_r\}}V(t\wedge\tau_\alpha,\tilde{x}(t\wedge\tau_\alpha))] \qquad (\sigma=\tau_\alpha) \\
&= \mathrm{E}[I_{\{\tau_\alpha<\theta\wedge\tau_r\}}V(\tau_\alpha,\tilde{x}(\tau_\alpha))] \qquad (\tau_\alpha<\theta\leqslant t) \\
&\leqslant \Phi_2(\alpha) < (\varepsilon/4)\Phi_1(\beta), \qquad (\text{用}(4.1.91))
\end{aligned}$$

这得出 $P(\tau_\beta \leqslant t) < \varepsilon/4$. 于是定理之前一半得证.

现在证定理的后一半. 仍设 $x(t) = x(t,\xi)$ 是方程(4.1.1)的解，只是不限定 $\|\xi\| < \delta$. 由条件(4.1.93)，可取 $r > \|\xi\|$，使得

$$\inf_{t\geqslant 0, |x|\geqslant r_1\psi\gamma(t)} V(t,x) \geqslant \frac{4}{\varepsilon}\mathrm{E}V(0,\tilde{x}(0)), \tag{4.1.96}$$

其中 $r_1 = r(1-\kappa_1)$. $\forall t>0$，有

$$\mathrm{E}V(0,\tilde{x}(0)) \geqslant \mathrm{E}V(t\wedge\tau_r,\tilde{x}(t\wedge\tau_r)) \qquad (\text{用}(4.1.92))$$

$$\geqslant E[I_{\{\tau_r \leqslant t\}} V(\tau_r, \tilde{x}(\tau_r))]$$
$$\geqslant P(\tau_r \leqslant t)(4/\varepsilon) EV(0, \tilde{x}(0)),$$

最后一步用了式(4.1.96)，注意当 $\tau_r \leqslant t$ 时 $|\tilde{x}(\tau_r)| = r_1\psi^\gamma(\tau_r) \geqslant r_1\psi^\gamma(t)$. 因此，当 $EV(0,\tilde{x}(0)) > 0$ 时得 $P(\tau_r \leqslant t) \leqslant \varepsilon/4$，因而 $P(\tau_r < \infty) \leqslant \varepsilon/4$，这与式(4.1.94)相当. 于是重复前段的证明仍可得式(4.1.95)，而由(4.1.95)可推出 $\tilde{h}(t) \to 0$, a.s. $(t \to \infty)$. 若 $EV(0,\tilde{x}(0)) = 0$，则由条件(4.1.92)推出 $EV(t, \tilde{x}(t)) = 0$，从而 $\tilde{h}(t) = 0$, a.s. $(\forall t > 0)$，这同样得 $\tilde{h}(t) \to 0$, a.s. $(t \to \infty)$，于是 $h(t) \to 0$, a.s. $(t \to \infty)$. □

将定理4.1.35用于方程(4.1.3)得到

推论 4.1.36 设存在 $\gamma \geqslant 0, \eta > 0$ 与 $V(t,x) \in C^{1,2}(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d)$ 及 K 型函数 $\Phi_i(i = 1,2,3)$，使得条件(4.1.91)及以下条件满足：

$$\mathscr{L}V(t,x) \leqslant -\Phi_3(\psi^{-\gamma}(t)|x|), \quad t \geqslant 0, |x| < \eta. \tag{4.1.97}$$

则方程(4.1.3)的零解 ψ^γ 随机渐近稳定. 若条件(4.1.91)，(4.1.97)对 $\eta = \infty$ 满足且(4.1.93)成立，则方程(4.1.3)的零解 ψ^γ 全局随机渐近稳定.

若取 $\gamma = 0$，则由推论4.1.36得定理2.3.17.

若取 $V(t,x) = \psi^{-2\gamma}(t)|x|^2$，则条件(4.1.91)与(4.1.93)自动满足(取 $\Phi_1(t) = \Phi_2(t) = t^2$)，而

$$\mathscr{L}V(t,x) = \psi^{-2\gamma}(t)[2x^{\mathrm{T}}f(t,x) + |g(t,x)|^2 - 2\gamma\psi_1(t)|x|^2].$$

若取 $\Phi_3(t) = kt^2, k > 0$，则条件(4.1.97)相当于

$$2x^{\mathrm{T}}f(t,x) + |g(t,x)|^2 \leqslant |x|^2[2\gamma\psi_1(t) - k]. \tag{4.1.97$'$}$$

看一个简单例子.

例 4.1.37 设 $\phi_0 > 0$(ϕ_0 依(4))，$0 < \gamma < 1/2$. 考虑一维非线性方程

$$dx(t) = \psi_1(t)x(t)dt + \sqrt{|\psi_1(t)|}\sin x(t)dw(t). \tag{4.1.98}$$

令 $f(t,x) = x\psi_1(t)$, $g(t,x) = \sqrt{|\psi_1(t)|}\sin x$，则

$$\begin{aligned} &2xf(t,x) + |g(t,x)|^2 - 2\gamma\psi_1(t)x^2 \\ &= 2x^2\psi_1(t) + |\psi_1(t)|\sin^2 x - 2\gamma\psi_1(t)x^2 \\ &\leqslant x^2|\psi_1(t)|(2\gamma - 1) \leqslant -\phi_0(1-2\gamma)x^2, \end{aligned}$$

可见取 $k = \phi_0(1 - 2\gamma)$ 使条件(4.1.97)$'$满足. 于是由推论4.1.36得方程(4.1.98)的零解 ψ^γ 全局随机渐近稳定.

§4.2 有 界 性

粗略地说，有界性系指方程的解被限制在某个有界范围内，这是一个较稳定性为弱的概念，但并不失其独立意义与实际应用价值. 如同稳定性一样，有界性亦有

矩有界与 a. s. 轨道有界之分，二者分别依赖于一定的矩估计与轨道估计，而这两类估计通常都要求助于适当的 Liapunov 函数，这就不免要借鉴稳定性理论的方法. 因此不必惊奇，本节的基本思路与处理模式与上节有很大的类似性，充分注意到这种类似性，对于理解本节的内容是关键的.

参照 §4.1 中的思路，本节首先针对一般 NSFDE：

$$d[x(t)-u(x_t)]=f(t,x_t)dt+g(t,x_t)dw(t) \tag{4.2.1}$$

及其特例

$$dx(t)=f(t,x_t)dt+g(t,x_t)dw(t), \tag{4.2.2}$$

$$dx(t)=f(t,x(t))dt+g(t,x(t))dw(t), \tag{4.2.3}$$

依次考虑其解的矩有界性与 a. s. 轨道有界性；然后考虑更特殊的 SDDE. 对于方程 (4.2.1) ~ (4.2.3)，全部沿用 §4.1 中的设定与记号，只是不假定它们有零解.

如同稳定性一样，下面考虑的有界性也是相对于某个作为比较标准的函数 $\psi(t)$ 而言的. 有界性概念的这种拓广无疑是必要的，它为许多实际应用的需要所支撑. 仍设 $0<\psi(t)\in C^1[-\tau,\infty)$，$\psi(0)=1$，$\psi_1(t)=\psi'(t)/\psi(t)$. 但与 §4.1 中不同，现在设 $\psi'(t)>0$，$\psi(\infty)=\infty$. 正是这一差别造成了本节与上节在方法与结果上均有所不同，并非能完全对应. 类似于(4.1.4)，约定

$$\begin{cases}\pi=\inf\limits_{t\geq 0}\dfrac{\psi(t-\tau)}{\psi(t)}>0, & \rho=\sup\limits_{t\geq 0}\dfrac{\psi(t-\tau)}{\psi(t)},\\ \phi=\inf\limits_{t\geq 0}\psi_1(t), & \phi_0=\sup\limits_{t\geq 0}\psi_1(t)<\infty,\end{cases} \tag{4.2.4}$$

必定 $\phi_0>0$，$\rho<1$(除非 $\tau=0$). 函数 $\psi(t)$ 的几种常用选择是

(i) $\psi(t)=e^t$，$\rho=\pi=e^{-\tau}$，$\psi_1(t)\equiv 1=\phi=\phi_0$.

(ii) $\psi(t)=1+\sigma t\,(0<\sigma<1/\tau)$，$\pi=1-\sigma\tau$，$\rho=1$，$\phi=0$，$\phi_0=\sigma$.

亦可考虑其他选择，例如 $\psi(t)=\ln(e+\sigma t)\,(0<\sigma<1/\tau)$.

4.2.1 矩有界性

首先仿照定义 4.1.1 给出以下定义.

定义 4.2.1 设 $p>0$，$\gamma\geq 0$. 若方程(4.2.1)的解 $x(t,\xi)$ 恒满足

$$\varlimsup_{t\to\infty}\frac{\ln E|x(t,\xi)|^p}{\ln\psi(t)}\leq\gamma, \tag{4.2.5}$$

则称方程(4.2.1)的解 p **阶矩** ψ^γ **有界** . 均方 ψ^γ 有界、p 阶矩指数有界与 p 阶矩多项式有界的意义自明.

条件(4.2.5)显然等价于

$$\sup_{t\geq 0}\psi^{-\mu}(t)E|x(t,\xi)|^p<\infty,\quad \forall\mu>\gamma. \tag{4.2.5$'$}$$

通常将条件(4.2.5)$'$代以稍强的条件

$$E|x(t,\xi)|^p\leq\beta\,\psi^\gamma(t),\quad t\geq 0, \tag{4.2.6}$$

其中 $\beta > 0$ 与 t 无关（但一般与 γ,ξ 有关）. 在判定 ψ^γ 有界时尽可能准确地求出 β 也是有意义的. 其次注意到，β 与 γ 愈小，形如(4.2.6)的估计就愈好. 与稳定性问题不同，现在不仅不排除 $\gamma = 0$，而且这恰好是我们特别关注的一种情况. 当式(4.2.6)对 $\gamma = 0$ 恒成立时，就称方程(4.2.1)的解 p **阶矩有界**；均方有界的意义自明.

以下结果恰对应于定理 4.1.2.

定理 4.2.2　设 $p \geqslant 1$；存在常数 $c_1,c_2 > 0,\gamma \geqslant 0,\kappa \in [0,1)$ 与 $V(t,x) \in C^{1,2}(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d)$，可测函数 $\zeta(t)$，使得 $\zeta(t)\psi^{-\gamma}(t) \in L^1(\mathbf{R}_+)$，且以下条件满足（形式上它们重合于(4.1.8)～(4.1.10)）：

$$\mathrm{E}|u(\varphi)|^p \leqslant \kappa^p \|\varphi\|_0^p, \quad \varphi \in L^p_{\mathscr{F}}(\Omega,C), \tag{4.2.7}$$

$$c_1|x|^p \leqslant V(t,x) \leqslant c_2|x|^p, \quad t \geqslant 0, x \in \mathbf{R}^d, \tag{4.2.8}$$

$$\mathscr{L}V(t,\varphi) \leqslant \zeta(t) + \gamma\psi_1(t)V(t,\tilde{\varphi}(0)), \quad t \geqslant 0, \varphi \in C, \tag{4.2.9}$$

其中 $\mathscr{L}V(t,\varphi)$ 与 $\tilde{\varphi}(0)$ 依(3.3.17). 则方程(4.2.1)的解 p 阶矩 ψ^γ 有界，且成立

$$\begin{cases} c_1\mathrm{E}|x(t,\xi)|^p \leqslant \left[\beta c_1\|\xi\|_0^p + (1-\kappa)^{-p}\|\zeta\psi^{-\gamma}\|_1\right]\psi^\gamma(t), \ t \geqslant 0, \\ \beta = \dfrac{1}{\psi^\gamma(-\tau)(1-\kappa)} \vee \dfrac{c_2}{c_1}\Big(\dfrac{1+\kappa}{1-\kappa}\Big)^p. \end{cases} \tag{4.2.10}$$

证　如同定理 4.1.2 之证，不妨设 $p > 1, \kappa \in (0,1)$. 取定方程(4.2.1)的解 $x(t) = x(t,\xi)$，沿用(4.1.7)中的记号，只要证

$$c_1 h(t) \leqslant \beta c_1\|\xi\|_0^p + (1-\kappa)^{-p}\|\zeta\psi^{-\gamma}\|_1.$$

类似于定理 4.1.2 之证有

$$\begin{aligned} h(t) &\leqslant (1-\kappa)^{1-p}\tilde{h}(t) + \psi^{-\gamma}(t)\kappa\|x_t\|_0^p \\ &\leqslant (1-\kappa)^{1-p}\widetilde{H}(t) + \kappa H(t). \end{aligned}$$

于是

$$H(t) \leqslant \left[\frac{\|\xi\|_0^p}{\psi^\gamma(-\tau)} \vee \frac{\widetilde{H}(t)}{(1-\kappa)^{p-1}}\right] + \kappa H(t), \quad t \geqslant 0.$$

这就得到关键的不等式（对照(4.1.13)）

$$H(t) \leqslant \frac{\|\xi\|_0^p}{\psi^\gamma(-\tau)(1-\kappa)} \vee \frac{\widetilde{H}(t)}{(1-\kappa)^p}, \quad t \geqslant 0. \tag{4.2.11}$$

因如同定理 4.1.2 之证，用条件(4.2.8)，(4.2.9)可得

$$c_1\tilde{h}(t) \leqslant c_2(1+\kappa)^p\|\xi\|_0^p + \|\zeta\psi^{-\gamma}\|_1,$$

故有

$$\widetilde{H}(t) \leqslant (c_2/c_1)(1+\kappa)^p\|\xi\|_0^p + c_1^{-1}\|\zeta\psi^{-\gamma}\|_1, \quad t \geqslant 0.$$

以此代入式(4.2.11)，即得所要证的不等式(4.2.10). □

容易注意到式(4.2.11)与(4.1.13)的证明之差别，这正是 $\psi(t)$ 的增减性不

同所致.这一差别也就造成了估计式(4.2.10)与(4.1.11)并不完全对应.类似于(4.1.13),式(4.2.11)仅依据条件(4.2.7),而与条件(4.2.8),(4.2.9)无关,这是今后应用式(4.2.11)时需注意的.

定理4.2.2固然简单,但它还是蕴涵了一些有用的推论.例如取 $\gamma=0$,由条件(4.2.7),(4.2.8)与 $\mathscr{L}V(t,\varphi)\leqslant 0$ 推出

$$\mathrm{E}|x(t,\xi)|^p\leqslant\frac{c_2}{c_1}\Big(\frac{1+\kappa}{1-\kappa}\Big)^p\|\xi\|_0^p,\quad t\geqslant 0.$$

若将定理4.2.2用于方程(4.2.2),则应取 $\kappa=0$,且不必用条件(4.2.7),也只需设 $p>0$,而式(4.2.10)简化为(取 $\zeta(t)\equiv 0$)

$$\mathrm{E}|x(t,\xi)|^p\leqslant[\psi^{-\gamma}(-\tau)\vee(c_2/c_1)]\|\xi\|_0^p\psi^\gamma(t),\quad t\geqslant 0.$$

当取 $V=|x|^p$ 时上式进一步简化为

$$\mathrm{E}|x(t,\xi)|^p\leqslant\|\xi\|_0^p[\psi(t)/\psi(-\tau)]^\gamma,\quad t\geqslant 0.$$

若将定理4.2.2用于方程(4.2.3),则条件(4.2.9)(取 $\zeta(t)\equiv 0$)可写成 $\alpha\leqslant\gamma\psi_1(t)$,$\alpha$ 依(2.3.31).这就由定理4.2.2得到

推论4.2.3 设 $p>0$,存在 $V(t,x)\in C^{1,2}(\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^d)$ 与正常数 c_1,c_2,γ,使条件(4.2.8)及以下条件之一满足:

$$\begin{cases}\alpha\leqslant\gamma/(1+t), & (4.2.12\mathrm{a})\\ \alpha\leqslant\gamma, & (4.2.12\mathrm{b})\\ \alpha\leqslant 0, & (4.2.12\mathrm{c})\end{cases}$$

其中 $\alpha=\mathscr{L}V(t,x)/V(t,x)$.则方程(4.2.3)的解 $x(t,x_0)$ $(x_0\in\mathbf{R}^d)$ 分别满足:

$$\mathrm{E}|x(t,x_0)|^p\leqslant\begin{cases}(c_2/c_1)|x_0|^p(1+t)^\gamma, & \text{若(4.2.12a)满足},\\ (c_2/c_1)|x_0|^p\mathrm{e}^{\gamma t}, & \text{若(4.2.12b)满足},\\ (c_2/c_1)|x_0|^p, & \text{若(4.2.12c)满足}.\end{cases}$$

$\mathscr{L}V(t,x)\leqslant 0$ 这一条件或许会使你联想到定理2.3.16,它能推出随机稳定性吗?对此,不应忽略一关键之点:本节中并未预设方程有零解.

现在对有界性建立一个 Razumikhin 型定理,这是一个真正有趣的结果.

定理4.2.4 设 $p\geqslant 1$;存在常数 $c_1,c_2>0,\kappa\in[0,1),q\geqslant(c_2/c_1)(1-\kappa)^{-p}$,$\gamma\geqslant 0$ 与 $V(t,x)\in C^{1,2}([-\tau,\infty)\times\mathbf{R}^d)$,$\zeta(t)\in C(\mathbf{R}_+)$,使得 $\zeta(t)\psi^{-\gamma}(t)\in L^1(\mathbf{R}_+)$,且条件(7),(8)及以下条件满足:

$$\begin{cases}\varphi\in L^p_{\mathscr{F}_t}(\Omega,C),\mathrm{E}V(t+\theta,\varphi(\theta))\leqslant q\mathrm{E}V(t,\tilde{\varphi}(0)),\quad\forall\theta\in[-\tau,0]\\ \Rightarrow\mathrm{E}\mathscr{L}V(t,\varphi)\leqslant\zeta(t)+\gamma\psi_1(t)\mathrm{E}V(t,\tilde{\varphi}(0)),\quad t\geqslant 0.\end{cases}\tag{4.2.13}$$

则方程(1)的解 p 阶矩 ψ^γ 有界,且式(4.2.10)成立.

证 任取方程(4.2.1)的一个解 $x(t)=x(t,\xi)$ 与 $\mu>\gamma$,以 μ 代 γ 依(4.1.7)定义 $h(t)$ 与 $\tilde{h}(t)$,只要证

$$c_1\tilde{h}(t) \leqslant \beta c_1 \|\xi\|_0^p(1-\kappa)^p + \int_0^t \zeta(s)\psi^{-\mu}(s)\mathrm{d}s, \quad t \geqslant 0$$

(参考定理4.1.4之证). 为此只要证

$$W(t) \triangleq \psi^{-\mu}(t)\mathrm{E}V(t,\tilde{x}(t)) - \int_0^t \zeta(s)\psi^{-\mu}(s)\mathrm{d}s$$

$$\leqslant \beta c_1 \|\xi\|_0^p(1-\kappa)^p \triangleq \beta_1, \quad t \geqslant 0.$$

易见 $W(0) \leqslant \beta_1$. 若存在最小的 $r \in \mathbf{R}_+$, 使在 $[0,r]$ 上 $W(t) \leqslant \beta_1$, 则 $W(r) = \beta_1$, 且(用(4.2.11))

$$h(t) \leqslant \beta \|\xi\|_0^p + \frac{1}{c_1(1-\kappa)^p}\int_0^t \zeta(s)\psi^{-\mu}(s)\mathrm{d}s, \quad 0 \leqslant t \leqslant r.$$

若 $0 \leqslant t \in [r-\tau, r]$, 则

$$\begin{aligned}\mathrm{E}V(t,x(t)) &\leqslant c_2\psi^{\mu}(t)\left[\beta\|\xi\|_0^p + \frac{1}{c_1(1-\kappa)^p}\int_0^t \xi(s)\psi^{-\mu}(s)\mathrm{d}s\right] \\ &\leqslant q\,\psi^{\mu}(t)\left[W(r) + \int_0^r \zeta(s)\psi^{-\mu}(s)\mathrm{d}s\right] \\ &\leqslant q\mathrm{E}V(r,\tilde{x}(r)).\end{aligned}$$

当 $r-\tau \leqslant t < 0$ 时同样可验证 $\mathrm{E}V(t,x(t)) \leqslant q\mathrm{E}V(r,\tilde{x}(r))$. 于是可对 $\varphi = x_r$ 应用条件(4.2.13)得

$$\begin{aligned}\mathrm{E}LV(r,\tilde{x}(r)) &\leqslant \zeta(r) + \gamma\psi_1(r)\mathrm{E}V(r,\tilde{x}(r)) \\ &< \zeta(r) + \mu\psi_1(r)\mathrm{E}V(r,\tilde{x}(r)),\end{aligned}$$

这就可如同定理4.1.4之证一样完成证明. □

注 定理4.2.4与4.2.2的结论一致,而条件(4.2.13)则弱于条件(4.2.9).

取 $V = |x|^p, \psi(t) = \mathrm{e}^t$ 或 $\psi(t) = 1 + \sigma t (0 < \sigma < 1/\tau)$, 由定理4.2.4得

推论4.2.5 设 $p \geqslant 1, V = |x|^p, \zeta(t) \in C(\mathbf{R}_+)$, $\kappa \in [0,1)$ 使条件(4.2.7)满足, $q \geqslant (1-\kappa)^{-p}, \gamma \geqslant 0$.

(i) 若 $\zeta(t)\mathrm{e}^{-\gamma t} \in L^1(\mathbf{R}_+)$ 且以下条件满足:

$$\|\varphi\|_0^p \leqslant q\mathrm{E}|\tilde{\varphi}(0)|^p \Rightarrow \mathrm{E}\mathscr{L}V(t,\varphi) \leqslant \zeta(t) + \gamma\mathrm{E}|\tilde{\varphi}(0)|^p, \quad \varphi \in L^p_{\mathscr{F}_t}(\Omega, C),$$

则方程(4.2.1)的解 p 阶矩指数有界,且成立

$$\mathrm{E}|x(t,\xi)|^p \leqslant \mathrm{e}^{\gamma t}\left\{\|\xi\|_0^p\left[\frac{\mathrm{e}^{\gamma\tau}}{1-\kappa} \vee \left(\frac{1+\kappa}{1-\kappa}\right)^p\right] + \frac{\|\zeta(t)\mathrm{e}^{-\gamma t}\|_1}{(1-\kappa)^p}\right\}, \quad t \geqslant 0.$$

(ii) 若存在 $\sigma \in (0,1/\tau)$, 使 $\zeta(t)(1+\sigma t)^{-\gamma} \in L^1(\mathbf{R}_+)$ 且以下条件满足:

$$\|\varphi\|_0^p \leqslant q\mathrm{E}|\tilde{\varphi}(0)|^p (\varphi \in L^p_{\mathscr{F}}(\Omega, C))$$

$$\Rightarrow \mathrm{E}\mathscr{L}V(t,\varphi) \leqslant \zeta(t) + \gamma\sigma(1+\sigma t)^{-1}\mathrm{E}|\tilde{\varphi}(0)|^p,$$

则方程(4.2.1)的解 p 阶矩多项式有界,且成立

$$\mathrm{E}|x(t,\xi)|^p \leqslant (1+\sigma t)^{\gamma}\left\{\|\xi\|_0^p\left[\frac{1}{(1-\sigma\tau)^{\gamma}(1-\kappa)} \vee \left(\frac{1+\kappa}{1-\kappa}\right)^p\right]\right.$$

$$+\frac{\|\zeta(t)(1+\sigma t)^{-\gamma}\|_1}{(1-\kappa)^p}\Bigg\},\quad t\geqslant 0. \tag{4.2.14}$$

更便于应用的还是对应于定理4.1.6的以下结果.

定理4.2.6 设$p\geqslant 1,\zeta(t)\in C(\mathbf{R}_+)$；存在常数$\lambda_0,\lambda_1$及$\kappa\in[0,1),\gamma=(1-\kappa)^{-p}(\lambda_0^++\lambda_1^+)$，使得$\zeta(t)\psi^{-\gamma}(t)\in L^1(\mathbf{R}_+)$，且条件(4.2.7)及以下条件满足:

$$\mathrm{E}\mathscr{L}V(t,\varphi)\leqslant\zeta(t)+\psi_1(t)[\lambda_0\mathrm{E}|\varphi(0)|^p+\lambda_1\|\varphi\|_0^p], \tag{4.2.15}$$

其中$V=|x|^p,\varphi\in L^p_{\mathscr{F}}(\Omega,C),t\geqslant 0$. 则方程(4.2.1)的解$p$阶矩$\psi^\gamma$有界,且取$c_1=c_2=1$使式(4.2.10)成立.

证 只要说明条件(4.2.15)推出条件(4.2.13). 取$q=(1-\kappa)^{-p},\varphi\in L^p_{\mathscr{F}}(\Omega,C)$，令$h=\mathrm{E}|\tilde{\varphi}(0)|^p$，设$\|\varphi\|_0^p\leqslant qh$,今要证$\lambda_0\mathrm{E}|\varphi(0)|^p+\lambda_1\|\varphi\|_0^p\leqslant\gamma h$. 因

$$\begin{aligned}\mathrm{E}|\varphi(0)|^p&\leqslant(1-\kappa)^{1-p}h+\kappa^{1-p}\kappa^p\|\varphi\|_0^p\\&\leqslant qh(1-\kappa)+\kappa qh=qh,\end{aligned}$$

故

$$\lambda_0\mathrm{E}|\varphi(0)|^p+\lambda_1\|\varphi\|_0^p\leqslant(\lambda_0^++\lambda_1^+)qh=\gamma h,$$

如所要证. □

特别,取$p=2$从定理4.2.6得到

推论4.2.7 设存在常数$\lambda_0,\lambda_1,\kappa\in[0,1)$，使条件(4.2.7)及以下条件满足:

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}[2\tilde{\varphi}^{\mathrm{T}}(0)f(t,\varphi)+|g(t,\varphi)|^2]\\&\leqslant\psi_1(t)[\lambda_0\mathrm{E}|\varphi(0)|^2+\lambda_1\|\varphi\|_0^2],\quad\varphi\in L^2_{\mathscr{F}_t}(\Omega,C),\end{aligned} \tag{4.2.16}$$

$\gamma=(1-\kappa)^{-2}(\lambda_0^++\lambda_1^+)$，则方程(4.2.1)的解均方$\psi^\gamma$有界,且成立

$$\mathrm{E}|x(t,\xi)|^2\leqslant\left[\frac{1}{\psi^\gamma(-\tau)(1-\kappa)}\vee\left(\frac{1+\kappa}{1-\kappa}\right)^2\right]\|\xi\|_0^2\psi^\gamma(t),\quad t\geqslant 0.$$

分析定理4.2.4及定理4.2.6的证明容易看出,将以上结论用于方程(4.2.2)与(4.2.3)时可适当加强:

(i) 设$\kappa=0,\lambda_0+\lambda_1^+\geqslant 0$，则方程(4.2.2)的解满足

$$\mathrm{E}|x(t,\xi)|^2\leqslant\psi^{-\gamma}(-\tau)\|\xi\|_0^2\psi^\gamma(t),\quad\gamma=\lambda_0+\lambda_1^+. \tag{4.2.17}$$

(ii) 设$\kappa=\tau=0$，则条件(4.2.16)可代以条件$\alpha\leqslant\gamma\psi_1(t)$，$\alpha$依(2.3.31). 若$\gamma\geqslant 0$,则方程(4.2.3)的解$x(t,x_0)$满足(对照(4.1.21))

$$\mathrm{E}|x(t,x_0)|^2\leqslant|x_0|^2\psi^\gamma(t),\quad t\geqslant 0,x_0\in\mathbf{R}^d. \tag{4.2.18}$$

以一个简单例子来解释所得结果的应用.

例4.2.8 考虑一维线性方程

$$\mathrm{d}[x(t)-\kappa y(t)]=a|\psi_1(t)|x(t)\mathrm{d}t+b\sqrt{|\psi_1(t)|}y(t)\mathrm{d}w(t), \tag{4.2.19}$$

其中$\kappa\in(0,1),y(t)=x(t-\delta(t)),\delta(t)\in C(\mathbf{R}_+,[0,\tau])$. 令

$$f(t,\varphi) = a|\psi_1(t)|\varphi(0), \quad g(t,\varphi) = b\sqrt{|\psi_1(t)|}\varphi(-\delta(t)),$$

则

式(4.2.16) 左端 $=|\psi_1(t)|\mathrm{E}\{2a\varphi(0)[\varphi(0)-\kappa\varphi(-\delta(t))]+b^2\varphi^2(-\delta(t))\}$

$$\leqslant|\psi_1(t)|[(2a+\kappa|a|)\mathrm{E}\varphi^2(0)+(b^2+\kappa|a|)\|\varphi\|_0^2].$$

(i) 应用推论 4.1.7. 设 $\psi'(t)<0,\lambda_0=-2a-\kappa|a|,\lambda_1=b^2+\kappa|a|$，则(4.1.21)满足，而(4.1.17)相当于

$$b^2<-2a(1-\kappa)(1-4\kappa+2\kappa^2). \tag{4.2.20}$$

因此，当 $\kappa\in[0,1/2)$，条件(4.2.20)满足时，存在 $\gamma>0$，使方程(4.2.19)的零解为均方 ψ^γ 稳定. 若 $b^2<-2a$，则当 $\kappa\geqslant 0$ 适当小(特别 $\kappa=0$)时，条件(4.2.20)满足.

(ii) 应用推论 4.2.7. 设 $\psi'(t)>0,\lambda_0=2a+\kappa|a|,\lambda_1=b^2+\kappa|a|$，则条件(4.2.16)满足，因而方程(4.2.19)的解均方 ψ^γ 有界，

$$\gamma=(1-\kappa)^{-2}[(2a+\kappa|a|)^++b^2+\kappa|a|].$$

注意为得到 ψ^γ 有界，对 a,b 无任何特殊要求.

(iii) 特殊情况. 若 $\kappa=\tau=0$，则方程(4.2.19)退化为

$$\mathrm{d}x(t)=x(t)[a|\psi_1(t)|\mathrm{d}t+b\sqrt{|\psi_1(t)|}\mathrm{d}w(t)]. \tag{4.2.21}$$

若 $2a+b^2>0$，则分别由(4.2.18)与(4.1.22)″推出，方程(4.2.21)的解满足

$$\mathrm{E}|x(t,x_0)|^2\leqslant\begin{cases}x_0^2[\psi(t)]^{-2a-b^2}, & \text{若 }\psi'(t)<0,\\ x_0^2[\psi(t)]^{2a+b^2}, & \text{若 }\psi'(t)>0.\end{cases} \tag{4.2.22}$$

另一方面，用(2.2.24)求出方程(2.2.21)的解

$$x(t,x_0)=x_0[\psi(t)]^{\pm(a-b^2/2)}\exp\left[\int_0^t b\sqrt{|\psi_1(s)|}\mathrm{d}w(s)\right], \tag{4.2.23a}$$

$$\mathrm{E}|x(t,x_0)|^2=x_0^2[\psi(t)]^{\pm(2a+b^2)}, \qquad (\text{用}(1.3.38)) \tag{4.2.23b}$$

其中 $\pm1=\operatorname{sgn}\psi'(t)$. 这就表明，应用(4.2.18)与(4.1.22)″所得到的解估计已不能改进. 这一结论在一定程度上说明了，定理 4.1.6 与定理 4.2.6 及其推论的有效性.

易注意到，定理 4.2.6 与定理 4.1.6 并不完全对应. 一个似乎更类似于定理 4.1.6 的结果是

定理 4.2.6′ 设 $p\geqslant1,V=|x|^p$；存在常数 $\kappa\in[0,1/2),\lambda_0,\lambda_1\geqslant0$ 与函数 $\zeta(t)\in C(\mathbf{R}_+)$，使得条件(4.2.7)及以下条件满足：

$$\mathrm{E}\mathscr{L}V(t,\varphi)\leqslant\zeta(t)+\psi_1(t)[-\lambda_0\mathrm{E}|\varphi(0)|^p+\lambda_1\|\varphi\|_0^p], \quad \varphi\in L^p_{\mathscr{F}_t}(\Omega,C),$$

$$\gamma=(1-\kappa)^{-p}[\lambda_1-\lambda_0(1-2\kappa)^p]^+, \quad \zeta(t)\psi^{-\gamma}(t)\in L^1(\mathbf{R}_+),$$

则方程(4.2.1)的解 p 阶矩 ψ^γ 有界，且取 $c_1=c_2=1$ 使式(4.2.10)成立. 若 $\zeta(t)$

$\in L^1(\mathbf{R}_+)$, $\lambda_1 \leqslant \lambda_0(1-2\kappa)^p$, 则方程(4.2.1)的解 p 阶矩有界.

以上结果可用类似于定理4.1.6的证法证明.

现在轮到考虑平行于定理4.1.8的结果了. 形式上,仍维持(4.1.24)的约定:

$$\pi_j = \inf_{t\geqslant 0}\frac{\psi(t-\tau_j)}{\psi(t)},\quad \rho_j = \sup_{t\geqslant 0}\frac{\psi(t-\tau_j)}{\psi(t)}. \tag{4.2.24}$$

不过稍不同的是 $\pi_j \geqslant \pi > 0, \rho \leqslant \rho_j \leqslant 1$ (ρ,π 依式(4)). 记住我们已约定 $1 \leqslant j \leqslant J$.

定理4.2.9 设 $p \geqslant 1$;存在常数 $\kappa \in [0,1)$, $c_1, c_2 > 0$, $a \in \mathbf{R}$, $a_j, b, \gamma \geqslant 0$, $\tau_j \in (0,\tau]$, $[-\tau,0)$ 上的概率测度 μ,ν, 函数 $V(t,x) \in C^{1,2}(\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^d)$ 与 $\zeta(t)$, 半正定矩阵 Q_j, 使得 $\zeta(t)\psi^{-\gamma}(t) \in L^1(\mathbf{R}_+)$, 且条件(4.2.8)及以下条件满足:

$$|u(\varphi)| \leqslant \kappa\int_{-\tau}^0 |\varphi(\theta)|\,\mathrm{d}\mu,\quad \varphi \in C, \tag{4.2.25}$$

$$\mathscr{L}V(t,\varphi) \leqslant \zeta(t) - a|\varphi(0)|^p + \sum_j a_j|\varphi(-\tau_j)|^p + b\int_{-\tau}^0 |\varphi(\theta)|^p\mathrm{d}\nu \tag{4.2.26a}$$

或

$$\mathscr{L}V(t,\varphi) + \sum_j\{[\varphi^{\mathrm{T}}(0)Q_j\varphi(0)]^{p/2} - [\varphi^{\mathrm{T}}(-\tau_j)Q_j\varphi(-\tau_j)]^{p/2}\}$$
$$\leqslant \zeta(t) + a|\varphi(0)|^p - \sum_j a_j|\varphi(-\tau_j)|^p + b\int_{-\tau}^0|\varphi(\theta)|^p\mathrm{d}\nu, \tag{4.2.26b}$$

其中 $t \geqslant 0, \varphi \in C$. 则在以下两种情况下方程(4.2.1)的解 p 阶矩 ψ^γ 有界:

(i) 条件(4.2.26a)满足,且

$$b - c_1\gamma\phi(1-\kappa)^p + \sum_j a_j\rho_j^\gamma \leqslant a. \tag{4.2.27a}$$

(ii) 条件(4.2.26b)满足,且

$$a + b - c_1\gamma\phi(1-\kappa)^p < [c_1(1-\kappa)^p/\check{\tau}] \wedge \sum_j[a_j\pi_j^\gamma + q_j^{p/2}(1-\rho_j^\gamma)],$$
$$q_j = \lambda_{\min}(Q_j). \tag{4.2.27b}$$

若 $\zeta(t) \in L^1(\mathbf{R}_+)$, $b + \sum a_j \leqslant a$(对情况(i))或 $a + b < [c_1(1-\kappa)^p/\check{\tau}] \wedge \sum_j a_j$(对情况(ii)),则方程(4.2.1)的解 p 阶矩有界.

证 取定方程(4.2.1)的一个解 $x(t) = x(t,\xi)$, 只要证 $h(t)$ (记号依(4.1.7))有界. 不妨设 $0 < \kappa < 1$. 用条件(4.2.25)推出

$$h(t) \leqslant \psi^{-\gamma}(t)\mathrm{E}\Big[(1-\kappa)^{1-p}|\tilde{x}(t)|^p + \kappa\int_{-\tau}^0|x(t+\theta)|^p\mathrm{d}\mu(\theta)\Big]$$
$$\leqslant (1-\kappa)^{1-p}\tilde{h}(t) + \kappa\int_{-\tau}^0 h(t+\theta)\mathrm{d}\mu(\theta),$$

由此得

$$\tilde{h}(t) \geqslant (1-\kappa)^{p-1}\Big[h(t) - \kappa\int_{-\tau}^0 h(t+\theta)\mathrm{d}\mu(\theta)\Big],\quad t \geqslant 0.$$

对于情况(i),如定理4.1.8之证,由条件(4.2.8)有

$$c_1\tilde{h}(t) \leqslant \text{const} + I_1 + I_2,$$

其中

$$I_1 = \mathrm{E}\int_0^t V(s,\tilde{x}(s))\,\mathrm{d}\psi^{-\gamma}(s) \leqslant -c_1\gamma\phi\int_0^t \tilde{h}(s)\,\mathrm{d}s$$

$$\leqslant -c_1\gamma\phi(1-\kappa)^{p-1}\Big[\int_0^t h(s)\,\mathrm{d}s - \kappa\int_{-\tau}^0 \mathrm{d}\mu(\theta)\int_0^t h(s+\theta)\,\mathrm{d}s\Big]$$

$$\leqslant \text{const} - c_1\gamma\phi(1-\kappa)^p\int_0^t h(s)\,\mathrm{d}s;$$

$$I_2 = \mathrm{E}\int_0^t \psi^{-\gamma}(s)LV(s,\tilde{x}(s))\,\mathrm{d}s$$

$$\leqslant \mathrm{E}\int_0^t \psi^{-\gamma}(s)\Big[\zeta(s) - a\,|\,x(s)\,|^p + \sum_j a_j\,|\,x(s-\tau_j)\,|^p + b\int_{-\tau}^0 |\,x(s+\theta)\,|\,\mathrm{d}\nu(\theta)\Big]\mathrm{d}s$$

$$\leqslant \text{const} + \Big(-a + \sum_j a_j\rho_j^\gamma + b\Big)\int_0^t h(s)\,\mathrm{d}s.$$

综上并用条件(4.2.27a)即得 $\tilde{h}(t) \leqslant \text{const}$. 因仍可用不等式(4.2.11),故得 $h(t) \leqslant \text{const}$.

对于情况(ii),设 $W(t,x)$ 依(4.1.23),则

$$c_1\tilde{h}(t) \leqslant \mathrm{E}[\psi^{-\gamma}(t)W(t,\tilde{x}(t))] \leqslant \text{const} + I_1 + I_2 + I_3,$$

其中 I_1 如同情况(i)之证,

$$I_2 = \mathrm{E}\int_0^t \mathrm{d}\psi^{-\gamma}(s)\sum_j\int_{s-\tau_j}^s [x^{\mathrm{T}}(\theta)Q_jx(\theta)]^{p/2}\mathrm{d}\theta$$

$$\leqslant \sum_j q_j^{p/2}\mathrm{E}\int_0^{t-\tau_j} |\,x(\theta)\,|^p\mathrm{d}\theta\int_\theta^{\theta+\tau_j}\mathrm{d}\psi^{-\gamma}(s)$$

$$\leqslant \sum_j q_j^{p/2}(\rho_j^\gamma - 1)\int_0^{t-\tau_j} h(s)\,\mathrm{d}s,$$

$$I_3 = \mathrm{E}\int_0^t \psi^{-\gamma}(s)LW(s,\tilde{x}(s))\,\mathrm{d}s$$

$$\leqslant \mathrm{E}\int_0^t \psi^{-\gamma}(s)\Big[\zeta(s) + a\,|\,x(s)\,|^p - \sum_j a_j\,|\,x(s-\tau_j)\,|^p + b\int_{-\tau}^0 |\,x(s+\theta)\,|^p\mathrm{d}\nu(\theta)\Big]\mathrm{d}s$$

$$\leqslant \text{const} + (a+b)\int_0^t h(s) - \sum_j a_j\pi_j^\gamma\int_0^{t-\tau_j} h(s)\,\mathrm{d}s.$$

在不等式(4.2.27b)两端之间插入一非负数 ω,综合对 $I_1 \sim I_3$ 的估计得

$$c_1\tilde{h}(t) \leqslant \text{const} + \omega\int_0^t h(s)\,\mathrm{d}s - \omega\int_0^{t-\check{\tau}} h(s)\,\mathrm{d}s \leqslant \text{const} + \omega\check{\tau}H(t).$$

以此代入式(4.2.11)并注意 $\omega\check{\tau} < c_1(1-\kappa)^p$,即得 $H(t) \leqslant \text{const}$,如所要证. □

只要对证明过程中出现的 const 作仔细估计,就可得到方程(4.2.1)的解的矩

估计式. 例如,在情况(i)之下当 $\zeta(t) \in L^1(\mathbf{R}_+)$, $b+\sum a_j \leqslant a$ 时有

$$\mathrm{E}\,|\,x(t,\xi)\,|^p \leqslant \frac{\|\xi\|_0^p}{1-\kappa} \vee \frac{\|\xi\|_0^p(b\tau+\sum a_j\tau_j)+\|\zeta\|_1}{c_1(1-\kappa)^p}, \quad t\geqslant 0.$$

定理4.2.9亦有类似于推论4.1.9~推论4.1.10的推论. 为简单起见,只写出取 $V=|x|^2$ 的以下特殊推论.

推论4.2.10 设存在常数 $\kappa\in[0,1)$, $a\in\mathbf{R}$, $a_j,b,\gamma\geqslant 0$, $\tau_j\in(-0,\tau]$, $[-\tau,0]$ 上的概率测度 μ,ν, 半正定矩阵 Q_j 及函数 $\zeta(t)$, 使得 $\psi^{-\gamma}(t)\zeta(t)\in L^1(\mathbf{R}_+)$, 且条件(4.2.25)及以下条件满足:

$$\begin{aligned}&2\tilde{\varphi}^{\mathrm{T}}(0)f(t,\varphi)+|\,g(t,\varphi)\,|^2\\ &\leqslant \zeta(t)-a\,|\,\varphi(0)\,|^2+\sum_j a_j\,|\,\varphi(-\tau_j)\,|^2+b\int_{-\tau}^{0}|\,\varphi(\theta)\,|^2\mathrm{d}\nu\end{aligned} \tag{4.2.26a$'$}$$

或

$$\begin{aligned}&2\tilde{\varphi}^{\mathrm{T}}(0)f(t,\varphi)+|\,g(t,\varphi)\,|^2+\sum_j[\varphi^{\mathrm{T}}(0)Q_j\varphi(0)-\varphi^{\mathrm{T}}(-\tau_j)Q_j\varphi(-\tau_j)]\\ &\leqslant\zeta(t)+a\,|\,\varphi(0)\,|^2-\sum_j a_j\,|\,\varphi(-\tau_j)\,|^2+b\int_{-\tau}^{0}|\,\varphi(\theta)\,|^2\mathrm{d}\nu,\end{aligned} \tag{4.2.26b$'$}$$

其中 $t\geqslant 0,\varphi\in C$. 则在以下两种情况下方程(4.2.1)的解均方 ψ^γ 有界:

(i) 条件(4.2.26a)′满足,且

$$b-\gamma\phi(1-\kappa)^2+\sum_j a_j\rho_j^\gamma\leqslant a. \tag{4.2.27a$'$}$$

(ii) 条件(4.2.26b)′满足, $q_j=\lambda_{\min}(Q_j)$

$$a+b-\gamma\phi(1-\kappa)^2<[(1-\kappa)^2/\check{\tau}]\wedge\sum_j[a_j\pi_j^\gamma+q_j(1-\rho_j^\gamma)]. \tag{4.2.27b$'$}$$

若 $\zeta(t)\in L^1(\mathbf{R}_+)$, $b+\sum a_j\leqslant a$ (对情况(i))或 $a+b<[(1-\kappa)^2/\check{\tau}]\wedge\sum a_j$ (对情况(ii)),则方程(4.2.1)的解均方有界.

今将以上结果用到例4.1.12中的方程

$$\mathrm{d}[x(t)-Kx(t-\tau_1)]=[-Ax(t)+Bx(t-\tau_1)]\mathrm{d}t+g(t,x_t)\mathrm{d}w(t). \quad (*)$$

假定 $\kappa=\|K\|<1$,

$$\lambda_{\min}(A+A^{\mathrm{T}})=\sigma\geqslant s=\lambda_{\min}(B^{\mathrm{T}}K+K^{\mathrm{T}}B),$$

$$q=\frac{\sigma-s}{2},\quad \lambda=\frac{\sigma+s}{2}-\|B+A^{\mathrm{T}}K\|\geqslant 0,$$

$$|\,g(t,\varphi)\,|^2\leqslant\zeta(t)+b_0\,|\,\varphi(0)\,|^2+b\int_{-\tau}^{0}|\,\varphi(\theta)\,|^2\mathrm{d}\nu,\quad t\geqslant 0,\varphi\in C,$$

其中 $b_0,b\geqslant 0$, ν 是 $[-\tau,0]$ 上的概率测度, $\zeta(t)\in L^1(\mathbf{R}_+)$. 令 $Q=qI$, 则

$$2[\varphi(0)-K\varphi(-\tau_1)]^{\mathrm{T}}[-A\varphi(0)+B\varphi(-\tau_1)]+|\,g(t,\varphi)\,|^2$$

$$+\varphi^{\mathrm{T}}(0)Q\varphi(0)-\varphi^{\mathrm{T}}(-\tau_1)Q\varphi^{\mathrm{T}}(-\tau_1)$$

$$\leqslant\zeta(t)+(b_0-\lambda)|\varphi(0)|^2-\lambda|\varphi(-\tau_1)|^2+b\int_{-\tau}^{0}|\varphi(\theta)|^2\mathrm{d}\nu.$$

于是由推论4.2.10(用情况(ii))得:若

$$b+b_0-\lambda<\lambda\wedge[\tau_1^{-1}(1-\kappa)^2],$$

则方程(*)的解均方有界.

受定理4.1.24的启发,今对定理4.2.9作一类似推广.实际上,同样的思想亦适用于改造定理4.1.8,故不妨合并处理这两种情况.

定理4.2.11 设$p\geqslant1$;存在常数$\kappa\in[0,1)$,$c_1,c_2>0$,$a\in\mathbf{R}$,$a_j,b,\gamma\geqslant0$,$\tau_j\in(0,\tau]$,$[-\tau,0]$上的概率测度λ,μ,ν,半正定矩阵Q_j,函数$V(t,x)\in C^{1,2}(\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^d)$,$q_0(t,x)$,$q_j(t,x)$,$q(t,x)\in C([-\tau,\infty)\times\mathbf{R}^d,\mathbf{R}_+)$及$\zeta(t)$,使得$\zeta(t)\psi^{-\gamma}(t)\in L^1(\mathbf{R}_+)$,且条件(4.2.8),(4.2.25)及以下条件之一满足:

$$\mathscr{L}V(t,\varphi)\leqslant\zeta(t)-a|\varphi(0)|^p+\sum_j a_j|\varphi(-\tau_j)|^p+b\int_{-\tau}^{0}|\varphi(\theta)|^p\mathrm{d}\nu$$

$$-q_0(t,\varphi(0))+\sum_j q_j(t-\tau_j,\varphi(-\tau_j))+\int_{-\tau}^{0}q(t+\theta,\varphi(\theta))\mathrm{d}\lambda(\theta);\quad(4.2.26\mathrm{a})''$$

$$\mathscr{L}V(t,\varphi)+\sum_j\{[\varphi^{\mathrm{T}}(0)Q_j\varphi(0)]^{p/2}-[\varphi^{\mathrm{T}}(-\tau_j)Q_j\varphi(-\tau_j)]^{p/2}\}$$

$$\leqslant\zeta(t)+a|\varphi(0)|^p-\sum_j a_j|\varphi(-\tau_j)|^p+b\int_{-\tau}^{0}|\varphi(\theta)|^p\mathrm{d}\nu$$

$$-q_0(t,\varphi(0))+\sum_j q_j(t-\tau_j,\varphi(-\tau_j))+\int_{-\tau}^{0}q(t+\theta,\varphi(\theta))\mathrm{d}\lambda(\theta),\quad(4.2.26\mathrm{b})''$$

其中$t\geqslant0$,$\varphi\in C$.若$\psi'(t)<0$,$0<\gamma\leqslant\ln\kappa^{-p}/\ln\rho$,

$$q_0(t,x)\geqslant\sum_j\rho_j^{\gamma}(t,x)+\rho^{\gamma}q(t,x),\quad t\geqslant0,x\in\mathbf{R}^d,\qquad(4.2.28\mathrm{a})$$

ρ,ϕ依(4.1.4),π_j,ρ_j依(4.1.24),则在以下两种情况下方程(4.2.1)的零解(若其存在)p阶矩ψ^{γ}稳定:

(i) 条件(4.2.26a)″满足,且

$$b\rho^{\gamma}+c_2\gamma\phi(1+\kappa\rho^{\gamma/p})^p+\sum_j a_j\rho_j^{\gamma}\leqslant a.\qquad(4.2.29\mathrm{a})$$

(ii) 条件(4.2.26b)″满足,且

$$a+b\rho^{\gamma}+c_2\gamma\phi(1+\kappa\rho^{\gamma/p})^p+\sum_j\|Q_j\|^{p/2}(\rho_j^{\gamma}-1)$$

$$<[c_1(1-\kappa\rho^{\gamma/p})/\check{\tau}]\wedge\sum_j a_j\pi_j^{\gamma}.\qquad(4.2.29\mathrm{b})$$

当$b+\sum a_j<a$或$a+b<[c_1(1-\kappa)^p/\check{\tau}]\wedge\sum a_j$时满足条件(4.2.29a)或(4.2.29b)的$\gamma\in(0,\ln\kappa^{-p}/\ln\rho]$必存在.

若 $\psi'(t)>0,\phi$ 依式(4.2.4)，π_j,ρ_j 依式(4.2.24)，

$$q_0(t,x)\geqslant\sum_j\rho_j^\gamma q_j(t,x)+q(t,x),\quad t\geqslant 0,x\in\mathbf{R}^d,\tag{4.2.28b}$$

则在以下两种情况下方程(4.2.1)的解 p 阶矩 ψ^γ 有界：

(iii) 条件(4.2.26a)″满足，且

$$b-c_1\gamma\phi(1-\kappa)^p+\sum_j a_j\rho_j^\gamma\leqslant a.\tag{4.2.29c}$$

(iv) 条件(4.2.26b)″满足，且

$$a+b-c_1\gamma\phi(1-\kappa)^p<[c_1(1-\kappa)^p/\check{\tau}]\wedge\sum_j[a_j\pi_j^\gamma+\lambda_{\min}^{p/2}(Q_j)(1-\rho_j^\gamma)].\tag{4.2.29d}$$

若 $\zeta(t)\in L^1(\mathbf{R}_+)$，式(4.2.28b)对 $\gamma=0$ 满足，$b+\sum a_j\leqslant a$（对情况(iii)）或 $a+b<[c_1(1-\kappa)^p/\check{\tau}]\wedge\sum a_j$（对情况(iv)），则方程(4.2.1)的解 p 阶矩有界.

与定理4.1.8 或定理4.2.9 比较，定理4.2.11 中唯一新的因素是函数 q_0,q_j,q 的使用，它们能起多大作用很快就可从下面的例子看出. 定理证明中唯一新的地方也只有涉及函数 q_0,q_j,q 的以下估计（以 $\psi'(t)<0$ 为例）：

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}\int_0^t\psi^{\gamma}(s)\Big[-q_0(s,x(s))+\sum_j q_j(s-\tau_j,x(s-\tau_j))+\int_{-\tau}^0 q(s+\theta,x(x+\theta))\mathrm{d}\lambda(\theta)\Big]\mathrm{d}s\\&\leqslant-\mathrm{E}\int_0^t\psi^{-\gamma}(s)q_0(s,x(s))\mathrm{d}s+\sum_j\rho_j^\gamma\mathrm{E}\int_{-\tau}^t\psi^{-\gamma}(s)q_j(s,x(s))\mathrm{d}s\\&\quad+\rho^\gamma\mathrm{E}\int_{-\tau}^t\psi^{-\gamma}(s)q(s,x(s))\mathrm{d}s\\&\leqslant\text{const.}\qquad\qquad(\text{用}(4.2.28\text{a}))\end{aligned}$$

鉴于以上估计是完全标准的，今后在类似情况下都予省略. 其次可注意到，函数 q_0,q_j,q 并不进入不等式(4.2.29a)～(4.2.29d).

例 4.2.12 考虑一维非线性方程

$$\begin{aligned}\mathrm{d}[x(t)-\kappa x(t-1)]=&[-\alpha x(t)+x(t-1)-\psi^{-2}(t)x^3(t)]\mathrm{d}t\\&+\int_{-1}^0[x(t+\theta)+\psi^{-1}(t)x^2(t+\theta)]\mathrm{d}\theta\mathrm{d}w(t),\end{aligned}\tag{$**$}$$

其中 $\kappa\in[0,1),\alpha>1,\psi'(t)<0$. 取 $V=x^2$，则对任给 $\varphi\in C[-1,0]$ 有

$$\begin{aligned}\mathscr{L}V(t,\varphi)=&2[\varphi(0)-\kappa\varphi(-1)][-\alpha\varphi(0)+\varphi(-1)-\psi^{-2}(t)\varphi^3(0)]\\&+\Big\{\int_{-1}^0[\varphi(\theta)+\psi^{-1}(t)\varphi^2(\theta)]\mathrm{d}\theta\Big\}^2\\\leqslant&-(2\alpha-\alpha\kappa-1)\varphi^2(0)+(\alpha\kappa-2\kappa+1)\varphi^2(-1)-2\psi^{-2}(t)\varphi^4(0)\\&+2\kappa\psi^{-2}(t)\Big[\frac{3\varphi^4(0)}{4}+\frac{\varphi^4(-1)}{4}\Big]+\int_{-1}^0\Big[\frac{\varphi^2(\theta)}{1-\varepsilon}+\frac{\psi^{-2}(t)\varphi^4(\theta)}{\varepsilon}\Big]\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

$$\leqslant -a\varphi^2(0)+a_1\varphi^2(-1)+b\int_{-1}^{0}\varphi^2(\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$-q_0(t,\varphi(0))+q_1(t-1,\varphi(-1))+\int_{-1}^{0}q(t+\theta,\varphi(\theta))\mathrm{d}\theta,$$

其中 $\varepsilon\in(0,1)$,

$$a=\alpha(2-\kappa)-1,\quad a_1=\kappa(\alpha-2)+1>0,\quad b=(1-\varepsilon)^{-1},$$

$$q_0(t,x)=(2-1.5\kappa)\psi^{-2}(t)x^4,\quad q_1(t,x)=0.5\kappa\psi^{-2}(t+1)x^4,$$

$$q(t,x)=\varepsilon^{-1}\psi^{-2}(t+1)x^4.$$

因

$$q_0(t,x)-q_1(t,x)-q(t,x)\geqslant x^4\psi^{-2}(t+1)[\rho^{-2}(2-1.5\kappa)-0.5\kappa-\varepsilon^{-1}],$$

故当 $\rho^{-2}(2-1.5\kappa)-0.5\kappa-\varepsilon^{-1}>0$, 即

$$0<\varepsilon_0\triangleq[\rho^{-2}(2-1.5\kappa)-0.5\kappa]^{-1}<\varepsilon<1$$

时条件(4.2.28a)对充分小的 $\gamma>0$ 满足.

(i) 用定理4.2.11(i). 不等式 $a_1+b<a$ 相当于

$(1-\varepsilon)^{-1}<2(\alpha-1)(1-\kappa)$ 即 $\varepsilon<1-[2(\alpha-1)(1-\kappa)]^{-1}\triangleq\varepsilon_1$.

使满足 $\varepsilon_0<\varepsilon<\varepsilon_1$ 的 ε 存在的充要条件是 $\varepsilon_0<\varepsilon_1$, 即

$$[\rho^{-2}(2-1.5\kappa)-0.5\kappa]^{-1}<1-[2(\alpha-1)(1-\kappa)]^{-1}.$$

由此解出

$$\alpha>1+\frac{2-1.5\kappa-0.5\kappa\rho^2}{2(1-\kappa)[2-1.5\kappa-\rho^2(1+0.5\kappa)]},$$

假定 $2-1.5\kappa>\rho^2(1+0.5\kappa)$. 对如上的 α, 必有 $\gamma>0$, 使方程(* *)的零解均方 ψ^γ 稳定.

(ii) 用定理4.2.11 中的情况(ii). 取 $Q\geqslant0$, 则对 $V=x^2$ 有

$$\mathscr{L}V(t,\varphi)+Q[\varphi^2(0)-\varphi^2(-1)]$$

$$\leqslant a\varphi^2(0)-a_1\varphi^2(-1)+b\int_{-1}^{0}\varphi^2(\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$-q_0(t,\varphi(0))+q_1(t-1,\varphi(-1))+\int_{-1}^{0}q(t+\theta,\varphi(\theta))\mathrm{d}\theta,$$

其中 a,q_0,q_1,q 仍如情况(i), 但 a,a_1 变为

$$a=Q+1-2\alpha+\alpha\kappa,\quad a_1=Q-1+2\kappa-\alpha\kappa.$$

取 $Q=1-2\kappa+\alpha\kappa$(必 $Q\geqslant0$), 则 $a_1=0$; 不等式 $a+b<a_1\wedge(1-\kappa)^2$ 相当于 $a+b<0$, 这与前述的不等式 $\varepsilon<\varepsilon_1$ 无异, 因而有如同(i)一样的结论.

特别, 取 $\kappa=0.2,\psi(t)=\mathrm{e}^{-0.1t}$(因而 $\rho=\mathrm{e}^{0.1}$)得出: 当 $\alpha>3.7667$ 时方程(* *)的零解均方指数稳定. 其次, 取 $\kappa=0.2,\psi(t)=(1+\sigma t)^{-0.1}$, 则 $\rho=(1-\sigma)^{-0.1}$, 当 $\sigma\to0$ 时 $\rho\to1$. 因此容易得出: 若 $\alpha>2.6667,\sigma>0$ 充分小, 则方程(* *)的零解均方多项式稳定.

推广定理4.1.8与定理4.2.9的其他思路尚多,下面的结果就可作一例.

定理4.2.13 设 $p>0$;存在常数 $c>0, a\in\mathbf{R}, a_j, b, \gamma\geqslant 0, \tau_j\in(0,\tau]$, $[-\tau,0]$ 上的概率测度 μ,ν,函数 $V(t,x)\in C^{1,2}([-\tau,\infty)\times\mathbf{R}^d), q_0(t,x), q_j(t,x), q(t,x)\in C([-\tau,\infty)\times\mathbf{R}^d,\mathbf{R}_+)$ 及函数 $\zeta(t)$,使得 $\psi^{-\gamma}(t)\zeta(t)\in L^1(\mathbf{R}_+)$,且以下条件满足:

$$c|x|^p\leqslant V(t,x),\quad t\geqslant 0, x\in\mathbf{R}^d,$$

$$\begin{aligned}\mathscr{L}V(t,\varphi)\leqslant&\zeta(t)-aV(t,\varphi(0))+\sum_j a_jV(t-\tau_j,\varphi(-\tau_j))\\&+b\int_{-\tau}^0V(t+\theta,\varphi(\theta))\mathrm{d}\mu(\theta)-q_0(t,\varphi(0))\\&+\sum_j q_j(t-\tau_j,\varphi(-\tau_j))+\int_{-\tau}^0q(t+\theta,\varphi(\theta))\mathrm{d}\nu(\theta).\end{aligned}$$

(i) 若 $\psi'(t)<0, \gamma>0$,条件(4.2.28a)及以下条件满足:

$$b\rho^\gamma+\gamma\phi+\sum_j a_j\rho_j^\gamma\leqslant a,$$

其中ρ,ϕ依(4.1.4),ρ_j依(4.1.24),则方程(4.2.2)的零解(若存在)p阶矩ψ^γ稳定.

(ii) 若 $\psi'(t)>0$, ϕ 依式(4.2.4), ρ_j 依式(4.2.24),条件(4.2.28b)及以下条件满足:

$$b-\gamma\phi+\sum_j a_j\rho_j^\gamma\leqslant a,$$

则方程(4.2.2)的解 p 阶矩 ψ^γ 有界,当 $\zeta(t)\in L^1(\mathbf{R}_+)$ 且 $b+\sum a_j\leqslant a$ 时 p 阶矩有界.

其证明与定理4.2.11之证是类似的.

4.2.2 轨道有界性

参照定义4.1.13与定义4.1.1,以下定义是很自然的.

定义4.2.14 设 $\gamma\geqslant 0$,方程(1)的解 $x(t,\xi)$ 恒满足

$$\varlimsup_{t\to\infty}\frac{\ln|x(t,\xi)|}{\ln\psi(t)}\leqslant\gamma,\text{a.s.},\tag{4.2.30}$$

则称方程(4.2.1)的解 a.s. ψ^γ 有界. a.s. 指数有界与 a.s. 多项式有界的意义自明.

条件(4.2.30)等价于

$$|x(t,\xi)|\leqslant\beta\psi^\mu(t),\text{a.s.},\quad\forall\mu>\gamma,\tag{4.2.30$'$}$$

其中 $\beta>0$ 与 t 无关(但一般与 μ,ξ 有关). 当式(4.2.30)$'$对 $\mu=0$ 满足时就称方程(4.2.1)的解 a.s. 有界. 如同稳定性一样,通常可从以下三个途径获得轨道有界

性:其一是从矩有界直接推出相应的 a. s. 轨道有界;其二是利用基于定理 1.2.11 的轨道估计;其三是利用基于指数鞅不等式的渐近估计,下面分别予以考虑. 首先建立一个对应于定理 4.1.14 的结果.

定理 4.2.15　设 $p \geqslant 1$,方程(4.2.1)的一个解 $x(t) = x(t,\xi)$ 满足条件

$$\mathrm{E}\,|x(t)|^p \leqslant \beta\,\psi^{\mu}(t), \quad t \geqslant 0, \tag{4.2.31}$$

其中 $\beta,\mu > 0$ 与 t 无关; 存在正常数 ε,K 及 $\kappa \in [0,1)$, 使条件(4.2.7),(4.1.31)及以下条件满足:

$$\sum_n \psi^{-\varepsilon}(n\tau) < \infty. \tag{4.2.32}$$

则

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\,\frac{\ln|x(t)|^p}{\ln\psi(t)} \leqslant \gamma = \mu + \varepsilon,\text{a. s.}.$$

因此,若方程(4.2.1)的解 p 阶矩 ψ^{μ} 有界,条件(4.1.31)对方程(4.2.1)的任何解 $x(t)$ 满足,则方程(4.2.1)的解 a. s. $\psi^{\gamma/p}$ 有界, $\gamma = \mu + \varepsilon$.

证　因仍可沿用定理 4.1.14 的证法,故只需给出证明的一个梗概. 首先,如同定理 4.1.14 之证(且因 $\psi'(t) > 0$ 可作得更简单)可得

$$\mathrm{E}\,\|\tilde{x}_{n\tau}\|^p \leqslant c_1\psi^{\mu}(n\tau), \quad n \geqslant 2,$$

其中 $c_1 > 0$ 与 n 无关. 于是

$$P(\|\tilde{x}_{n\tau}\|^p \geqslant \psi^{\gamma}(n\tau)) \leqslant \psi^{-\gamma}(n\tau)\mathrm{E}\,\|\tilde{x}_{n\tau}\|^p \leqslant c_1\psi^{-\varepsilon}(n\tau).$$

然后由条件(4.2.32)得出,a. s. 地,当 n 充分大, $n\tau - \tau \leqslant t \leqslant n\tau$ 时有

$$|\tilde{x}(t)|^p \leqslant \|\tilde{x}_{n\tau}\|^p < \psi^{\gamma}(n\tau) \leqslant \rho^{-\gamma}\psi^{\gamma}(t). \qquad (\rho\text{ 依}(4.2.4))$$

取定 $\omega \in \Omega$,使得

$$|\tilde{x}(t)|^p \leqslant c_2\psi^{\gamma}(t), \quad t \geqslant 0,$$

其中 $c_2 > 0$ 与 t 无关. 令 $h(t) = \psi^{-\gamma}(t)\,|x(t)|^p$, $H(t) = \sup\limits_{-\tau\leqslant s\leqslant t} h(s)$,则

$$h(t) \leqslant c_2(1-\kappa)^{1-p} + \kappa H(t),$$

由此解出 $h(t) \leqslant H(t) \leqslant c_2(1-\kappa)^{-p}$, 这推出要证不等式.　□

分别取 $\psi(t) = \mathrm{e}^t$ 与 $\psi(t) = 1 + \sigma t\,(0 < \sigma < 1/\tau)$, 由定理 4.1.14 得

推论 4.2.16　设 $p \geqslant 1, \tau > 0, x(t)$ 是方程(4.2.1)的一个解,条件(4.2.7)与(4.1.31)满足. 若对 $x(t)$ 有估计

$$\mathrm{E}\,|x(t)|^p \leqslant \beta\mathrm{e}^{\mu t}\text{ 或 }\mathrm{E}\,|x(t)|^p \leqslant \beta(1+\sigma t)^{\mu}, \quad t \geqslant 0,$$

其中 $\beta,\mu > 0$ 与 t 无关. 则

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\,\frac{\ln|x(t)|^p}{t} \leqslant \mu,\text{a. s. 或 }\overline{\lim_{t\to\infty}}\,\frac{\ln|x(t)|^p}{\ln t} \leqslant \mu + 1,\text{a. s.}.$$

因此,在所设条件下, p 阶矩指数有界与 p 阶矩多项式有界分别推出 a. s. 指数有界与 a. s. 多项式有界(参照推论 4.1.15).

现在转向应用定理 1.2.11,以下结果恰与定理 4.1.16 相对应.

定理 4.2.17 设存在 $V(t,x)\in C^{1,2}(\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^d)$,函数 $\zeta(t)$ 与常数 $\kappa\in[0,1)$,$c>0,\gamma\geqslant 0$,使得 $\zeta(t)\psi^{-\gamma}(t)\in L^1(\mathbf{R}_+)$,且条件(4.2.9)及以下条件满足:

$$|u(\varphi)|\leqslant\kappa\|\varphi\|,\quad \varphi\in C,\tag{4.2.33}$$

$$c|x|^2\leqslant V(t,x),\qquad t\geqslant 0,x\in\mathbf{R}^d.\tag{4.2.34}$$

则方程(4.2.1)的解 a. s. $\psi^{\gamma/2}$ 有界.

证 取定方程(4.2.1)的一个解 $x(t)=x(t,\xi)$,依(4.1.34)的记号有

$$\begin{aligned}h(t)&\leqslant\psi^{-\gamma}(t)\left[\frac{|\tilde{x}(t)|^2}{1-\kappa}+\kappa\|x_t\|^2\right]\\&\leqslant(1-\kappa)^{-1}\tilde{h}(t)+\kappa H(t),\end{aligned}$$

这推出(对照(4.2.11)与(4.1.37))

$$H(t)\leqslant\frac{\|\xi\|^2}{\psi^\gamma(-\tau)(1-\kappa)}\vee\frac{\widetilde{H}(t)}{(1-\kappa)^2},\quad t\geqslant 0.\tag{4.2.35}$$

这表明问题归于证 $\tilde{h}(t)$ 为 a. s. 轨道有界. 利用条件(4.2.34)与(4.2.9),可如定理 4.1.16 之证一样得出所要结论. □

分别取 $\psi(t)=\mathrm{e}^t$ 与 $\psi(t)=1+t$,将定理 4.2.17 用于方程(4.2.3)得

推论 4.2.18 设存在 $V(t,x)\in C^{1,2}(\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^d)$ 与常数 $c>0,\gamma\geqslant 0$,使得条件(4.2.34)及以下条件满足:

$$\alpha\leqslant\gamma\quad\text{或}\quad\alpha\leqslant\gamma(1+t)^{-1},\qquad(\alpha\text{ 依(2.3.31)})$$

则方程(4.2.3)的解 $x(t)=x(t,x_0)\ (x_0\in\mathbf{R}^d)$ 满足:

$$\varlimsup_{t\to\infty}\frac{\ln|x(t)|^2}{t}\leqslant\gamma,\text{a. s. 或}\quad\varlimsup_{t\to\infty}\frac{\ln|x(t)|^2}{\ln t}\leqslant\gamma,\text{a. s.}.$$

与定理 4.1.18 相对应,有如下均方有界与 a. s. 有界结果.

定理 4.2.19 设存在常数 $\kappa\in[0,1),c_1,c_2>0,a\in\mathbf{R},a_j,b,\gamma\geqslant 0,\tau_j\in(0,\tau]$,$[-\tau,0]$ 上的概率测度 μ,ν,函数 $V(t,x)\in C^{1,2}(\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^d)$ 与 $\zeta(t)$,使得 $\zeta(t)\psi^{-\gamma}(t)\in L^1(\mathbf{R}_+)$,且条件(4.2.8)(取 $p=2$),(4.2.25)及以下条件满足:

$$\mathscr{L}V(t,\varphi)\leqslant\zeta(t)-a|\varphi(0)|^2+\sum_j a_j|\varphi(-\tau_j)|^2+b\int_{-\tau}^0|\varphi(\theta)|^2\mathrm{d}\nu,\tag{4.2.36}$$

其中 $t\geqslant 0,\varphi\in C$,

$$b-c_1\gamma\phi(1-\kappa)^2+\sum_j a_j\rho_j^\gamma\leqslant a,\tag{4.2.37}$$

其中 ϕ 依式(4.2.4),ρ_j 依式(4.2.24). 则方程(4.2.1)的解均方 ψ^γ 有界与 a. s. $\psi^{\gamma/2}$ 有界;当 $b+\sum a_j\leqslant a,\zeta(t)\in L^1(\mathbf{R}_+)$ 时均方有界与 a. s. 有界.

证明类似于定理 4.1.18,从略.

作为一个应用指数鞅不等式的结果,以下定理恰对应于定理 4.1.19.

定理 4.2.20　设 $x(t)$ 是方程(4.2.1)的一个解，$\forall t \geqslant 0$，有 $\tilde{x}(t) \neq 0$, a.s.；存在常数 $c > 0, \kappa \in [0,1)$ 与 $V(t,x) \in C^{1,2}(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d)$, $\zeta(t) \in L^1(\mathbf{R}_+)$ 及在 $\delta = 1$ 邻近有定义的连续函数 $\mu(\delta)$，使得 $\mu \triangleq \mu(1) \geqslant 0$，且条件(4.2.33)，(4.2.34)及以下条件满足：

$$\frac{LV(t,\tilde{x}(t))}{V(t,\tilde{x}(t))} - \frac{\delta}{2}|Z(t)|^2 \leqslant \zeta(t) + \mu(\delta)\psi_1(t), \quad t \geqslant 0, \tag{4.2.38}$$

其中 $\delta \in (0,1)$ 邻近 1，$Z(t) = V_x(t,\tilde{x}(t))g(t,x_t)/V(t,\tilde{x}(t))$. 则成立

$$\varlimsup_{t\to\infty} \frac{\ln|x(t)|^2}{\ln \psi(t)} \leqslant \mu, \text{a.s.}. \tag{4.2.39}$$

因此，若方程(4.2.1)的任何非零解使条件(4.2.38)满足，则方程(4.2.1)的解 a.s. $\psi^{\mu/2}$ 有界.

证　大体上沿用定理4.1.19的证法. 取定 $\gamma > \mu$，依(4.1.34)的记号，只要证 $\tilde{h}(t)$ 为 a.s. 轨道有界. 如同(4.1.43)，有

$$\ln[c\,\tilde{h}(t)] \leqslant \ln V(0,\tilde{x}(0)) - \gamma \ln \psi(t) + M(t) + \int_0^t \left[\frac{LV(s,\tilde{x}(s))}{V(s,\tilde{x}(s))} - \frac{1}{2}|Z(s)|^2\right]\mathrm{d}s,$$

其中 $M(t) = \int_0^t Z(s)\mathrm{d}w(s)$. 以 $\varphi(t)$ 记 $\psi(t)$ 的反函数，取 $\delta \in (0,1)$ 充分接近于 1，则由指数鞅不等式有

$$P\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant \varphi(e^{n+1})}\left[M(t) - \frac{1-\delta}{2}\int_0^t |Z(s)|^2\mathrm{d}s\right] \geqslant \frac{2\ln n}{1-\delta}\right) \leqslant \frac{1}{n^2}.$$

于是 a.s. 地，当 n 充分大，$\varphi(\mathrm{e}^n) \leqslant t \leqslant \varphi(\mathrm{e}^{n+1})$ 时有

$$M(t) \leqslant \frac{1-\delta}{2}\int_0^t |Z(s)|^2\mathrm{d}s + \frac{2\ln\ln\psi(t)}{1-\delta};$$

$$\begin{aligned}\ln[c\,\tilde{h}(t)] &\leqslant \ln V(0,\tilde{x}(0)) - \gamma\ln\psi(t) + 2(1-\delta)^{-1}\ln\ln\psi(t) \\ &\quad + \int_0^t\left[\frac{LV(s,\tilde{x}(s))}{V(s,\tilde{x}(s))} - \frac{\delta}{2}|Z(s)|^2\right]\mathrm{d}s \\ &\leqslant \ln V(0,\tilde{x}(0)) + 2(1-\delta)^{-1}\ln\ln\psi(t) \\ &\quad + \int_0^t \zeta(s)\mathrm{d}s - q\ln\psi(t), \qquad (\text{用(4.2.38)})\end{aligned}$$

其中 $q = \gamma - \mu(\delta)$. 因 $\mu = \mu(1) < \gamma$，故不妨设 $q > 0$，从而当 t 充分大时有

$$q\ln\psi(t) > 2(1-\delta)^{-1}\ln\ln\psi(t),$$

这就可如同证定理4.1.19一样得出所要结论.　□

对应于4.1.20有以下推论：

推论 4.2.21　设存在正常数 c 与 $V(t,x) \in C^{1,2}(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d)$, $\zeta(t) \in L^1(\mathbf{R}_+)$ 及在 $\delta = 1$ 邻近定义的连续函数 $\mu(\delta)$，使得 $\mu \triangleq \mu(1) \geqslant 0$，且条件(4.2.34)及以下

条件满足：

$$\alpha - \delta\beta \leqslant \zeta(t) + \mu(\delta)\psi_1(t), \quad t \geqslant 0,$$

其中 α,β 依(2.3.31). 则方程(4.2.3) 的解 a.s. $\psi^{\mu/2}$ 有界.

例 4.2.22 考虑一维线性方程

$$\begin{aligned} & \mathrm{d}[x(t) - \kappa y(t)] \\ & = |\psi_1(t)|[ax(t) + py(t)]\mathrm{d}t + \sqrt{|\psi_1(t)|}[bx(t) + qy(t)]\mathrm{d}w(t), \quad (4.2.40) \end{aligned}$$

其中 $\kappa \in [0,1)$, a,b,p,q 为实常数, $y(t) = x(t-\delta(t))$. 为简便起见,下面约定 $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\tilde{x} = x - \kappa y$, $\psi_1 = \psi_1(t)$. 设 $V = x^2$, $\delta \in (0,1)$ 充分邻近于 1, 则

$$\begin{aligned} & \frac{LV(\tilde{x}(t))}{V(\tilde{x}(t))} - \frac{\delta}{2}|Z(t)|^2 \\ & = |\psi_1|\tilde{x}^{-2}[2\tilde{x}(ax + py) + (bx + qy)^2 - 2\delta(bx + qy)^2] \\ & = |\psi_1|\tilde{x}^{-2}\{2\tilde{x}[a\tilde{x} + (a\kappa + p)y] - (2\delta - 1)[b\tilde{x} + (b\kappa + q)y]^2\} \\ & = |\psi_1|\tilde{x}^{-2}\{(2a + b^2 - 2b^2\delta)\tilde{x}^2 - (2\delta - 1)(b\kappa + q)^2 y^2 \\ & \quad + 2[a\kappa + p - b(2\delta - 1)(b\kappa + q)]\tilde{x}y\} \\ & = |\psi_1|\left\{2a + b^2 - 2b^2\delta + \left[\frac{a\kappa + p - b(2\delta - 1)(b\kappa + q)}{\sqrt{2\delta - 1}(b\kappa + q)}\right]^2\right. \\ & \quad \left. - \left[\frac{\sqrt{2\delta - 1}(b\kappa + q)y}{\tilde{x}} - \frac{a\kappa + p - b(2\delta - 1)(b\kappa + q)}{\sqrt{2\delta - 1}(b\kappa + q)}\right]^2\right\} \\ & \leqslant \mu(\delta)\psi_1(t), \end{aligned}$$

其中

$$\pm\mu(\delta) = 2a - b^2(2\delta - 1) + \left[\frac{a\kappa + p - b(2\delta - 1)(b\kappa + q)}{\sqrt{2\delta - 1}(b\kappa + q)}\right]^2,$$

$$\pm\mu(1) = 2a - b^2 + \left(\frac{a\kappa + p}{b\kappa + q} - b\right)^2 \triangleq \pm\mu,$$

$$\pm 1 = \operatorname{sgn}\psi'(t).$$

若 $\kappa = p = q = 0$, 则方程(4.2.40)重合于方程(4.2.21), 此时直接看出

$$\frac{LV(x(t))}{V(x(t))} - \frac{\delta}{2}|Z(t)|^2 = [2a - b^2(2\delta - 1)]|\psi_1(t)|,$$

因而可取 $\pm\mu(\delta) = 2a - b^2(2\delta - 1)$, $\pm\mu = 2a - b^2$.

(i) 应用定理 4.1.19. 设 $\psi'(t) < 0$, 则当 $\mu > 0$, 即

$$\left(\frac{a\kappa + p}{b\kappa + q} - b\right)^2 < b^2 - 2a$$

时, 方程(4.2.40)的零解 a.s. $\psi^{\gamma/2}$ 稳定, $\gamma = \mu \wedge (\ln\kappa^{-2}/\ln\rho)$. 特别, 当 $2a < b^2$ 时方程(4.2.21)的零解 a.s. $\psi^{\mu/2}$ 稳定, $\mu = b^2 - 2a$.

（ii）应用定理4.2.20. 设 $\psi'(t)>0$，则当 $\mu\geqslant 0$，即

$$\left(\frac{a\kappa+p}{b\kappa+q}-b\right)^2\geqslant b^2-2a$$

时，方程（4.2.40）的解 a.s. $\psi^{\mu/2}$ 有界. 特别，当 $2a\geqslant b^2$ 时方程（4.2.21）的解 a.s. $\psi^{\mu/2}$ 有界，$\mu=2a-b^2$.

关于方程（4.2.21）的结论可以从式（4.2.23）得到佐证. 注意到参数 b 可正可负，若 $2a=b^2$，则结合式（4.2.39）与（4.2.23）得

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\ln\psi(t)}\int_0^t\sqrt{\psi_1(s)}\,\mathrm{d}w(s)=0,\text{a.s.},$$

这是一个非平凡的结果. 若取 $\psi(t)=\mathrm{e}^t$，则上式成为

$$\lim_{t\to\infty}t^{-1}w(t)=0,\text{a.s.},$$

这是重对数律的熟知推论（参考（1.2.36））.

证明定理4.1.19与定理4.2.20的方法还可以在多种其他形式下使用，下面就是一个有趣的例子.

定理4.2.23　设 $x(t)$ 是方程（4.2.2）的解，$\forall t\geqslant 0, x(t)\neq 0$, a.s.；存在常数 $c>0$，函数 $V(t,x)\in C^{1,2}(\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^d)$，$q_0(t,x),q(t,x)\in C([-\tau,\infty)\times\mathbf{R}^d,\mathbf{R}_+)$，$[-\tau,0]$ 上的概率测度 μ，使得条件（4.2.34）及以下条件满足

$$q_0(t,x)\geqslant q(t,x),\quad t\geqslant 0, x\in\mathbf{R}^d,$$

$$\alpha\ln V(t,\varphi(0))+\frac{\mathscr{L}V(t,\varphi)}{V(t,\varphi(0))}-\frac{\delta}{2}|Z|^2$$

$$\leqslant K-\mathrm{e}^{\alpha\tau}q_0(t,\varphi(0))+\int_{-\tau}^0 q(t+\theta,\varphi(\theta))\mathrm{d}\mu(\theta),\quad t\geqslant 0,\varphi\in C,\qquad(4.2.41)$$

其中 $Z=V_x(t,\varphi(0))g(t,\varphi)/V(t,\varphi(0))$，$\alpha>0,\delta\in(0,1)$，$K=K(\alpha,\delta)$ 为正常数. 若 $\phi>0$（ϕ 依式（4.2.4）），则成立

$$\varlimsup_{t\to\infty}\frac{\ln|x(t)|^2}{\ln\ln\psi(t)}\leqslant 1,\text{a.s.}.$$

证　由条件（4.2.34），不妨以 $V(t,x)$ 取代 $|x|^2$ 证上述不等式. 任给 $\alpha>0$，有

$$\begin{aligned}\ln V(t,x(t))&=\mathrm{e}^{-\alpha t}\ln V(0,x(0))+\mathrm{e}^{-\alpha t}\int_0^t\mathrm{d}[\mathrm{e}^{\alpha s}\ln V(s,x(s))]\\&=\mathrm{e}^{-\alpha t}\ln V(0,x(0))+\mathrm{e}^{-\alpha t}M(t)\\&\quad+\int_0^t\mathrm{e}^{\alpha(s-t)}\left[\alpha\ln V(s,x(s))+\frac{LV(s,x(s))}{V(s,x(s))}-\frac{1}{2}|Z(s)|^2\right]\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

其中

$$M(t)=\int_0^t\mathrm{e}^{\alpha s}Z(s)\,\mathrm{d}w(s),\quad Z(t)=V_x(t,x(t))g(t,x_t)/V(t,x(t)).$$

以 $\eta(t)$ 记 $\psi(t)$ 的反函数. 任给 $n\in\mathbf{N},\delta\in(0,1),\theta>1$,由指数鞅不等式有

$$P\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant\eta(e^n)}\left[M(t)-\frac{1-\delta}{2}e^{-\alpha\eta(e^n)}\int_0^t e^{2\alpha s}|Z(s)|^2ds\right]\geqslant\frac{\ln n^\theta}{1-\delta}e^{\alpha\eta(e^n)}\right)<\frac{1}{n^\theta}.$$

于是 a. s. 地,当 n 充分大,$\eta(e^{n-1})\leqslant t\leqslant\eta(e^n)$(从而 $n-1\leqslant\ln\psi(t)\leqslant n$)时有

$$M(t)\leqslant\frac{1-\delta}{2}\int_0^t e^{\alpha s}|Z(s)|^2ds+\frac{\theta\ln[1+\ln\psi(t)]}{1-\delta}e^{\alpha\eta(e^n)}.$$

注意到当 $\eta(e^{n-1})\leqslant t\leqslant\eta(e^n)$ 时有

$$\eta(e^n)-t\leqslant\eta(e^n)-\eta(e^{n-1})=\int_{n-1}^n\eta'(e^t)e^tdt$$

$$=\int_{n-1}^n\frac{e^tdt}{\psi'(\eta(e^t))}=\int_{n-1}^n\frac{dt}{\psi_1(\eta(e^t))}\leqslant\frac{1}{\phi},$$

故 a. s. 地,当 t 充分大时有

$$e^{-\alpha t}M(t)\leqslant\frac{1-\delta}{2}\int_0^t e^{\alpha(s-t)}|Z(s)|^2ds+\frac{\theta\ln[1+\ln\psi(t)]}{1-\delta}e^{\alpha/\phi},$$

$$\ln V(t,x(t))\leqslant e^{-\alpha t}\ln V(0,x(0))+\frac{\theta\ln[1+\ln\psi(t)]}{1-\delta}e^{\alpha/\phi}+I,$$

$$\begin{aligned}I&=e^{-\alpha t}\int_0^t e^{\alpha s}\left[\alpha\ln V(s,x(s))+\frac{LV(s,x(s))}{V(s,x(s))}-\frac{\delta}{2}|Z(s)|^2\right]ds\\&\leqslant e^{-\alpha t}\int_0^t e^{\alpha s}\left[K-e^{\alpha\tau}q_0(s,x(s))+\int_{-\tau}^0 q(s+\theta))d\mu(\theta)\right]ds\\&\leqslant\text{const }e^{-\alpha t}\left(1+\int_0^t e^{\sigma s}ds\right)\leqslant\text{const}.\end{aligned}$$

综上得

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\ln V(t,x(t))}{\ln\ln\psi(t)}\leqslant\frac{\theta e^{\alpha/\phi}}{1-\delta},\text{a. s. },$$

然后令 $\theta\to1,\alpha\to0,\delta\to0$,即得所要证. □

特别,取 $\psi(t)=e^t$ 得在定理 4.2.23 的条件下有

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\ln|x(t)|^2}{\ln t}\leqslant1,\text{a. s.}.$$

4.2.3 延迟微分方程

现在考虑已于 4.1.3 节中研究过的方程

$$d[x(t)-U(y(t))]=F(t,x(t),y(t))dt+G(t,x(t),y(t))dw(t),\qquad(4.2.42)$$

$$d[x(t)-Ky(t)]=[-Ax(t)+By(t)]dt+G(t,x(t),y(t))dw(t),\qquad(4.2.43)$$

其中 $y(t)=x(t-\delta(t))$. 沿用 4.1.3 节中对函数 $\delta(t)$ 的设定与记号;特别,如(4.1.46)约定 $\tau_0=\inf_{t\geqslant0}\delta(t)$,

$$\begin{cases}\eta = \inf\limits_{t\geq 0}[1-\delta'(t)] > 0, \quad \eta_0 = \sup\limits_{t\geq 0}[1-\delta'(t)] < \infty, \\ \pi_0 = \inf\limits_{t\geq 0}\dfrac{\psi(t-\tau_0)}{\psi(t)}, \quad \rho_0 = \sup\limits_{t\geq 0}\dfrac{\psi(t-\tau_0)}{\psi(t)}.\end{cases} \tag{4.2.44}$$

当 $\delta(t) \equiv \tau$ 时,有 $\eta = \eta_0 = 1, \pi_0 = \pi, \rho_0 = \rho(\pi, \rho$ 依(4.2.4)).

首先建立对应于定理4.1.22的以下基本结果.

定理4.2.24　设 $p \geq 1$；存在半正定矩阵 Q,常数 $\kappa \in [0,1), \lambda \in \mathbf{R}, \mu, \gamma \geq 0$ 与可测函数 $\zeta(t)$,使得 $\zeta(t)\psi^{-\gamma}(t) \in L^1(\mathbf{R}_+)$,且以下条件满足:

$$|U(y)| \leq \kappa |y|, \quad y \in \mathbf{R}^d, \tag{4.2.45}$$

$$\begin{aligned} I \triangleq (p/2)|z|^{p-2}[2z^{\mathrm{T}}F(t,x,y) + |G(t,x,y)|^2 \\ + (p-2)|z|^{-2}|z^{\mathrm{T}}G(t,x,y)|^2] \\ \leq \zeta(t) - \lambda|x|^p + \mu|y|^p \end{aligned} \tag{4.2.46a}$$

或

$$I + (x^{\mathrm{T}}Qx)^{p/2} - \eta(y^{\mathrm{T}}Qy)^{p/2} \leq \zeta(t) + \lambda|x|^p - \mu|y|^p, \tag{4.2.46b}$$

其中 $t \geq 0, x, y \in \mathbf{R}^d, z = x - U(y)$. 设 π, ϕ 依式(4.2.4), η, η_0, ρ_0 依式(4.2.44), $q = \lambda_{\min}(Q), \kappa_0 = \kappa\rho_0^{\gamma/p}$. 则在以下两种情况下方程(4.2.42)的解 p 阶矩 ψ^γ 有界:

(i) 条件(4.2.46a)满足,且

$$\eta^{-1}\mu\rho_0^\gamma \leq \lambda + \gamma\phi(1-\eta^{-1}\kappa_0)(1-\kappa_0)^{p-1}. \tag{4.2.47a}$$

(ii) 条件(4.2.46b)满足,且

$$\begin{aligned} \lambda - \gamma\phi(1-\eta^{-1}\kappa_0)(1-\kappa_0)^{p-1} \\ < [\tau^{-1}(1-\kappa_0)^p] \wedge [\eta_0^{-1}\mu\pi^\gamma + q^{p/2}(1-\rho_0^\gamma)]. \end{aligned} \tag{4.2.47b}$$

若 $\zeta(t) \in L^1(\mathbf{R}_+)$, $\mu \leq \eta\lambda$(对情况(i))或 $\lambda < (\eta_0^{-1}\mu) \wedge [\tau^{-1}(1-\kappa)^p]$(对情况(ii)),则可取 $\gamma = 0$,因而方程(4.2.42)的解 p 阶矩有界.

定理4.2.24显然兼具定理4.1.22与定理4.2.9的特点,下面的证法也是如此.

证　不妨只考虑情况(ii).取定方程(4.2.42)的一个解 $x(t) = x(t,\xi)$,只需证 $h(t)$(记号依(4.1.7))有界.设 $V(t,x)$ 依(4.1.50),则如定理4.1.22之证有

$$\tilde{h}(t) \leq \text{const} + I_1 + I_2 + I_3,$$

其中 $I_1 \sim I_3$ 的意义自明,下面分别估计它们.利用条件(4.2.45)可建立

$$\tilde{h}(t) \geq (1-\kappa_0)^{p-1}[h(t) - \kappa_0 h(t-\delta(t))] \tag{4.2.48}$$

及不等式(4.2.11)的一个修正:

$$H(t) \leq \frac{\|\xi\|_0^p}{\psi^\gamma(-\tau)(1-\kappa_0)} \vee \frac{\tilde{H}(t)}{(1-\kappa_0)^p}, \quad t \geq 0. \tag{4.2.49}$$

利用式(4.2.48),类似于定理4.2.9之证有

$$I_1 = -\gamma \mathrm{E}\int_0^t \psi^{-\gamma}(s)\psi_1(s)|\tilde{x}(s)|^p \mathrm{d}s \leq -\gamma\phi\int_0^t \tilde{h}(s)\mathrm{d}s$$

$$\leqslant \gamma\phi(1-\kappa_0)^{p-1}\left[\kappa_0\int_0^t h(s-\delta(s))\mathrm{d}s-\int_0^t h(s)\mathrm{d}s\right]$$

$$\leqslant \text{const}-\gamma\phi(1-\eta^{-1}\kappa_0)(1-\kappa_0)^{p-1}\int_0^t h(s)\mathrm{d}s;$$

$$I_2=\mathrm{E}\int_0^t \mathrm{d}\psi^{-\gamma}(s)\int_{s-\delta(s)}^s[x^{\mathrm{T}}(\theta)Qx(\theta)]^{p/2}\mathrm{d}\theta$$

$$\leqslant -q^{p/2}(1-\rho_0^\gamma)\int_0^{t-\tau}h(s)\mathrm{d}s;$$

$$I_3\leqslant \text{const}+\lambda\int_0^t h(s)\mathrm{d}s-\mu\mathrm{E}\int_0^t\psi^{-\gamma}(s)\,|\,y(s)\,|^p\mathrm{d}s$$

$$\leqslant \text{const}+\lambda\int_0^t h(s)\mathrm{d}s-\eta_0^{-1}\mu\pi^\gamma\int_0^{t-\tau}h(s)\mathrm{d}s.$$

在不等式(4.2.47b)两端之间插入一非负数 ω，综合对 $I_1\sim I_3$ 的估计得

$$\tilde{h}(t)\leqslant \text{const}+[\lambda-\gamma\phi(1-\eta^{-1}\kappa_0)(1-\kappa_0)^{p-1}]\int_0^t h(s)\mathrm{d}s$$

$$-[q^{p/2}(1-\rho_0^\gamma)+\eta_0^{-1}\mu\pi^\gamma]\int_0^{t-\tau}h(s)\mathrm{d}s$$

$$\leqslant \text{const}+\omega\int_{t-\tau}^t h(s)\mathrm{d}s\leqslant \text{const}+\omega\tau H(t).$$

因 $\omega\tau<(1-\kappa_0)^p$，以上不等式结合式(4.2.49)得 $H(t)\leqslant \text{const}$，如所要证. □

如同定理 4.2.9 一样，对以上证明中出现的 const 作细致的估计，即可得到对方程(4.2.42)解的矩估计式. 例如，在情况(i)之下有

$$\begin{cases}\mathrm{E}\,|\,x(t,\xi)\,|^p\leqslant(1-\kappa_0)^{-p}[\beta\,\|\xi\|_0^p+\|\zeta\psi^{-\gamma}\|_1]\psi^\gamma(t)\ (t\geqslant 0),\\ \beta=\dfrac{(1-\kappa_0)^{p-1}}{\psi^\gamma(-\tau)}\vee\left[(1+\kappa)^p+\dfrac{\tau\gamma\phi\kappa_1}{\eta\psi^\gamma(-\tau)}+\dfrac{\tau\mu}{\eta}\right],\end{cases}\tag{4.2.50}$$

其中 $\kappa_1=\kappa_0(1-\kappa_0)^{p-1}$. 当 $\gamma=0$ 时上式简化为

$$\mathrm{E}\,|\,x(t,\xi)\,|^p\leqslant(1-\kappa)^{-p}\{\|\xi\|_0^p[(1+\kappa)^p+\tau\eta^{-1}\mu]+\|\zeta\|_1\}.\tag{4.2.50$'$}$$

在情况(i)之下，若 $\phi=0,\rho_0<1,\lambda>0$，或 $\phi>0,\kappa_0<\eta$，则当 γ 适当大时条件(4.2.47a)必满足. 这表明在一定意义上可以说“矩 ψ^γ 有界”是很平常的事. 但“矩有界”则远非如此. 若 $\kappa=0,\delta(t)\equiv\tau$，则式(4.2.47a)，(4.2.47b)与(4.2.50)分别简化为

$$\mu\rho^\gamma\leqslant\lambda+\gamma\phi,$$

$$\lambda-\gamma\phi<\tau^{-1}\wedge[q^{p/2}(1-\rho^\gamma)+\mu\pi^\gamma],$$

$$\mathrm{E}\,|\,x(t,\xi)\,|^p\leqslant\{\|\xi\|_0^p[\psi^{-\gamma}(-\tau)\vee(1+\tau\mu)]+\|\zeta\psi^{-\gamma}\|_1\}\psi^\gamma(t).$$

若取 $\psi(t)=\mathrm{e}^t$，则 $\phi=1,\rho_0=\mathrm{e}^{-\tau_0}$，当 $\tau_0>0,\gamma$ 适当大时 $\kappa_0=\kappa\mathrm{e}^{-\gamma\tau_0/p}<\eta$，因而条件(4.2.47a)必满足. 若取 $\psi(t)=1+\sigma t(0<\sigma<1/\tau)$，则 $\phi=0,\rho_0=1$，条件(4.2.47a)简化为 $\mu\leqslant\eta\lambda$，由此得不出关于多项式有界的有用结论.

更常用的是对应于定理4.1.23的以下结果.

定理4.2.25　设存在半正定矩阵 Q，常数 $\kappa\in[0,1)$，$\lambda\in\mathbf{R}$，$\mu,\gamma\geqslant 0$ 与可测函数 $\zeta(t)$，使得 $\zeta(t)\psi^{-\gamma}(t)\in L^1(\mathbf{R}_+)$，且条件(4.2.45)及以下条件满足：

$$2z^{\mathrm{T}}F(t,x,y)+|G(t,x,y)|^2\leqslant\zeta(t)-\lambda|x|^2+\mu|y|^2\quad(4.2.51\mathrm{a})$$

或

$$2z^{\mathrm{T}}F(t,x,y)+|G(t,x,y)|^2+x^{\mathrm{T}}Qx-\eta y^{\mathrm{T}}Qy$$
$$\leqslant\zeta(t)+\lambda|x|^2-\mu|y|^2,\quad t\geqslant 0,x,y\in\mathbf{R}^d,z=x-U(y).\quad(4.2.51\mathrm{b})$$

则在以下两种情况下方程(4.2.42)的解均方 ψ^γ 有界，在情况(i)之下 a.s. $\psi^{\gamma/2}$ 有界：

(i) 条件(4.2.51a)满足，且

$$\eta^{-1}\mu\rho_0^\gamma\leqslant\lambda+\gamma\phi(1-\eta^{-1}\kappa_0)(1-\kappa_0).\quad(4.2.52\mathrm{a})$$

(ii) 条件(4.2.51b)满足，且

$$\lambda-\gamma\phi(1-\eta^{-1}\kappa_0)(1-\kappa_0)<[q(1-\rho_0^\gamma)+\eta_0^{-1}\mu\pi^\gamma]\wedge[\tau^{-1}(1-\kappa_0)^2].\quad(4.2.52\mathrm{b})$$

若 $\zeta(t)\in L^1(\mathbf{R}_+)$，$\mu\leqslant\eta\lambda$（对情况(i)）或 $\lambda<(\eta_0^{-1}\mu)\wedge[\tau^{-1}(1-\kappa)^2]$（对情况(ii)），则方程(4.2.42)的解均方有界；在 $\mu\leqslant\eta\lambda$ 的情况下 a.s. 有界，且成立

$$\mathrm{E}|x(t,\xi)|^2\leqslant(1-\kappa)^{-2}\{\|\xi\|_0^2[(1+\kappa)^2+\tau\eta^{-1}\mu)]+\|\zeta\|_1\}.\quad(4.2.53)$$

对应于定理4.1.24有以下结果：

定理4.2.26　设 $p\geqslant 1$；存在常数 $\kappa\in[0,1)$，$c_1,c_2>0$，$\lambda\in\mathbf{R}$，$\mu,\gamma\geqslant 0$，函数 $V(t,x)\in C^{1,2}(\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^d)$，$p_i(x)$，$q_i(x)\in C(\mathbf{R}^d,\mathbf{R}_+)$ 及函数 $\zeta(t)$，半正定矩阵 Q，使得 $\eta p_i(x)\geqslant\rho_0^\gamma q_i(x)(\forall x\in\mathbf{R}^d)$，$\zeta(t)\psi^{-\gamma}(t)\in L^1(\mathbf{R}_+)$，且条件(4.2.8)，(4.2.45)及以下两条件之一满足：

$$\mathscr{L}V(t,x,y)\leqslant\zeta(t)-\lambda|x|^p+\mu|y|^p-\sum_i[p_i(x)-q_i(y)],\quad(4.2.46\mathrm{a})'$$

$$\mathscr{L}V(t,x,y)+(x^{\mathrm{T}}Qx)^{p/2}-\eta(y^{\mathrm{T}}Qy)^{p/2}$$
$$\leqslant\zeta(t)+\lambda|x|^p-\mu|y|^p-\sum_i[p_i(x)-q_i(y)],\quad(4.2.46\mathrm{b})'$$

其中 $t\geqslant 0$，$x,y,\in\mathbf{R}^d$；设 π,ϕ 依式(4.2.4)，η,η_0,ρ_0 依式(4.2.44)，$\kappa_0=\kappa\rho_0^{\gamma/p}$. 则在以下两种情况下方程(4.2.42)的解 p 阶矩 ψ^γ 有界，在情况(i)之下 a.s. $\psi^{\gamma/p}$ 有界：

(i) 条件(4.2.46a)′满足，且

$$\eta^{-1}\mu\rho_0^\gamma\leqslant\lambda+c_1\gamma\phi(1-\eta^{-1}\kappa_0)(1-\kappa_0)^{p-1}.\quad(4.2.47\mathrm{a})'$$

(ii) 条件(4.2.46b)′满足，且

$$\lambda-c_1\gamma\phi(1-\eta^{-1}\kappa_0)(1-\kappa_0)^{p-1}$$

$$< [c_1\tau^{-1}(1-\kappa_0)^p] \wedge [\eta_0^{-1}\mu\pi^\gamma + \lambda_{\min}^{p/2}(Q)(1-\rho_0^\gamma)]. \qquad (4.2.47\mathrm{b})'$$

将定理4.2.25用于方程(4.2.43)得(对照定理4.1.25)

定理4.2.27 设 $\kappa \triangleq \|K\| < 1$；存在常数 $\lambda,\mu,\nu \in \mathbf{R},\gamma \geq 0$，函数 $\zeta(t)$ 及半正定矩阵 Q，使得 $\zeta(t)\psi^{-\gamma}(t) \in L^1(\mathbf{R}_+)$，$\lambda_{\max}(H) \leq -\lambda$，$H$ 依(4.1.57)，且

$$|G(t,x,y)|^2 \leq \zeta(t) + \mu|x|^2 + \nu|y|^2, \quad t \geq 0, x,y \in \mathbf{R}^d. \qquad (4.2.54)$$

则当以下两条件之一满足时方程(4.2.43)的解均方 ψ^γ 有界，在条件(4.2.55a)之下 a.s. $\psi^{\gamma/2}$ 有界：

$$\eta^{-1}\rho_0^\gamma(\|B + A^{\mathrm{T}}K\| + \nu - s)^+$$
$$\leq \gamma\phi(1-\eta^{-1}\kappa_0)(1-\kappa_0) + \sigma - \mu - \|B + A^{\mathrm{T}}K\|, \qquad (4.2.55\mathrm{a})$$

$$\mu - \lambda - \gamma\phi(1-\eta^{-1}\kappa_0)(1-\kappa_0)$$
$$< [q(1-\rho_0^\gamma) + \eta_0^{-1}\pi^\gamma(\lambda - \nu)] \wedge [\tau^{-1}(1-\kappa_0)^2], \quad \lambda \geq \nu, \qquad (4.2.55\mathrm{b})$$

其中 π,ϕ 依式(4.2.4)，η,η_0,ρ_0 依式(4.2.44)，$\kappa_0 = \kappa\rho_0^{\gamma/2}, s = \lambda_{\min}(B^{\mathrm{T}}K + K^{\mathrm{T}}B)$，$\sigma = \lambda_{\min}(A + A^{\mathrm{T}}), q = \lambda_{\min}(Q)$. 若 $\zeta(t) \in L^1(\mathbf{R}_+)$，

$$\eta^{-1}(\|B + A^{\mathrm{T}}K\| + \nu - s)^+ \leq \sigma - \mu - \|B + A^{\mathrm{T}}K\| \qquad (4.2.56\mathrm{a})$$

或

$$\mu - \lambda < [\eta_0^{-1}(\lambda - \nu)] \wedge [\tau^{-1}(1-\kappa)^2], \qquad \lambda \geq \nu, \qquad (4.2.56\mathrm{b})$$

则方程(4.2.43)的解均方有界，当条件(4.2.56a)满足时 a.s. 有界，且成立

$$\mathrm{E}|x(t,\xi)|^2 \leq \frac{\|\xi\|_0^2[(1+\kappa)^2 + \eta^{-1}\tau(\|B + A^{\mathrm{T}}K\| + \nu - s)^+] + \|\zeta\|_1}{(1-\kappa)^2}. \qquad (4.2.57)$$

若取 $Q = qI$，假定

$$q = \frac{\sigma - s}{1+\eta} \geq 0, \quad \lambda = \frac{\eta\sigma + s}{1+\eta} - \|B + A^{\mathrm{T}}K\|, \qquad (4.2.58)$$

则如在4.1.3节中所见，必有 $\lambda_{\max}(H) \leq -\lambda$. 若进而设 $\eta = \eta_0 = 1, \phi = 1$，则式(4.2.58)与(4.2.55a)，(4.2.55b)分别简化为

$$q = (\sigma - s)/2, \quad \lambda = (\sigma + s)/2 - \|B + A^{\mathrm{T}}K\|, \qquad (4.2.59)$$

$$\rho_0^\gamma(\|B + A^{\mathrm{T}}K\| + \nu - s)^+ \leq \gamma(1-\kappa_0)^2 + \sigma - \mu - \|B + A^{\mathrm{T}}K\|, \qquad (4.2.60\mathrm{a})$$

$$\mu - \lambda - \gamma(1-\kappa_0)^2$$
$$< [q(1-\rho_0^\gamma) + \pi^\gamma(\lambda - \nu)] \wedge [\tau^{-1}(1-\kappa_0)^2], \quad \lambda \geq \nu. \qquad (4.2.60\mathrm{b})$$

于是由定理4.2.27得

推论4.2.28 设 $\kappa \triangleq \|K\| < 1, \delta(t) \equiv \tau, \phi = 1, q$ 与 λ 依式(4.2.59)，其中

$$\sigma = \lambda_{\min}(A + A^{\mathrm{T}}) \geq \lambda_{\min}(B^{\mathrm{T}}K + K^{\mathrm{T}}B) = s. \qquad (4.2.61)$$

存在常数 $\mu,\nu \in \mathbf{R},\gamma \geq 0$ 与函数 $\zeta(t)$，使得条件(4.2.54)满足且 $\zeta(t)\psi^{-\gamma}(t) \in L^1(\mathbf{R}_+)$. 则当条件(4.2.60a)满足时方程(4.2.43)的解均方 ψ^γ 有界且 a.s. $\psi^{\gamma/2}$

有界；当条件(4.2.60b)满足时方程(4.2.43)的解均方 ψ^γ 有界.

用一个例子来对比说明此处与4.1.3节中的结果.

例4.2.29　考虑一维线性方程(参照例4.1.27)

$$\begin{aligned} &\mathrm{d}[x(t)-0.2y(t)] \\ &=[-ax(t)+4y(t)]\mathrm{d}t+x(t)\mathrm{d}w_1(t)+\sqrt{3}y(t)\mathrm{d}w_2(t), \end{aligned} \quad (4.2.62)$$

其中 $y(t)=x(t-0.2)$, $w=(w_1,w_2)^{\mathrm{T}}$ 是一个二维Brown运动. 取 $\zeta(t)\equiv 0$, $\mu=1$, $\nu=3$ 使 $G(t,x,y)=(x,\sqrt{3}y)$ 满足条件(4.2.54). 由式(4.2.61)有 $\sigma=2a$, $s=1.6$; 依式(4.2.59)有 $q=a-0.8$, $\lambda=0.8a-3.2$.

(i) 取 $\psi(t)=\mathrm{e}^{-t}$ 应用推论4.1.26. 此时有 $\rho=\pi=\mathrm{e}^{0.2}$, $\phi=1$ (依(4.1.4)). 由式(4.1.59a)与(4.1.67)分别得 $a>6.5$ 与 $a>7.75$, 应取前者. (4.1.60a)可写成

$$\mathrm{e}^{0.2\varepsilon}(5.4+0.2a)+\varepsilon(1+0.2\mathrm{e}^{0.1\varepsilon})^2=1.8a-5.$$

以 $\varepsilon(a)$ 记以上方程的唯一正解，则用初等方法可说明：$\varepsilon(a)$ 对 $a(>6.5)$ 严格单调增, $\varepsilon(a)\to 10.986(a\to\infty)$. 因此，当 $a>6.5$ 时方程(4.2.62)的零解均方指数稳定与a.s.指数稳定，其矩Liapunov指数 $\gamma=\varepsilon(a)<10.986$. 例如，当 $a=6.6, 7.75$ 与 10^4 时，分别有 $\gamma=0.0575, 0.6752, 10.964$.

(ii) 取 $\gamma=0$ 应用推论4.2.28. 由条件(4.2.56a)与(4.2.56b)分别得 $a\geqslant 6.5$ 与 $a>7.75$, 应取前者. 因此，当 $a\geqslant 6.5$ 时方程(4.2.62)的解均方有界与a.s.有界，且成立(用式(4.2.57))

$$\mathrm{E}|x(t,\xi)|^2\leqslant\|\xi\|_0^2(3.9375+0.0625a),\quad t\geqslant 0.$$

(iii) 取 $\psi(t)=\mathrm{e}^{t}$ 应用推论4.2.28. 此时有 $\pi=\rho=\mathrm{e}^{-0.2}$, $\phi=1$(依(4.2.4)); 式(4.2.60a)可写成

$$\mathrm{e}^{-0.2\gamma}(5.4+0.2a)^+-\gamma(1-0.2\mathrm{e}^{-0.1\gamma})^2\leqslant 1.8a-5.$$

以 $\gamma(a)$ 记以上不等式的最小非负解，则用初等方法可说明：$\gamma(a)$ 对 $a\in\mathbf{R}$ 单调减，当 $a\geqslant 6.5$ 时 $\gamma(a)=0$, $\gamma(0)=7.55$, 当 $a\to-\infty$ 时 $\gamma(a)\to\infty$. 上述的 $\gamma(a)$ 就是方程(4.2.62)解的矩Liapunov指数.

综上可见，情况(i)~(iii)中 a 满足的条件递次减弱：

$$a>6.5;\quad a\geqslant 6.5;\quad a>-\infty.$$

这当然是合理的.

至此，对于SDDE的矩稳定性与矩有界性的判别已提供了较多的方法. 而判定轨道稳定性与轨道有界性的方法则略显欠缺. 迄今颇有吸引力的结果只是定理4.1.19与定理4.2.20, 下面考虑将其用于稍特殊的方程

$$\mathrm{d}x(t)=|\psi_1(t)|[-Ax(t)+By(t)]\mathrm{d}t+\sqrt{|\psi_1(t)|}G(t,x(t),y(t))\,\mathrm{d}w(t). \quad (4.2.63)$$

不过，我们宁可考虑更一般的方程：

$$\mathrm{d}x(t) = |\psi_1(t)|\,[-Ax(t) + Bh(x_t)]\mathrm{d}t + \sqrt{|\psi_1(t)|}\,g(t,x_t)\mathrm{d}w(t), \qquad (4.2.64)$$

其中 $h: C \to \mathbf{R}^d$. 假定方程(4.2.64)已满足存在定理之条件.

定理 4.2.30 设存在常数 $\lambda,\lambda_0,\mu,\mu_0$ 与 $\zeta(t) \in L^1(\mathbf{R}_+)$，使得以下条件满足：

$$|g(t,\varphi)|^2 \leqslant (\zeta(t)+\mu_0)|\varphi(0)|^2 + \mu|h(\varphi)|^2,\quad t \geqslant 0, \varphi \in C, \qquad (4.2.65)$$

$$|\varphi^{\mathrm{T}}(0)g(t,\varphi)|^2 \geqslant |\varphi(0)|^2[\lambda_0|\varphi(0)|^2 + \lambda|h(\varphi)|^2],\quad t \geqslant 0, \varphi \in C, \qquad (4.2.66)$$

$$\gamma = \pm[\mu_0 - \sigma - 2\lambda_0 + \|B\|^2(2\lambda-\mu)^{-1}], \qquad (4.2.67)$$

其中 $\pm 1 = \operatorname{sgn}\psi'(t)$, $\sigma = \lambda_{\min}(A + A^{\mathrm{T}})$. 假定 $\gamma \geqslant 0$（若 $\psi' > 0$）或 $\gamma > 0$（若 $\psi' < 0$）. 若 $x(t)$ 是方程(4.2.64)的解，$\forall t \geqslant 0$，有 $x(t) \neq 0$, a.s., $2\lambda > \mu$，则

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\ln|x(t)|^2}{|\ln\psi(t)|} \leqslant \pm\gamma, \text{a.s.}. \qquad (4.2.68)$$

证 只需对 $V = |x|^2$ 验证条件(4.2.38)或(4.1.41). 设 $\delta \in (0,1)$ 充分接近于 1，约定 $x = x(t)$, $h = h(x_t)$, $\psi_1 = \psi_1(t)$, $\zeta = \zeta(t)$，则用条件(4.2.65)与(4.2.66)得

$$\begin{aligned}
I &\triangleq |x|^{-2}LV(t,x) - 2\delta|\psi_1||x|^{-4}|x^{\mathrm{T}}g(t,x_t)|^2 \\
&\leqslant |x|^{-2}|\psi_1|\,[2x^{\mathrm{T}}(-Ax+Bh) + (\zeta+\mu_0)|x|^2 \\
&\quad + \mu|h|^2 - 2\delta(\lambda_0|x|^2 + \lambda|h|^2)] \\
&\leqslant |x|^{-2}|\psi_1|\,[-\sigma|x|^2 + \varepsilon|h|^2 + \varepsilon^{-1}\|B\|^2|x|^2 \qquad (\varepsilon > 0) \\
&\quad + (\mu_0 - 2\delta\lambda_0)|x|^2 + (\mu - 2\delta\lambda)|h|^2] + \zeta|\psi_1| \\
&= \mu(\delta)\psi_1 + \beta|\psi_1||x|^{-2}|h|^2 + \zeta|\psi_1|,
\end{aligned}$$

其中

$$\pm\mu(\delta) = -\sigma + \varepsilon^{-1}\|B\|^2 + \mu_0 - 2\delta\lambda_0,\quad \beta = \varepsilon + \mu - 2\delta\lambda.$$

因 $2\lambda > \mu$, $\delta \approx 1$，故可取 $\varepsilon = 2\delta\lambda - \mu > 0$，使 $\beta = 0$，

$$\mu(\delta) = \pm[\mu_0 - \sigma - 2\delta\lambda_0 + \|B\|^2(2\delta\lambda-\mu)^{-1}],\quad \mu(1) = \gamma. \qquad (\text{用}(4.2.67))$$

于是可用定理 4.2.20 或定理 4.1.19 得出所要结果. □

将定理 4.2.30 用于方程(4.2.63)得到

推论 4.2.31 设存在常数 $\lambda,\lambda_0,\mu,\mu_0$ 与 $\zeta(t) \in L^1(\mathbf{R}_+)$，使 $2\lambda > \mu$ 且条件(4.2.67)及以下条件满足：

$$|G(t,x,y)|^2 \leqslant (\mu_0 + \zeta(t))|x|^2 + \mu|y|^2,\quad t \geqslant 0, x,y \in \mathbf{R}^d,$$

$$|x^{\mathrm{T}}G(t,x,y)|^2 \geqslant |x|^2(\lambda_0|x|^2 + \lambda|y|^2),\quad t \geqslant 0, x,y \in \mathbf{R}^d.$$

若 $x(t)$ 是方程(4.2.63)的解，$\forall t \geqslant 0$，有 $x(t) \neq 0$. a.s.，则式(4.2.68)成立.

§4.3　无界性与持久性

本节考虑的问题与前两节恰好相反：随机微分方程的解在长期内是否无界地增长，或者最终越出某个限定的范围之外？此问题的实际意义显而易见：对于描述某个发展过程的解，常常需要了解它在长期内的增长程度；倘不能保持长期增长，则关心它是否最终归于消亡. 而这就是现在要考虑的无界性与持久性问题.

如同有界性与稳定性问题一样，我们仍以某个给定的函数 $\psi(t)$ 作为比较标准. 只是现在用到恰好相反的不等式估计，这就不能不用到一些颇不相同的方法，并不能完全套用前两节的推理模式. 一个需首先提到的重大差别是，(4.1.13)，(4.1.37)与(4.2.11)，(4.2.35)这类不等式对于无界性问题已不能起作用. 这就使得对于中立型 SFDE 已不能用类似于前两节的方法. 因此，本节限于考虑方程

$$dx(t) = f(t,x_t)dt + g(t,x_t)dw(t) \tag{4.3.1}$$

及其如下特殊情况：

$$dx(t) = f(t,x(t))dt + g(t,x(t))dw(t), \tag{4.3.2}$$

$$dx(t) = F(t,x(t),y(t))dt + G(t,x(t),y(t))dw(t), \tag{4.3.3}$$

$$dx(t) = [Ax(t) + By(t)]dt + G(t,x(t),y(t))dw(t). \tag{4.3.4}$$

对于以上方程中出现的函数，仍保持前两节中的设定. 此外，考虑到在本节中应用定理3.1.7是关键的，假定 f,g,F,G 等满足线性增长条件. 仍设 $y(t) = x(t-\delta(t))$，$\delta(t) \in C^1(\mathbf{R}_+)$；沿用(4.1.46)中的约定：

$$0 \leqslant \tau_0 \leqslant \delta(t) \leqslant \tau,\quad 0 < \eta \leqslant 1 - \delta'(t) \leqslant \eta_0 < \infty,\quad t \geqslant 0. \tag{4.3.5}$$

对于无界性问题，一个关键事实是：初始函数 $\xi(\theta)$ 在 $\theta = 0$ 处的某种控制条件起重要作用. 鉴于此，引入记号：

$$\begin{cases} S_{\beta,p} = \{\varphi \in C^b_{\mathcal{F}_0}(\Omega,C) : \mathrm{E}|\varphi(0)|^p \geqslant \beta\|\varphi\|_0^p\}, & (4.3.6\mathrm{a})\\ \Sigma_{\beta,p} = \{\varphi \in C^b_{\mathcal{F}_0}(\Omega,C) : [\varphi]^p \geqslant \beta\mathrm{E}|\varphi(0)|^p\}, & (4.3.6\mathrm{b})\\ [\varphi]^p = \inf\limits_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0}\mathrm{E}|\varphi(\theta)|^p. & (4.3.6\mathrm{c})\end{cases}$$

自然要求其中 $\beta \in (0,1]$，$p > 0$. 约定 $S_\beta = S_{\beta,2}$，$\Sigma_\beta = \Sigma_{\beta,2}$. 若 $\tau = 0$，则显然 $\mathbf{R}^d \subset S_{1,p} = \Sigma_{1,p} = C^b_{\mathcal{F}_0}(\Omega,\mathbf{R}^d)$.

仍设 $\psi \in C^1[-\tau,\infty)$ 是给定的正值单调函数，$\psi(0) = 1$，$\psi_1(t) = \psi'(t)/\psi(t)$. $\psi(t)$ 单调增与单调减这两种情况仍然具有实质差别，以下两小节分别予以考虑.

4.3.1　无界性

本小节中函数 $\psi(t)$ 依§4.2，特别沿用(4.2.4)，(4.2.44)中的约定：

$$\begin{cases}0 < \pi \leqslant \dfrac{\psi(t-\tau)}{\psi(t)} \leqslant \rho \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \phi \leqslant \psi_1(t) \leqslant \phi_0 < \infty, \\ 0 < \pi_0 \leqslant \dfrac{\psi(t-\tau_0)}{\psi(t)} \leqslant \rho_0 \leqslant 1, \quad t \geqslant 0.\end{cases} \tag{4.3.7}$$

以下定义与定义 4.2.1、定义 4.2.14 恰相对应.

定义 4.3.1 设 $p,\gamma > 0$. 若方程(4.3.1)的解 $x(t,\xi)$ 满足

$$\varliminf_{t\to\infty} \frac{\ln \mathrm{E}|x(t,\xi)|^p}{\ln \psi(t)} \geqslant \gamma, \tag{4.3.8}$$

则称 $x(t,\xi)$ 为 p 阶矩 ψ^γ 无界;若

$$\varliminf_{t\to\infty} \frac{\ln |x(t,\xi)|}{\ln \psi(t)} \geqslant \gamma, \text{a. s.}, \tag{4.3.9}$$

则称 $x(t,\xi)$ 为 a. s. ψ^γ 无界.

"均方 ψ^γ 无界"、"指数无界"与"多项式无界"的意义自明.

条件(4.3.8)相当于

$$\inf_{t\geqslant 0} \psi^{-\mu}(t)\mathrm{E}|x(t,\xi)|^p > 0, \quad \forall \mu \in (0,\gamma).$$

而这通常又代以稍强的条件

$$\mathrm{E}|x(t,\xi)|^p \geqslant c\,\psi^\gamma(t), \quad t \geqslant 0,$$

其中 $c > 0$ 与 t 无关(但一般与 γ,ξ 有关),其中 c,γ 愈大,结果就愈好. 对条件(4.3.9)可作类似说明. 为得出所要不等式,估计函数 $h(t)$(依(4.1.7))的下界是关键的.

首先给出对应于定理 4.2.2 的以下简单结果.

定理 4.3.2 设 $p > 0$;存在 $V(t,x) \in C^{1,2}(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d)$,可测函数 $\zeta(t)$ 与常数 $c_1, c_2 > 0, \gamma \geqslant 0$,使得 $\zeta(t)\psi^{-\gamma}(t) \in L^1(\mathbf{R}_+)$,且以下条件满足:

$$c_1|x|^p \leqslant V(t,x) \leqslant c_2|x|^p, \quad t \geqslant 0, x \in \mathbf{R}^d, \tag{4.3.10}$$

$$\mathscr{L}V(t,\varphi) \geqslant \gamma\psi_1(t)V(t,\varphi(0)) - \zeta(t), \quad t \geqslant 0, \varphi \in C, \tag{4.3.11}$$

其中 $\mathscr{L}V(t,\varphi)$ 依(3.2.3). 则方程(4.3.1)的解 $x(t,\xi)$ 满足

$$\mathrm{E}|x(t,\xi)|^p \geqslant c_2^{-1}[c_1\mathrm{E}|\xi(0)|^p - \|\zeta\psi^{-\gamma}\|_1]\psi^\gamma(t), \quad t \geqslant 0. \tag{4.3.12}$$

因此,当 $c_1\mathrm{E}|\xi(0)|^p > \|\zeta\psi^{-\gamma}\|_1, \gamma > 0$ 时 $x(t,\xi)$ 为 p 阶矩 ψ^γ 无界.

证 取定方程(4.3.1)的一个解 $x(t) = x(t,\xi)$,由条件(4.3.10)与(4.3.11)有

$$\begin{aligned} &c_2\psi^{-\gamma}(t)|x(t)|^p \geqslant \psi^{-\gamma}(t)V(t,x(t)) \\ &= V(0,x(0)) + \int_0^t \psi^{-\gamma}(s)[LV(s,x(s)) - \gamma\psi_1(s)V(s,x(s))]\mathrm{d}s + M(t) \\ &\geqslant V(0,x(0)) - \|\zeta\psi^{-\gamma}\|_1 + M(t), \end{aligned}$$

其中 $M(t)$ 是一实值连续局部鞅，$M(0)=0$. 于是由定理3.1.7有

$$c_2h(t)\geqslant EV(0,x(0))-\|\zeta\psi^{-\gamma}\|_1\geqslant c_1E|\xi(0)|^p-\|\zeta\psi^{-\gamma}\|_1,$$

这正好得到要证的式(4.3.12). □

鉴于在本节中定理3.1.7都是在同一形式下应用,下面不妨直接写出应用定理3.1.7的结果,而不再明显提到它.

对于方程(4.3.2),条件(4.3.11)可写成

$$\mathscr{L}V(t,x)\geqslant\gamma\psi_1(t)V(t,x)-\zeta(t),\quad t\geqslant 0,x\in\mathbf{R}^d.\qquad(4.3.11)'$$

于是由定理4.3.2得到

推论4.3.3 设 $p>0$；存在 $V(t,x)\in C^{1,2}(\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^d)$，可测函数 $\zeta(t)$ 与常数 $c_1,c_2>0,\gamma\geqslant 0$，使得 $\zeta(t)\psi^{-\gamma}(t)\in L^1(\mathbf{R}_+)$，且条件(4.3.10)与(4.3.11)′满足，则对任给 $x_0\in\mathbf{R}^d$，方程(4.3.2)的解 $x(t,x_0)$ 满足

$$E|x(t,x_0)|^p\geqslant c_2^{-1}(c_1|x_0|^p-\|\zeta\psi^{-\gamma}\|_1)\psi^\gamma(t).\qquad(4.3.12)'$$

若取 $\psi(t)=e^t,\zeta(t)\equiv 0$，则(4.3.11)′可写成 $\alpha\geqslant\gamma$(α 依(2.3.31))，而式(4.3.12)′则与(2.3.23b)一致. 但不能因此就说方程(4.3.2)的零解指数不稳定,因为此处并未预设方程有零解!

更有趣的是,对于无界性亦可建立某种 Razumikhin 定理. 如同前面多次所见，涉及 Razumikhin 定理时总假定函数 f 与 g 连续.

定理4.3.4 设 $p>0$；存在 $V(t,x)\in C^{1,2}([-\tau,\infty)\times\mathbf{R}^d)$，$\zeta(t)\in C(\mathbf{R}_+)$ 与常数 $c_1,c_2,\gamma>0,q\in(0,\pi^\gamma]$($\pi$ 依式(4.3.7))，使得 $\zeta(t)\psi^{-\gamma}(t)\in L^1(\mathbf{R}_+)$，且条件(4.3.10)及以下条件满足：

$$\begin{cases}\varphi\in L^p_{\mathscr{F}_t}(\Omega,C),EV(t+\theta,\varphi(\theta))\geqslant qEV(t,\varphi(0))(\ \forall\theta\in[-\tau,0])\\ \Rightarrow E\mathscr{L}V(t,\varphi)\geqslant\gamma\psi_1(t)EV(t,\varphi(0))-\zeta(t),\quad t\geqslant 0.\end{cases}\qquad(4.3.13)$$

则对任给 $\beta\in(0,1],\xi\in\Sigma_{\beta,p}$，方程(4.3.1)的解 $x(t,\xi)$ 满足

$$c_2E|x(t,\xi)|^p\geqslant[\beta c_1E|\xi(0)|^p-\|\zeta\psi^{-\gamma}\|_1]\psi^\gamma(t),\quad t\geqslant 0.\qquad(4.3.14)$$

证 取定 $\beta\in(0,1],\xi\in\Sigma_{\beta,p}$，令 $x(t)=x(t,\xi)$. 只需以 $\mu\in(0,\gamma)$ 取代 γ 证式(4.3.14)；而由条件(4.3.10)，为此又只需证

$$\begin{aligned}W(t)&\triangleq\psi^{-\mu}(t)EV(t,x(t))+\int_0^t\psi^{-\mu}(s)\zeta(s)ds\\&\geqslant\beta c_1E|\xi(0)|^p\triangleq\beta_1.\end{aligned}\qquad(4.3.15)$$

不妨设 $\beta_1>0$. 易见 $W(0)\geqslant\beta_1$. 若式(4.3.15)不对所有 $t\geqslant 0$ 成立,则有最小的 $r\in\mathbf{R}_+$ 使得在 $[0,r]$ 上 $W(t)\geqslant\beta_1$. 若 $0\leqslant t\in[r-\tau,r]$，则

$$\begin{aligned}\mathrm{E}V(t,x(t)) &= \psi^{\mu}(t)\Big[W(t)-\int_0^t\psi^{-\mu}(s)\zeta(s)\mathrm{d}s\Big]\\ &\geqslant \psi^{\mu}(t)\Big[W(r)-\int_0^r\psi^{-\mu}(s)\zeta(s)\mathrm{d}s\Big]\\ &= \psi^{\mu}(t)\psi^{-\mu}(r)\mathrm{E}V(r,x(r))\\ &\geqslant \pi^{\mu}\mathrm{E}V(r,x(r))\geqslant q\mathrm{E}V(r,x(r)).\end{aligned}$$

若 $r-\tau\leqslant t<0$，则

$$\begin{aligned}\mathrm{E}V(t,x(t))&\geqslant c_1\mathrm{E}\,|\,x(t)\,|^p\geqslant c_1[\xi]^p\geqslant\beta\,c_1\mathrm{E}\,|\,\xi(0)\,|^p \qquad (\text{用}(4.3.6))\\ &= W(r)\geqslant\psi^{-\mu}(\tau)\mathrm{E}V(r,x(r))\geqslant q\mathrm{E}V(r,x(r)).\end{aligned}$$

这就可对 $\varphi=x_r$ 应用条件(4.3.13)得到

$$\begin{aligned}\mathrm{E}LV(r,x(r))&\geqslant\gamma\psi_1(r)\mathrm{E}V(r,x(r))-\zeta(r)\\ &>\mu\psi_1(r)\mathrm{E}V(r,x(r))-\zeta(r),\end{aligned}$$

其中用到 $\gamma>\mu$ 与 $\psi_1(r)\mathrm{E}V(r,x(r))>0$(何故?). 取 $\delta>0$ 充分小，则

$$W(t)\Big|_r^{r+\delta}=\mathrm{E}\int_r^{r+\delta}\psi^{-\mu}(t)[LV(t,x(t))-\mu\psi_1(t)V(t,x(t))+\zeta(t)]\mathrm{d}t\geqslant 0,$$

因而 $W(r+\delta)\geqslant W(r)$，得出矛盾. 故必 $W(t)\geqslant\beta_1(\ \forall t\geqslant 0)$，如所要证. □

取 $V=|\,x\,|^p,\psi(t)=\mathrm{e}^t$ 或 $\psi(t)=1+\sigma t(0<\sigma<1/\tau)$，由定理4.3.4得

推论 4.3.5 设 $V=|\,x\,|^p,p>0,\gamma>0,\zeta(t)\in C(\mathbf{R}_+)$. 若 $\zeta(t)\mathrm{e}^{-\gamma t}\in L^1(\mathbf{R}_+)$，存在 $q\in(0,\mathrm{e}^{-\gamma\tau}]$，使得

$$[\varphi]^p\geqslant q\mathrm{E}\,|\,\varphi(0)\,|^p\Rightarrow\mathrm{E}\mathscr{L}V(t,\varphi)\geqslant\gamma\mathrm{E}\,|\,\varphi(0)\,|^p-\zeta(t),\quad \varphi\in L^p_{\mathscr{F}_t}(\Omega,C),$$

则对任给 $\beta\in(0,1],\xi\in\Sigma_{\beta,p}$，方程(4.3.1)的解 $x(t,\xi)$ 满足

$$\mathrm{E}\,|\,x(t,\xi)\,|^p\geqslant[\beta\mathrm{E}\,|\,\xi(0)\,|^p-\|\zeta(t)\mathrm{e}^{-\gamma t}\|_1]\mathrm{e}^{\gamma t},\quad t\geqslant 0.\quad(4.3.16)$$

若存在 $\sigma\in(0,1/\tau),q\in(0,(1-\sigma\tau)^{\gamma}]$，使得 $\zeta(t)(1+\sigma t)^{-\gamma}\in L^1(\mathbf{R}_+)$,

$$\begin{aligned}&[\varphi]^p\geqslant q\mathrm{E}\,|\,\varphi(0)\,|^p(\varphi\in L^p_{\mathscr{F}_t}(\Omega,C))\\ &\Rightarrow\mathrm{E}\mathscr{L}V(t,\varphi)\geqslant\gamma\sigma(1+\sigma t)^{-1}\mathrm{E}\,|\,\varphi(0)\,|^p-\zeta(t),\end{aligned}$$

则对任给 $\beta\in(0,1],\xi\in\Sigma_{\beta,p}$，有

$$\mathrm{E}\,|\,x(t,\xi)\,|^p\geqslant[\beta\mathrm{E}\,|\,\xi(0)\,|^p-\|\zeta(t)(1+\sigma t)^{-\gamma}\|_1](1+\sigma t)^{\gamma}.\quad(4.3.17)$$

与定理4.2.6相对照，有如下更便于应用的结果.

定理 4.3.6 设 $V=|\,x\,|^p,p>0,\zeta(t)\in C(\mathbf{R}_+)$；存在常数 $\lambda_0,\lambda_1,\lambda_1\geqslant 0,\lambda_1>\lambda_0$，使得

$$\mathrm{E}\mathscr{L}V(t,\varphi)\geqslant\psi_1(t)[-\lambda_0\mathrm{E}\,|\,\varphi(0)\,|^p+\lambda_1[\varphi]^p]-\zeta(t),\quad\varphi\in L^p_{\mathscr{F}_t}(\Omega,C).\tag{4.3.18}$$

设 γ 是以下方程的唯一正解:

$$\lambda_1\pi^\gamma - \gamma = \lambda_0, \qquad (\pi \text{ 依}(4.3.7)) \qquad (4.3.19)$$

$\zeta(t)\psi^{-\gamma}(t) \in L^1(\mathbf{R}_+)$. 则对任给 $\beta \in (0,1]$, $\xi \in \Sigma_{\beta,p}$, 方程(4.3.1)的解 $x(t,\xi)$ 满足

$$E|x(t,\xi)|^p \geqslant [\beta E|\xi(0)|^p - \|\zeta\psi^{-\gamma}\|_1]\psi^\gamma(t), \quad t \geqslant 0.$$

证 注意到 $\pi \leqslant 1$, 易见方程(4.3.19)有唯一正解 γ. 令 $q = \pi^\gamma$. 若 $\varphi \in L^p_{\mathscr{F}_t}(\Omega, C)$ 满足 $[\varphi]^p \geqslant qE|\varphi(0)|^p$, 则

$$-\lambda_0 E|\varphi(0)|^p + \lambda_1[\varphi]^p \geqslant (\lambda_1\pi^\gamma - \lambda_0)E|\varphi(0)|^p = \gamma E|\varphi(0)|^p.$$

结合条件(4.3.18)得出条件(4.3.13)满足,于是可用定理4.3.4得所要证. □

特别,取 $p = 2$ 从定理4.3.6得到(对照推论4.2.7)

推论4.3.7 设存在 $\zeta(t) \in C(\mathbf{R}_+)$ 与常数 $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_1 \geqslant 0$, $\lambda_1 > \lambda_0$, 使得 $\zeta(t)\psi^{-\gamma}(t) \in L^1(\mathbf{R}_+)$, γ 是方程(4.3.19)的唯一正解,且对任给 $\varphi \in L^2_{\mathscr{F}_t}(\Omega, C)$ 有

$$\begin{aligned} &E[2\varphi^T(0)f(t,\varphi) + |g(t,\varphi)|^2] \\ &\geqslant \psi_1(t)[-\lambda_0 E|\varphi(0)|^2 + \lambda_1[\varphi]^2] - \zeta(t), \quad t \geqslant 0. \end{aligned} \qquad (4.3.20)$$

则对任给 $\beta \in (0,1]$, $\xi \in \Sigma_\beta$, 方程(4.3.1)的解 $x(t,\xi)$ 满足

$$E|x(t,\xi)|^2 \geqslant [\beta E|\xi(0)|^2 - \|\zeta\psi^{-\gamma}\|_1]\psi^\gamma(t), \quad t \geqslant 0.$$

若将推论4.3.7用于方程(4.3.2),则由条件

$$2x^T f(t,x) + |g(t,x)|^2 \geqslant \gamma\psi_1(t)|x|^2 - \zeta(t), \quad t \geqslant 0, x \in \mathbf{R}^d$$

推出

$$E|x(t,x_0)|^2 \geqslant (|x_0|^2 - \|\zeta\psi^{-\gamma}\|_1)\psi^\gamma(t), \quad t \geqslant 0, x_0 \in \mathbf{R}^d.$$

注意当 $\tau = 0$ 时 $\pi = 1$, 因而从方程(4.3.19)解出 $\gamma = \lambda_1 - \lambda_0 > 0$.

现在仿照定理4.2.9建立以下结果.

定理4.3.8 设 $p > 0$; 存在半正定矩阵 Q, 常数 $c_1, c_2 > 0$, $a, a_1, b, \gamma \geqslant 0$, $\tau_1 \in (0, \tau]$, $[\tau, 0]$ 上的概率测度 ν, 函数 $V(t,x) \in C^{1,2}(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d)$ 与 $\zeta(t)$, 使得 $\zeta(t)\psi^{-\gamma}(t) \in L^1(\mathbf{R}_+)$, 且条件(4.3.10)及以下条件满足:

$$\begin{aligned} &\mathscr{L}V(t,\varphi) - [\varphi^T(-\tau_1)Q\varphi(-\tau_1)]^{p/2} + [\varphi^T(-\tau)Q\varphi(-\tau)]^{p/2} \\ &\geqslant a|\varphi(0)|^p - a_1|\varphi(-\tau_1)|^p - b\int_{-\tau}^0 |\varphi(\theta)|^p d\nu - \zeta(t), \quad t \geqslant 0, \varphi \in C, \end{aligned} \qquad (4.3.21)$$

$$a_1\rho_1^\gamma + b + c_2\gamma\phi_0 \leqslant a, \qquad (4.3.22)$$

其中 ρ_1 依(4.2.24), ϕ_0 依(4.2.4). 则对任给 $\beta \in (0,1]$, $\xi \in S_{\beta,p}$, 方程(4.3.1)的解 $x(t,\xi)$ 满足:

$$\begin{aligned} c_2 E|x(t,\xi)|^p \geqslant \psi^\gamma(t)\{&\|\xi\|_0^p[\beta c_1 - \|Q\|^{p/2}(\tau - \tau_1) - a_1\tau_1 - b\tau] \\ &- \|\zeta\psi^{-\gamma}\|_1\}. \end{aligned} \qquad (4.3.23)$$

证 取定 $\beta \in (0,1]$, $\xi \in S_{\beta,p}$, 令 $x(t) = x(t,\xi)$, $h(t)$ 依(4.1.7). 设

$$W(t,x) = V(t,x) - \int_{t-\tau}^{t-\tau_1} [x^{\mathrm{T}}(\theta)Qx(\theta)]^{p/2}\mathrm{d}\theta$$

(对照(4.1.23)), 则

$$\begin{aligned} c_2 h(t) &\geqslant \mathrm{E}[\psi^{-\gamma}(t)W(t,x(t))] \\ &= \mathrm{E}W(0,x(0)) + \mathrm{E}\int_0^t V(s,x(s))\mathrm{d}\psi^{-\gamma}(s) \\ &\quad - \mathrm{E}\int_0^t \mathrm{d}\psi^{-\gamma}(s)\int_{s-\tau}^{s-\tau_1}[x^{\mathrm{T}}(\theta)Qx(\theta)]^{p/2}\mathrm{d}\theta \\ &\quad + \mathrm{E}\int_0^t \psi^{-\gamma}(s)LW(s,x(s))\mathrm{d}s \\ &\triangleq I_0 + I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

直接看出 $I_2 \geqslant 0$; 分别估计 I_0, I_1, I_3 如下:

$$\begin{aligned} I_0 &= \mathrm{E}V(0,x(0)) - \mathrm{E}\int_{-\tau}^{-\tau_1}[x^{\mathrm{T}}(\theta)Qx(\theta)]^{p/2}\mathrm{d}\theta \\ &\geqslant c_1\mathrm{E}|x(0)|^p - \|Q\|^{p/2}\int_{-\tau}^{-\tau_1}\mathrm{E}|x(\theta)|^p\mathrm{d}\theta \\ &\geqslant \|\xi\|_0^p[\beta c_1 - \|Q\|^{p/2}(\tau-\tau_1)], \end{aligned}$$

$$I_2 \geqslant -c_2\gamma\phi_0\int_0^t h(s)\mathrm{d}s,$$

$$\begin{aligned} I_3 &\geqslant \mathrm{E}\int_0^t \psi^{-\gamma}(s)\Big[a|x(s)|^p - a_1|x(s-\tau_1)|^p \\ &\qquad - b\int_{-\tau}^0 |x(s+\theta)|^p\mathrm{d}\nu(\theta) - \zeta(s)\Big]\mathrm{d}s \\ &\geqslant a\int_0^t h(s)\mathrm{d}s - a_1\rho_1^\gamma\int_0^t h(s)\mathrm{d}s - a_1\int_{-\tau_1}^0 \mathrm{E}|x(s)|^p\mathrm{d}s \\ &\quad - b\int_{-\tau}^0 \mathrm{d}\nu(\theta)\int_\theta^t \psi^{-\gamma}(s-\theta)\mathrm{E}|x(s)|^p\mathrm{d}s - \|\zeta\psi^{-\gamma}\|_1 \\ &\geqslant (a - a_1\rho_1^\gamma - b)\int_0^t h(s)\mathrm{d}s - \|\xi\|_0^p(a_1\tau_1 + b\tau) - \|\zeta\psi^{-\gamma}\|_1. \end{aligned}$$

综上并用条件(4.3.22)得

$$c_2 h(t) \geqslant \|\xi\|_0^p[\beta c_1 - \|Q\|^{p/2}(\tau-\tau_1) - a_1\tau_1 - b\tau] - \|\zeta\psi^{-\gamma}\|_1,$$

由此直接得出不等式(4.2.23). □

注意与定理 4.2.9 不同, 在定理 4.3.8 中并无对偶于(4.3.21)的条件可用.

看一个解释性例子.

例 4.3.9 考虑线性方程

$$\mathrm{d}x(t) = \Big[Ax(t) + Cx(t-\tau) + \int_{-\tau}^0 B(\theta)x(t+\theta)\mathrm{d}\theta\Big]\mathrm{d}t$$

$$+Dx(t)\mathrm{d}w_1(t)+Gx(t-\tau_1)\mathrm{d}w_2(t),$$

其中 $A,B(\theta),C,D,G\in\mathbf{R}^{d\times d}$，$0<\tau_1<\tau$，$w=(w_1,w_2)^{\mathrm{T}}$ 为二维 Brown 运动. 令

$$f(\varphi)=A\varphi(0)+C\varphi(-\tau)+\int_{-\tau}^{0}B(\theta)\varphi(\theta)\mathrm{d}\theta,$$

$$g(\varphi)=[D\varphi(0),G\varphi(-\tau_1)],$$

$$\sigma=\lambda_{\min}(A+A^{\mathrm{T}}),\quad \delta=\lambda_{\min}(D^{\mathrm{T}}D),\quad \lambda=\lambda_{\min}(G^{\mathrm{T}}G).$$

必定 $\delta,\lambda\geqslant 0$. 取 $V=|x|^2$，$Q=qI$，$q\geqslant 0$ 待定，则

$$\begin{aligned}
\Phi &\triangleq \mathscr{L}V(t,\varphi)-\varphi^{\mathrm{T}}(-\tau_1)Q\varphi(-\tau_1)+\varphi^{\mathrm{T}}(-\tau)Q\varphi(-\tau)\\
&=2\varphi^{\mathrm{T}}(0)\Big[A\varphi(0)+C\varphi(-\tau)+\int_{-\tau}^{0}B(\theta)\varphi(\theta)\mathrm{d}\theta\Big]\\
&\quad +|D\varphi(0)|^2+|G\varphi(-\tau_1)|^2-q|\varphi(-\tau_1)|^2+q|\varphi(-\tau)|^2\\
&\geqslant \sigma|\varphi(0)|^2-\|C\|[|\varphi(0)|^2+|\varphi(-\tau)|^2]\\
&\quad -\int_{-\tau}^{0}\|B(\theta)\|[|\varphi(0)|^2+|\varphi(\theta)|^2]\mathrm{d}\theta\\
&\quad +\delta|\varphi(0)|^2+(\lambda-q)|\varphi(-\tau_1)|^2+q|\varphi(-\tau)|^2\\
&=(\sigma-\|C\|-b+\delta)|\varphi(0)|^2-(q-\lambda)|\varphi(-\tau_1)|^2\\
&\quad -(\|C\|-q)|\varphi(-\tau)|^2-b\int_{-\tau}^{0}|\varphi(\theta)|^2\mathrm{d}\nu,
\end{aligned}$$

其中

$$b\mathrm{d}\nu=\|B(\theta)\|\mathrm{d}\theta,\quad b=\int_{-\tau}^{0}\|B(\theta)\|\mathrm{d}\theta.$$

(i) 取 $q=\|C\|$，则

$$\begin{aligned}
\Phi &\geqslant(\sigma+\delta-\|C\|-b)|\varphi(0)|^2-(\|C\|-\lambda)^+|\varphi(-\tau_1)|^2\\
&\quad -b\int_{-\tau}^{0}|\varphi(\theta)|^2\mathrm{d}\nu.
\end{aligned}$$

取 $\psi(t)=\mathrm{e}^t$，则 $\phi_0=1$，$\rho_1=\mathrm{e}^{-\tau_1}$，于是不等式(4.3.22)相当于

$$\sigma+\delta\geqslant\|C\|+2b+\mathrm{e}^{-\gamma\tau_1}(\|C\|-\lambda)^++\gamma. \qquad (4.3.22)'$$

只要

$$\sigma+\delta>\|C\|+2b+(\|C\|-\lambda)^+, \qquad (4.3.24\mathrm{a})$$

就必有 $\gamma>0$，使得不等式(4.3.22)′满足，因而由定理 4.3.8 得出估计：

$$\mathrm{E}|x(t,\xi)|^2\geqslant\mathrm{e}^{\gamma t}\|\xi\|_0^2[\beta-\|C\|(\tau-\tau_1)-\tau_1(\|C\|-\lambda)^+-b\tau], \qquad (4.3.23)'$$

其中 $\beta\in(0,1]$，$\xi\in S_\beta$. 显然，仅当下式满足时估计式(4.3.23)′才有意义：

$$\beta>\|C\|(\tau-\tau_1)+\tau_1(\|C\|-\lambda)^++b\tau. \qquad (4.3.25\mathrm{a})$$

有趣的是，取 $q=\lambda$ 能得出几乎同样的结果.

(ii) 取 $q=0$，则

$$\Phi \geqslant (\sigma+\delta-\|C\|-b)|\varphi(0)|^2-\|C\||\varphi(-\tau)|^2-b\int_{-\tau}^{0}|\varphi(\theta)|^2\mathrm{d}\nu.$$

以 τ 代替 τ_1 应用定理4.3.8，与式(4.3.22)′，(4.3.24a)，(4.3.23)′，(4.3.25a)相当的不等式分别为

$$\sigma+\delta \geqslant \|C\|+2b+\mathrm{e}^{-\gamma\tau}\|C\|+\gamma, \tag{4.3.22)''}$$

$$\sigma+\delta \geqslant 2(\|C\|+b), \tag{4.3.24b}$$

$$\mathrm{E}|x(t,\xi)|^2 \geqslant \mathrm{e}^{\gamma t}\|\xi\|_0^2(\beta-\tau\|C\|-b\tau), \tag{4.3.23)''}$$

$$\beta > \tau(\|C\|+b). \tag{4.3.25b}$$

对比式(4.3.24a)，(4.3.25a)与(4.3.24b)，(4.3.25b)看出，方法(i)效果略佳. 这就表明，定理4.3.8 中使用矩阵 Q 有其意义.

现在转向方程(4.3.3)，下面是一个对应于定理4.2.24 的结果.

定理 4.3.10 设 $p>0$；存在常数 $\lambda,\mu\geqslant 0,\zeta(t)\in L^1(\mathbf{R}_+)$，使得

$$\begin{aligned}&(p/2)|x|^{p-2}[2x^{\mathrm{T}}F(t,x,y)+|G(t,x,y)|^2\\&\quad+(p-2)|x|^{-2}|x^{\mathrm{T}}G(t,x,y)|^2]\\&\geqslant \lambda|x|^p-\mu|y|^p-\zeta(t),\quad t\geqslant 0,x,y\in\mathbf{R}^d,\end{aligned} \tag{4.3.26}$$

$$\alpha \triangleq \eta^{-1}\mu < \lambda \wedge \tau^{-1}. \tag{4.3.27}$$

$\gamma \leqslant \lambda/\phi_0$ 是以下方程的正解：

$$\eta^{-1}\mu\rho_0^{\gamma}+\gamma\phi_0=\lambda, \qquad (\rho_0,\phi_0 \text{ 依}(4.3.7)) \tag{4.3.28}$$

则 $\forall\beta\in(\alpha\tau,1],\xi\in S_{\beta,p}$，方程(4.3.3)的解 $x(t,\xi)$ 满足

$$\mathrm{E}|x(t,\xi)|^p \geqslant \psi^{\gamma}(t)[\|\xi\|_0^p(\beta-\alpha\tau)-\|\zeta\psi^{-\gamma}\|_1],\quad t\geqslant 0. \tag{4.3.29}$$

证 易见方程(4.3.28)必有解 $\gamma\in(0,\lambda/\phi_0]$. 固定一个这样的 γ，由条件(4.3.27)有 $\alpha\tau<1$. 取定 $\beta\in(\alpha\tau,1]$，$\xi\in S_{\beta,p}$，以 $x(t)=x(t,\xi)$ 记方程(4.3.3)的解，只要证

$$h(t)\triangleq\psi^{-\gamma}(t)\mathrm{E}|x(t)|^p \geqslant \|\xi\|_0^p(\beta-\alpha\tau)-\|\zeta\psi^{-\gamma}\|_1.$$

这由以下估计得出

$$\begin{aligned}h(t)&=\mathrm{E}|x(0)|^p+\mathrm{E}\int_0^t L[\psi^{-\gamma}(s)|x(s)|^p]\mathrm{d}s\\&=\mathrm{E}|\xi(0)|^p+\mathrm{E}\int_0^t|x(s)|^p\mathrm{d}\psi^{-\gamma}(s)+\mathrm{E}\int_0^t\psi^{-\gamma}(s)L|x(s)|^p\mathrm{d}s\\&\geqslant\beta\|\xi\|_0^p+I_1+I_2,\end{aligned}$$

其中

$$I_1\geqslant-\gamma\phi_0\int_0^t h(s)\mathrm{d}s,$$

$$I_2 \geqslant \mathrm{E}\int_0^t \psi^{-\gamma}(s)[\lambda|x(s)|^p - \mu|y(s)|^p - \zeta(s)]\mathrm{d}s \qquad (\text{用}(4.3.26))$$

$$\geqslant \lambda\int_0^t h(s)\mathrm{d}s - \eta^{-1}\mu\rho_0^{\gamma}\int_0^t h(s)\mathrm{d}s - \eta^{-1}\mu\tau\|\xi\|_0^p - \|\zeta\psi^{-\gamma}\|_1.$$

综上即得所要证. □

将定理 4.3.10 用于方程(4.3.4),颇类似于从定理 4.2.24 过渡到定理 4.2.26.

推论 4.3.11　设 $\sigma = \lambda_{\min}(A + A^{\mathrm{T}})$;存在常数 μ,ν, 使得以下条件满足:

$$|G(t,x,y)|^2 \geqslant \mu|x|^2 - \nu|y|^2,\quad t \geqslant 0, x,y \in \mathbf{R}^d, \tag{4.3.30}$$

$$\alpha \triangleq \eta^{-1}(\|B\| + \nu)^+ < \tau^{-1} \wedge \lambda,\quad \lambda = \sigma - \|B\| + \mu. \tag{4.3.31}$$

$\gamma \in (0, \lambda/\phi_0]$ 是以下方程的解:

$$\eta^{-1}\rho_0^{\gamma}(\|B\| + \nu)^+ + \gamma\phi_0 = \sigma - \|B\| + \mu.\quad (\rho_0,\phi_0\text{ 依}(4.3.7)) \tag{4.3.32}$$

则 $\forall \beta \in (\alpha\tau, 1], \xi \in S_\beta$, 方程(4.3.4)的解 $x(t,\xi)$ 满足

$$\mathrm{E}|x(t,\xi)|^2 \geqslant \psi^{\gamma}(t)\|\xi\|_0^2(\beta - \alpha\tau),\qquad t \geqslant 0. \tag{4.3.33}$$

为从定理 4.3.10 推出以上结果,只要说明:

$$\begin{aligned}&2x^{\mathrm{T}}(Ax + By) + |G(t,x,y)|\\ \geqslant\ &\sigma|x|^2 - \|B\|(|x|^2 + |y|^2) + \mu|x|^2 - \nu|y|^2\\ \geqslant\ &(\sigma - \|B\| + \mu)|x|^2 - (\|B\| + \nu)^+|y|^2,\quad t \geqslant 0, x,y \in \mathbf{R}^d.\end{aligned}$$

若在推论 4.3.11 中进而取 $\delta(t) \equiv \tau, \phi_0 = 1$, 则式(4.3.31)与(4.3.32)分别简化为

$$\alpha = (\|B\| + \nu)^+ < \tau^{-1} \wedge \lambda,\quad \lambda = \sigma - \|B\| + \mu; \tag{4.3.34}$$

$$\alpha\rho^{\gamma} + \gamma = \lambda.\quad (\rho\text{ 依}(4.3.7)) \tag{4.3.35}$$

4.3.2　持久性

现在改设 $\psi'(t) < 0$,相应地沿用(4.1.4)中的约定,即

$$1 \leqslant \pi \leqslant \frac{\psi(t-\tau)}{\psi(t)} \leqslant \rho < \infty,\quad 0 \leqslant \phi_0 \leqslant |\psi_1(t)| \leqslant \phi < \infty. \tag{4.3.36}$$

与定义 4.3.1 相对照,作以下定义:

定义 4.3.12　设 $p > 0, \gamma \geqslant 0$. 若方程(4.3.1)的解 $x(t,\xi)$ 满足

$$\varliminf_{t\to\infty}\frac{\ln \mathrm{E}|x(t,\xi)|^p}{|\ln\psi(t)|} \geqslant -\gamma, \tag{4.3.37}$$

则称 $x(t,\xi)$ 是 p 阶矩 ψ^{γ} 持久的;若

$$\varliminf_{t\to\infty}\frac{\ln|x(t,\xi)|}{|\ln\psi(t)|} \geqslant -\gamma, \text{a.s.}, \tag{4.3.38}$$

则称 $x(t,\xi)$ 是 a.s. ψ^{γ} 持久的.

条件(4.3.37)相当于

$$\inf_{t\geqslant 0}\psi^{-\mu}(t)\mathrm{E}|x(t,\xi)|^p>0,\quad \forall\mu>\gamma,$$

而这通常又代以稍强的条件

$$\mathrm{E}|x(t,\xi)|^p\geqslant c\psi^{\gamma}(t),\quad t\geqslant 0,\tag{4.3.39}$$

其中 $c>0$ 与 t 无关. 显然 c 愈大而 γ 愈小,估计式(4.3.39)就愈好. 若式(4.3.39)对 $\gamma=0$ 成立,就称 $x(t,\xi)$ 是 p 阶矩持久的. 对于条件(4.3.38)可作类似说明.

注意到,定义 4.3.12 与定义 4.3.1 在形式上几乎是一样的,所不同的只是 $\psi'(t)$ 的符号而已. 因此,若关于无界性的某个结果并不直接涉及 $\psi'(t)$ 的符号,那么它亦必适用于持久性. 例如,定理 4.3.2 就是如此. 至于 Razumikhin 型定理 4.3.4,则仅需作轻微修改,即可转化成一个关于持久性的定理.

定理 4.3.13 设 $p>0$;存在 $V(t,x)\in C^{1,2}([-\tau,\infty]\times\mathbf{R}^d)$,$\zeta(t)\in C(\mathbf{R}_+)$ 与常数 $c_1,c_2>0,\gamma\geqslant 0,q\in(0,1]$,使得 $\zeta(t)\psi^{-\gamma}(t)\in L^1(\mathbf{R}_+)$,且条件(4.3.10),(4.3.13)满足. 则对任给 $\beta\in(0,1]$,$\xi\in\Sigma_{\beta,p}$,方程(4.3.1)的解 $x(t,\xi)$ 满足式(4.3.14).

其证明大体上类似于定理 4.3.4 之证,所需的少量改变是明显的,不必细述.

定理 4.3.13 的以下推论恰对应于推论 4.3.5.

推论 4.3.14 设 $V=|x|^p,p>0$;$\zeta(t)\in C(\mathbf{R}_+)$;$\gamma\geqslant 0,\beta\in(0,1]$,$\xi\in\Sigma_{\beta,p}$,$x(t,\xi)$ 记方程(4.3.1)的解. 若 $\zeta(t)\mathrm{e}^{\gamma t}\in L^1(\mathbf{R}_+)$,存在 $q\in(0,1]$,使得

$$[\varphi]^p\geqslant q\mathrm{E}|\varphi(0)|^p\Rightarrow \mathrm{E}\mathscr{L}V(t,\varphi)\geqslant-\gamma\mathrm{E}|\varphi(0)|^p-\zeta(t),\varphi\in L^p_{\mathscr{F}_t}(\Omega,C).$$

则

$$\mathrm{E}|x(t,\xi)|^p\geqslant[\beta\mathrm{E}|\xi(0)|^p-\|\zeta\mathrm{e}^{\gamma t}\|_1]\mathrm{e}^{-\gamma t},\quad t\geqslant 0.$$

若 $t^\gamma\zeta(t)\in L^1(\mathbf{R}_+)$,存在 $\sigma\in(0,1/\tau]$,$q\in(0,1]$,使得

$$[\varphi]^p\geqslant q\mathrm{E}|\varphi(0)|^p\Rightarrow \mathrm{E}\mathscr{L}V(t,\varphi)\geqslant-\gamma\sigma(1+\sigma t)^{-1}\mathrm{E}|\varphi(0)|^p-\zeta(t),$$

则

$$\mathrm{E}|x(t,\xi)|^p\geqslant[\beta\mathrm{E}|\xi(0)|^p-\|\zeta(1+\sigma t)^{\gamma}\|_1](1+\sigma t)^{-\gamma},\quad t\geqslant 0.$$

与定理 4.3.6 对应的是以下结果.

定理 4.3.15 设 $V=|x|^p,p>0,\zeta(t)\in C(\mathbf{R}_+)$. 若存在常数 $\lambda_0,\lambda_1\geqslant 0$,使得 $\gamma\triangleq\lambda_0-\lambda_1\geqslant 0,\zeta(t)\psi^{-\gamma}(t)\in L^1(\mathbf{R}_+)$,且对任给 $\varphi\in L^2_{\mathscr{F}_t}(\Omega,C)$ 有

$$\mathrm{E}\mathscr{L}V(t,\varphi)\geqslant\psi_1(t)[\lambda_0\mathrm{E}|\varphi(0)|^p-\lambda_1[\varphi]^p]-\zeta(t),\tag{4.3.40}$$

则对任给 $\beta\in(0,1]$,$\xi\in\Sigma_{\beta,p}$,方程(4.3.1)的解 $x(t,\xi)$ 满足

$$\mathrm{E}|x(t,\xi)|^p\geqslant[\beta\mathrm{E}|\xi(0)|^p-\|\zeta\psi^{-\gamma}\|_1]\psi^{\gamma}(t),\quad t\geqslant 0.\tag{4.3.41}$$

证 若 $\varphi\in L^p_{\mathscr{F}_t}(\Omega,C)$ 满足 $[\varphi]^p\geqslant\mathrm{E}|\varphi(0)|^p$,则

$$\lambda_0\mathrm{E}|\varphi(0)|^p-\lambda_1[\varphi]^p\leqslant(\lambda_0-\lambda_1)\mathrm{E}|\varphi(0)|^p=\gamma\mathrm{E}|\varphi(0)|^p,$$

与式(4.3.40)一起推出条件(4.3.13)满足(取 $q=1$),因而可用定理 4.3.13 得

所要证. □

取 $p=2$ 从定理4.3.15得出(对照推论4.3.7):

推论4.3.16 设存在 $\zeta(t)\in C(\mathbf{R}_+)$ 与常数 $\lambda_0\geqslant\lambda_1\geqslant 0$, 使得 $\zeta(t)\psi^{-\gamma}(t)\in L(\mathbf{R}_+)$, $\gamma=\lambda_0-\lambda_1$, 且对任给 $\varphi\in L^p_{\mathscr{F}_t}(\Omega,C)$ 有

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}[2\varphi^{\mathrm{T}}(0)f(t,\varphi)+|g(t,\varphi)|^2]\\&\geqslant\psi_1(t)[\lambda_0\mathrm{E}|\varphi(0)|^2-\lambda_1[\varphi]^2]-\zeta(t).\end{aligned}\tag{4.3.42}$$

则对任给 $\beta\in(0,1]$, $\xi\in\Sigma_\beta$, 方程(4.3.1)的解 $x(t,\xi)$ 满足

$$\mathrm{E}|x(t,\xi)|^2\geqslant[\beta\mathrm{E}|\xi(0)|^2-\|\zeta\psi^{-\gamma}\|_1]\psi^{\gamma}(t),\quad t\geqslant 0.$$

若将推论4.3.16用于方程(4.3.2),则出条件

$$2x^{\mathrm{T}}f(t,x)+|g(t,x)|^2\geqslant\gamma\psi_1(t)|x|^2-\zeta(t),\quad t\geqslant 0, x\in\mathbf{R}^d$$

(其中 $\gamma\geqslant 0$)推出方程(4.3.2)的解满足

$$\mathrm{E}|x(t,x_0)|^2\geqslant(|x_0|^2-\|\zeta\psi^{-\gamma}\|_1)\psi^{\gamma}(t),\quad t\geqslant 0, x_0\in\mathbf{R}^d.$$

仿照定理4.3.8,可建立如下持久性结果.

定理4.3.17 设 $p>0$; 存在半正定矩阵 Q, 常数 $c_1,c_2>0$, $a,a_1,b,\gamma\geqslant 0$, $\tau_1\in(0,\tau]$, $[-\tau,0]$ 上的概率测度 ν, 函数 $V(t,x)\in C^{1,2}(\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^d)$ 与 $\zeta(t)$, 使得 $\zeta(t)\psi^{-\gamma}(t)\in L^1(\mathbf{R}_+)$, 且条件(4.3.10),(4.3.21)及以下条件满足:

$$a+c_1\gamma\phi_0+\|Q\|^{p/2}(\pi_1^{\gamma}-\rho^{\gamma})\geqslant a_1\rho_1^{\gamma}+b\rho^{\gamma},\tag{4.3.43}$$

其中 ρ,ϕ_0 依式(4.3.36), ρ_1,π_1 依(4.1.24). 则对任给 $\beta\in(0,1]$, $\xi\in S_{\beta,p}$, 方程(4.3.1)的解 $x(t,\xi)$ 满足:

$$\begin{aligned}&c_2\mathrm{E}|x(t,\xi)|^p\\&\geqslant\psi^{\gamma}(t)\{\|\xi\|_0^p[\beta c_1-\|Q\|^{p/2}(\tau+\sigma\tau-\tau_1)-a_1\tau_1\rho_1^{\gamma}-b\tau\rho^{\gamma}]-\|\zeta\psi^{-\gamma}\|_1\},\end{aligned}$$

其中

$$\sigma=\sup_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0}[\psi^{-\gamma}(\theta+\tau)-\psi^{-\gamma}(\theta+\tau_1)].$$

若 $a\geqslant a_1+b$, $\zeta(t)\in L^1(\mathbf{R}_+)$, 则可取 $\gamma=0$, 因而有矩估计:

$$c_2\mathrm{E}|x(t,\xi)|^p\geqslant\|\xi\|_0^p[\beta c_1-\|Q\|^{p/2}(\tau-\tau_1)-a_1\tau_1-b\tau]-\|\zeta\|_1.$$

至此,尚未提到关于a.s.轨道无界的任何结果.现在面临的困难在于,上节中处理a.s.轨道有界的三种方法均不能移用于此,因而不能指望有类似于定理4.2.15与定理4.2.17的a.s.轨道无界结果.不过,还是可以依照定理4.2.20建立一个简单结果,只是现在不是用指数鞅不等式,而是用大数定律(定理1.2.10).

定理4.3.18 设 $x(t)$ 是方程(4.3.1)的一个解, $\forall t\geqslant 0$, 有 $x(t)\neq 0$, a.s.; 存在 $V(t,x)\in C^{1,2}(\mathbf{R}_+\mathbf{R}^d)$ 与常数 $c>0$, 使得以下条件满足

$$0<V(t,x)\leqslant c|x|^2,\quad t\geqslant 0, 0\neq x\in\mathbf{R}^d,\tag{4.3.44}$$

$$\varliminf_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\Big[\frac{LV(s,x(s))}{V(s,x(s))}-\frac{1}{2}|Z(s)|^2\Big]\mathrm{d}s\geqslant\gamma>-\infty,\tag{4.3.45}$$

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{1}{t}\int_0^t |Z(s)|^2 ds < \infty, \tag{4.3.46}$$

其中 $Z(t) = V_x(t,x(t))g(t,x_t)/V(t,x(t))$. 则成立

$$\underline{\lim_{t\to\infty}} t^{-1} \ln |x(t)|^2 \geqslant \gamma, \text{a.s.}. \tag{4.3.47}$$

以上结果并未涉及函数 $\psi(t)$.

证 类似于定理2.3.9(ii)之证作如下估计:

$$\begin{aligned}\ln[c|x(t)|^2] &\geqslant \ln V(t,x(t)) \qquad (\text{用}(4.3.44))\\ &= \ln V(0,x(0)) + \int_0^t\left[\frac{LV(s,x(s))}{V(s,x(s))} - \frac{1}{2}|Z(s)|^2\right]ds + M(t),\end{aligned}$$

其中 $M(t) = \int_0^t Z(s)dw(s)$ 是一个实值连续局部鞅. 由条件(4.3.46)与定理1.2.10有 $t^{-1}M(t)\to 0$, a.s. $(t\to\infty)$, 结合条件(4.3.45)即得不等式(4.3.47). □

今用一个熟悉的方程来解释已得的一些结果.

例 4.3.19 考虑方程(在(4.2.19)中取 $\kappa = 0$)

$$dx(t) = a|\psi_1(t)|x(t)dt + b\sqrt{|\psi_1(t)|}y(t)dw(t), \tag{4.3.48}$$

其中 $y(t) = x(t-\delta(t))$ 仍如(4.2.19). 设 f,g 依例4.2.8, 则

$$\begin{aligned}\text{式}(4.3.42)\text{左端} &= E[2a|\psi_1(t)|\varphi^2(0) + b^2|\psi_1(t)|\varphi^2(-\delta(t))]\\ &\geqslant |\psi_1(t)|[2aE\varphi^2(0) + b^2[\varphi]^2].\end{aligned}$$

(i) 应用推论4.3.7. 设 $\psi'(t) > 0, \lambda_0 = -2a, \lambda_1 = b^2$, 则推论4.3.7之条件满足, 且当 $2a + b^2 > 0$ 时 $\lambda_1 > \lambda_0$. 于是方程(4.3.48)的解 $x(t,\xi)$ 满足

$$E|x(t,\xi)|^2 \geqslant \beta\psi^\gamma(t)E|\xi(0)|^2,$$

其中 $\beta\in(0,1], \xi\in\Sigma_\beta, \gamma$ 是方程 $b^2\pi^\gamma - \gamma + 2a = 0$ 的唯一正解. 若 $\tau = 0$, 则方程(4.3.48)退化为(见(4.2.22))

$$dx(t) = x(t)[a|\psi_1(t)|dt + b\sqrt{|\psi_1(t)|}dw(t)]. \tag{4.3.48$'$}$$

方程(4.3.48)′的解满足

$$E|x(t,x_0)|^2 \geqslant x_0^2[\psi(t)]^{2a+b^2}, \quad t\geqslant 0, x_0\in\mathbf{R}.$$

实际上, 如在例4.2.8中已指出的, 有公式

$$\begin{cases} x(t,x_0) = x_0[\psi(t)]^{\pm(a-b^2/2)}\exp\left[b\int_0^t\sqrt{|\psi_1(s)|}dw(s)\right], & (4.3.49\text{a})\\ E|x(t,x_0)|^2 = x_0^2[\psi(t)]^{\pm(2a+b^2)}, & (4.3.49\text{b})\end{cases}$$

其中 $\pm 1 = \operatorname{sgn}\psi'(t)$. 由此可见, 利用推论4.3.7对方程(4.3.48)′的解所作的矩估计已不可再改进.

(ii) 应用推论4.3.16. 设 $\psi' < 0, \lambda_0 = -2a, \lambda_1 = b^2$, 则条件(4.3.42)满足, 且当 $2a + b^2 < 0$ 时 $\lambda_0 > \lambda_1 \geqslant 0$, 于是对任给 $\beta\in(0,1], \xi\in\Sigma_\beta$, 方程(4.3.48)

的解满足

$$\mathrm{E}|x(t,\xi)|^2 \geqslant \beta \mathrm{E}|\xi(0)|^2[\psi(t)]^{-2a-b^2},\quad t \geqslant 0.$$

而方程(4.3.48)′的解则满足

$$\mathrm{E}|x(t,x_0)|^2 \geqslant x_0^2[\psi(t)]^{-2a-b^2},\quad t \geqslant 0.$$

由式(4.3.49b)看出,后一估计是不可改进的.

(iii) 应用定理 4.3.18. 设 $V(x) = x^2, x(t)$ 是方程(4.3.48)′的任一非零解,则

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t\left[\frac{LV(x(s))}{|x(s)|^2} - \frac{1}{2}|Z(s)|^2\right]\mathrm{d}s = l(2a-b),$$

其中 $l = \lim\limits_{t\to\infty} t^{-1}|\ln\psi(t)|$. 于是由定理 4.3.18 得到

$$\varlimsup_{t\to\infty}\frac{\ln|x(t)|^2}{t} \geqslant \begin{cases} 2a-b^2, \text{a.s.}, & \psi(t) = \mathrm{e}^{\pm t}, \\ 0, \text{a.s.}, & \psi(t) = (1+t)^{\pm t}. \end{cases}$$

另一方面,由式(4.3.49a)可直接验证,以上不等式实际上为等式,因而不可再改进.

本例的结论在一定程度上说明了由推论 4.3.7, 推论 4.3.16 及定理 4.3.18 等提供的方法是有效的.

按照已熟知的顺序,现在该考虑 SDDE(4.3.3)了. 我们希望仍能建立类似于定理 4.3.11 的结果. 不过现在情况略有不同.

定理 4.3.20　设 $p > 0$; 存在常数 $\lambda \in \mathbf{R}, \mu, \gamma \geqslant 0$, 可测函数 $\zeta(t)$, 使得 $\zeta(t)\psi^{-\gamma}(t) \in L^1(\mathbf{R}_+)$, 且条件(4.3.26)及以下条件满足:

$$\alpha \triangleq \eta^{-1}\mu\psi^{-\gamma}(\tau) < 1/\tau,\quad \eta^{-1}\mu\rho^{\gamma} - \gamma\phi_0 \leqslant \lambda. \tag{4.3.50}$$

则对任给 $\beta \in (\alpha\tau, 1], \xi \in S_{\beta,p}$, 方程(4.3.3)的解 $x(t,\xi)$ 满足

$$\mathrm{E}|x(t,\xi)|^p \geqslant [(\beta-\alpha\tau)\|\xi\|_0^p - \|\zeta\psi^{-\gamma}\|_1]\psi^{\gamma}(t),\quad t \geqslant 0. \tag{4.3.51}$$

若 $\zeta(t) \in L^1(\mathbf{R}_+), \mu \leqslant \eta\lambda, \alpha = \eta^{-1}\mu < 1/\tau$, 则可取 $\gamma = 0$, 因而

$$\mathrm{E}|x(t,\xi)|^p \geqslant (\beta-\alpha\tau)\|\xi\|_0^p - \|\zeta\|_1,\quad t \geqslant 0.$$

证　取定 $\beta \in (\alpha\tau, 1], \xi \in S_{\beta,p}$, 令 $x(t) = x(t,\xi)$. 如定理 4.3.11 之证有

$$h(t) \triangleq \psi^{-\gamma}(t)\mathrm{E}|x(t)|^p \geqslant \beta\|\xi\|_0^p + I_1 + I_2,$$

其中

$$I_1 = -\gamma\mathrm{E}\int_0^t \psi^{-\gamma}(s)\psi_1(s)|x(s)|^p\mathrm{d}s \geqslant \gamma\phi_0\int_0^t h(s)\mathrm{d}s,$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \mathrm{E}\int_0^t \psi^{-\gamma}(s)L|x(s)|^p\mathrm{d}s \\ &\geqslant \mathrm{E}\int_0^t \psi^{-\gamma}(s)[\lambda|x(s)|^p - \mu|y(s)|^p - \zeta(s)]\mathrm{d}s \end{aligned}$$

$$\geqslant(\lambda-\eta^{-1}\mu\rho^{\gamma})\int_0^t h(s)\mathrm{d}s-\frac{\tau\mu\|\xi\|_0^p}{\eta\psi^{\gamma}(\tau)}-\|\zeta\psi^{-\gamma}\|_1.$$

利用条件(4.3.50)，综上得 $h(t)\geqslant(\beta-\alpha\tau)\|\xi\|_0^p-\|\zeta\psi^{-\gamma}\|_1$，此即为所要证. □

将定理4.3.20用到方程(4.3.4)立得如下结果(对照推论4.3.11)：

推论4.3.21　设 $\sigma=\lambda_{\min}(A+A^{\mathrm{T}})$；存在常数 $\mu,\nu\in\mathbf{R},\gamma\geqslant0$，使得条件(4.3.30)及以下条件满足：

$$\alpha\triangleq\eta^{-1}\psi^{-\gamma}(\tau)(\|B\|+\nu)^{+}<1/\tau,\tag{4.3.52}$$

$$\eta^{-1}\rho^{\gamma}(\|B\|+\nu)^{+}-\gamma\phi_0\leqslant\sigma-\|B\|+\mu.\tag{4.3.53}$$

则对任给 $\beta\in(\alpha\tau,1]$，$\xi\in S_{\beta}$，方程(4.3.4)的解 $x(t,\xi)$ 满足

$$\mathrm{E}|x(t,\xi)|^2\geqslant\psi^{\gamma}(t)\|\xi\|_0^2(\beta-\alpha\tau),\quad t\geqslant0.\tag{4.3.54}$$

若进而设

$$\alpha=\eta^{-1}(\|B\|+\nu)^{+}\leqslant\sigma-\|B\|+\mu,\qquad\alpha<1/\tau,$$

则式(4.3.54)可加强为

$$\mathrm{E}|x(t,\xi)|^2\geqslant\|\xi\|_0^2(\beta-\alpha\tau),\quad t\geqslant0.\tag{4.3.55}$$

现在用一个熟悉的例子来解释推论4.3.11与推论4.3.21的应用.

例4.3.22　考虑由(4.2.62)稍加改变的方程

$$\mathrm{d}x(t)=[ax(t)+4y(t)]\mathrm{d}t+\sqrt{3}x(t)\mathrm{d}w_1(t)+y(t)\mathrm{d}w_2(t),\tag{4.3.56}$$

其中 $a\geqslant0$，$y(t)=x(t-0.2)$. 取 $\mu=3,\nu=-1$ 使条件(4.3.30)满足. 下面以 $x(t,\xi)$ 记方程(4.3.56)的解.

(i) 取 $\psi(t)=\mathrm{e}^t$ 应用推论4.3.11. 依式(4.3.7)有 $\pi_0=\pi=\mathrm{e}^{-0.2}$，$\phi_0=1$；条件(4.3.34)可写成 $\alpha=3<2a-1$，由此解出 $a>2$. 对任给 $a>2$，由方程(4.3.35)，即

$$3\mathrm{e}^{-0.2\gamma}+\gamma=2a-1$$

可唯一地确定 $\gamma\in(0,2a-1)$，且由式(4.3.33)得估计

$$\mathrm{E}|x(t,\xi)|^2\geqslant(\beta-0.6)\|\xi\|_0^2\mathrm{e}^{\gamma t},\quad\xi\in S_{\beta},\beta\in(0.6,1].\tag{4.3.57}$$

(ii) 取 $\psi(t)=1+t$ 应用推论4.3.11. 此时有 $\rho_0=\rho=\phi_0=1$；条件(4.3.34)并无改变，因此仍有 $\alpha=3,a>2$. 但方程(4.3.35)变为 $3+\gamma=2a-1$，由此解出 $\gamma=2a-4$. 于是对任给 $a>2,\beta\in(0.6,1],\xi\in S_{\beta}$，有

$$\mathrm{E}|x(t,\xi)|^2\geqslant(\beta-0.6)\|\xi\|_0^2(1+t)^{2a-4},\quad t\geqslant0.\tag{4.3.58}$$

(iii) 取 $\psi(t)=(1+t)^{-1}$ 应用推论4.3.21. 由式(4.3.36)有 $\rho=1.25,\phi_0=0$；条件(4.3.52)与(4.3.53)可写成

$$\alpha=3\times1.2^{\gamma}<5,\quad 3\times1.25^{\gamma}\leqslant2a-1.$$

要使以上不等式组有解 $\gamma\geqslant0$，必须 $a\geqslant2$，且 $\gamma<2.8018$. 对任给 $a\geqslant2$，取 $\gamma=0,\alpha=3$，由式(4.3.55)得

$$\mathrm{E}|x(t,\xi)|^2 \geqslant \|\xi\|_0^2(\beta-0.6),\quad t\geqslant 0,\xi\in S_\beta,\beta\in(0.6,1].$$

(iv) 取 $\psi(t)=\mathrm{e}^{-t}$ 应用推论4.3.21. 此时有 $\rho=\mathrm{e}^{0.2}$, $\phi_0=1$. 条件(4.3.52)与(4.3.53)可写成

$$\alpha=3\mathrm{e}^{0.2\gamma}<5,\quad 3\mathrm{e}^{0.2\gamma}-\gamma\leqslant 2a-1.$$

用初等方法可以确定,要使以上不等式组有解 $\gamma\geqslant 0$, 必须 $a\geqslant 1.723$. 对任给 $a\geqslant 1.723$, 必有 $\gamma\in[0,2.5541)$, 使得

$$\mathrm{E}|x(t,\xi)|^2\geqslant(\beta-0.2\alpha)\|\xi\|_0^2\mathrm{e}^{-\gamma t},\quad t\geqslant 0,\tag{4.3.59}$$

其中 $\alpha=3\mathrm{e}^{0.2\gamma}$, $\beta\in(0.2\alpha,1]$, $\xi\in S_\beta$.

4.3.3 滞留问题

给定开区域 $D\subset\mathbf{R}^d$. 任给 $\xi\in C([-\tau,0],D)$, 方程(4.3.1)的解 $x(t)=x(t,\xi)(t\geqslant-\tau)$ 至少在某个区间 $[-\tau,\rho)(0<\rho\leqslant\infty$, ρ 可能与 $\omega\in\Omega$ 有关)内保持在区域 D 内. 我们更感兴趣的问题是, $x(t)$ 是否始终滞留于 D 内, 即是否对几乎所有的 $\omega\in\Omega$, 有 $x(t)\in D(\forall t\geqslant-\tau)$? 这一问题对于很多领域都是至关重要的. 例如, 若方程(4.3.1)为种群动态模型, 则方程(4.3.1)的解 a.s. 滞留于正象限 $\mathbf{R}_{++}^d$ ($\mathbf{R}_+^d$ 之内部)意味着, 模型所描述的诸物种 a.s. 持久地共存, 其中任一物种都 a.s. 不会灭绝. 由此可见, a.s. 滞留性是前面所考虑的持久性的一种推广.

我们试探一下如何解决滞留问题. 取定 $\xi\in C([-\tau,0],D)$, 令 $x(t)=x(t,\xi)$. 下面总假定这样的解定义于 $[-\tau,\infty)$ 上. 自然设 $D\neq\mathbf{R}^d$, 因此边界 $\partial D\neq\varnothing$. 若令

$$D_k=\{x\in D:\ d(x,\partial D)>k^{-1}\},\quad k\in\mathbf{N}.\tag{4.3.60}$$

则 $x(t)$ 只有穿出所有 $D_k(k\in\mathbf{N})$ 才能到达边界 ∂D 然后逸出 D. $x(t)$ 滞留于 D 意味着在有限时间内 $x(t)$ 不能穿过所有 ∂D_k. 这就表明, 对于滞留问题, 停时序列

$$\tau_k=\inf\{t\geqslant 0:\ d(x(t),\partial D)\leqslant k^{-1}\},\quad k\in\mathbf{N}\tag{4.3.61}$$

将起关键作用. τ_k 显然对 k 单调增, 因此 $\tau_k\to\tau_\infty$. 上面的分析表明, $x(t)$ a.s. 地滞留于 $D\Leftrightarrow\tau_\infty=\infty$, a.s. $\Leftrightarrow P(\tau_\infty<\infty)=0$. 进而易看出, $P(\tau_\infty<\infty)=0\Leftrightarrow\forall t>0$, 有 $P(\tau_k\leqslant t)\to 0(k\to\infty)$. 因此问题归结为判定 $P(\tau_k\leqslant t)\to 0(\forall t>0)$. 此问题当然既依赖于边界 ∂D 的形状, 也依赖于函数 f 与 g 的结构, 其验证不会很容易. 下面的结果无疑只是初步的, 但能提示出某些一般思路.

定理4.3.23 设存在函数 $u(t)\in C((0,\infty),\mathbf{R}_+)$, $V(t,x)\in C^{1,2}(\mathbf{R}_+\times D)$, 使得以下条件满足:

(i) $u(0^+)=\infty$;

(ii) $u(d(x,\partial D))\leqslant V(t,x)(t\geqslant 0,x\in D)$;

(iii) $K_T\triangleq\sup\{\mathscr{L}V(t,\varphi):0\leqslant t\leqslant T,\varphi\in C([-\tau,0],D)\}<\infty$, $T>0$.

则对任给 $\xi\in C([-\tau,0],D)$, 方程(4.3.1)的解 $x(t,\xi)$ a.s. 滞留于 D 内.

证 取定 $x(t)=x(t,\xi)$，设 τ_k 依式(4.3.61). 给定 $t>0$，只要证 $P(\tau_k\leqslant t)\to 0(k\to\infty)$. 由条件(i)有 $u(k^{-1})\to\infty$；由式(4.3.61)有 $d(x(\tau_k),\partial D)=k^{-1}$. 于是

$$\begin{aligned}P(\tau_k\leqslant t)u(k^{-1})&\leqslant P(\tau_k\leqslant t)V(\tau_k,x(\tau_k))\\&\leqslant \mathrm{E}V(t\wedge\tau_k,x(t\vee\tau_k))\\&=V(0,\xi(0))+\mathrm{E}\int_0^{t\wedge\tau_k}LV(s,x(s))\mathrm{d}s\\&\leqslant V(0,\xi(0))+tK_t\triangleq\beta(t).\end{aligned}$$

因 $\beta(t)$ 与 k 无关，故必 $P(\tau_k\leqslant t)\to 0(k\to\infty)$，如所要证. □

定理 4.3.23 看似很具一般性，但因它对于函数 $u(t)$ 与 $V(t,x)$ 的选定并未提供任何明确的方法，其有效应用还不是一件容易的事. 下面考虑一些很特殊的情况，以说明如何将定理 4.3.23 实用化.

定理 4.3.24 设存在非负函数 $v(t)\in C^2(0,\infty)$，使得 $v(0^+)=\infty$；$\forall T>0$,

$$v'(|x|^2)[2x^{\mathrm{T}}f(t,x)+|g(t,x)|^2]\text{ 与 }v''(|x|^2)|x^{\mathrm{T}}g(t,x)|^2$$

关于 $0\leqslant t\leqslant T, 0\neq x\in\mathbf{R}^d$ 有上界. 则当 $0\neq x_0\in\mathbf{R}^d$ 时，方程(4.3.2)的解 $x(t)=x(t,x_0)$ a. s. 地满足 $x(t)\neq 0(\forall t\geqslant 0)$.

证 令 $D=\mathbf{R}^d\setminus\{0\}$，则 $\partial D=\{0\}$，$d(x,\partial D)=|x|\ (x\in D)$. 令 $u(t)=v(t^2)$，则 $u(0^+)=\infty$. 定义 $V(t,x)=v(|x|^2)(x\in D)$，则定理 4.3.23 中的条件(ii)自动满足. $\forall T>0$，当 $0\leqslant t\leqslant T, x\in D$ 时,

$$\begin{aligned}\mathscr{L}V(t,x)&=2v'(|x|^2)x^{\mathrm{T}}f(t,x)\\&\quad+\mathrm{tr}\{g^{\mathrm{T}}(t,x)[2v''(|x|^2)xx^{\mathrm{T}}+v'(|x|^2)I]g(t,x)\}\\&=v'(|x|^2)[2x^{\mathrm{T}}f(t,x)+|g(t,x)|^2]\\&\quad+2v''(|x|^2)|x^{\mathrm{T}}g(t,x)|^2\end{aligned}$$

有上界. 这就可应用定理 4.3.23 得出所要结论. □

符合定理 4.3.24 要求的函数 $v(t)$ 仍然不容易选择. 若以下条件满足:

$$\begin{cases}|f(t,x)|\vee|g(t,x)|\leqslant K|x|, & (4.3.62\text{a})\\ 2x^{\mathrm{T}}f(t,x)+|g(t,x)|^2\leqslant K, & (4.3.62\text{b})\end{cases}$$

其中 K 是正常数，则可取 $v(t)=t-\ln t(t>0)$. 直接看出 $v(0^+)=\infty$, $v(t)\geqslant v(1)=1$；$v'(t)=1-t^{-1}$, $v''(t)=t^{-2}$. 于是由条件(4.3.62)推出

$$\begin{aligned}&v'(|x|^2)[2x^{\mathrm{T}}f(t,x)+|g(t,x)|^2]\\&=(1-|x|^{-2})[2x^{\mathrm{T}}f(t,x)+|g(t,x)|^2]\leqslant 2K+K^2,\\&v''(|x|^2)|x^{\mathrm{T}}g(t,x)|^2=|x|^{-4}|x^{\mathrm{T}}g(t,x)|^2\leqslant K^2.\end{aligned}$$

因此，当条件(4.3.62)满足时，定理 4.3.24 的结论成立. 这并不是一个好结果，在无需条件(4.3.62b)的情况下，引理 2.3.8 达到了同一结论.

一个可与定理 4.3.24 对照的结果是

定理 4.3.25　设存在非负函数 $u(t) \in C^2(0,\infty)$，使得 $u(0^+) = \infty$，$\forall T > 0$，

$$K_T \triangleq \sup_{0 \le t \le T, x \in \mathbf{R}^d_{++}} \sum_i \left[2u'(x_i)f_i(t,x) + u''(x_i) | g_i(t,x) |^2\right] < \infty, \qquad (4.3.63)$$

此处设定方程(4.3.2)中的 f 与 g 表为：$f = (f_1, f_2, \cdots, f_d)^{\mathrm{T}}, g^{\mathrm{T}} = (g_1^{\mathrm{T}}, g_2^{\mathrm{T}}, \cdots, g_d^{\mathrm{T}})$. 则对任给 $x_0 \in \mathbf{R}^d_{++}$，方程(4.3.2)的解 $x(t,x_0)$ a.s. 滞留于 $\mathbf{R}^d_{++}$ 内.

证　令 $D = \mathbf{R}^d_{++}$，则 $d(x,\partial D) = \min x_i (x \in D)$. 定义

$$V(t,x) = \sum_i u(x_i), \quad x \in D,$$

则 $u(d(x,\partial D)) = u(\min x_i) \le V(t,x)$，可见定理 4.3.23 之条件(ii)满足. $\forall T > 0, (t,x) \in [0,T] \times D$，有

$$\begin{aligned} \mathscr{L}V(t,x) &= \sum_i u'(x_i)f_i(t,x) + \frac{1}{2}\mathrm{tr}[g^{\mathrm{T}}(t,x)V_{xx}g(t,x)] \\ &= \frac{1}{2}\sum_i [2u'(x_i)f_i(t,x) + u''(x_i) | g_i(t,x) |^2] \\ &\le K_T/2 < \infty. \qquad (\text{用}(4.3.63)) \end{aligned}$$

于是可用定理 4.3.23 得出所要结论.　□

若取 $u(t) = t - \ln t$，则条件(4.3.63)可表成

$$\sup_{0 \le t \le T, x \in \mathbf{R}^d_{++}} \sum_i \left[2(1 - x_i^{-1})f_i(t,x) + x_i^{-2} | g_i(t,x) |^2\right] < \infty. \qquad (4.3.63)'$$

要使如上条件满足，对函数 f 与 g 无疑需加很强的限制. 在 §5.2 中将看到满足这种条件的方程.

§4.4　其他问题

除已讨论过的稳定性、有界性等基本问题之外，人们对于随机微分方程的研究兴趣还及于多种其他问题，非本章所能尽述. 本节所考虑的一组问题并非出于精选，更主要地出于利用手头材料的方便. 不过，这些问题亦足以令人感兴趣.

4.4.1　LaSalle 型定理

仍然考虑在 §4.1 ~ §4.3 中已研究过的方程

$$\mathrm{d}[x(t) - u(x_t)] = f(t,x_t)\mathrm{d}t + g(t,x_t)\mathrm{d}w(t) \qquad (4.4.1)$$

及其特例

$$\mathrm{d}x(t) = f(t,x_t)\mathrm{d}t + g(t,x_t)\mathrm{d}w(t), \qquad (4.4.2)$$

$$dx(t) = f(t,x(t))dt + g(t,x(t))dw(t), \tag{4.4.3}$$

$$d[x(t) - U(y(t))] = F(t,x(t),y(t))dt + G(t,x(t),y(t))dw(t). \tag{4.4.4}$$

对其中所出现的函数沿用已熟知的设定；只要写出 $x(t)$，总意味着 $x(t) = x(t,\xi)$ 是(4.4.1)～(4.4.4)中某个方程的解. 总假定存在 $\kappa \in [0,1)$，使得以下条件满足：

$$|u(\varphi)| \leqslant \kappa \|\varphi\|, \quad \varphi \in C, \tag{4.4.5}$$

$$|U(y)| \leqslant \kappa |y|, \qquad y \in \mathbf{R}^d. \tag{4.4.5$'$}$$

下面也用到 §4.1 中设定的函数 $\psi(t)$，并沿用所有相关的记号. 对于某个 $0 \leqslant q(x) \in C(\mathbf{R}^d)$，$0 \leqslant \gamma < \ln \kappa^{-1}/\ln \rho$($\rho$ 依(4.1.4))，约定

$$\begin{cases} h(t) = \psi^{-\gamma}(t)x(t), & \tilde{h}(t) = \psi^{-\gamma}(t)\tilde{x}(t), \\ z(t) = q(h(t)), & \tilde{z}(t) = q(\tilde{h}(t)). \end{cases} \tag{4.4.6}$$

下面使用这些记号时，总意味着其中隐含的 $x(t) = x(t,\xi)$ 与 $q(x)$ 依上下文意义是自明的. 利用条件(4.4.5)(或(4.4.5)′)容易证明(对照(4.1.37))，当 $\kappa_1 = \kappa\rho^\gamma < 1$ 时有

$$\sup_{-\tau \leqslant s \leqslant t} |h(s)| \leqslant (1 - \kappa_1)^{-1} [\|\xi\| \vee \sup_{0 \leqslant s \leqslant t} |\tilde{h}(s)|]. \tag{4.4.7}$$

设 $\Gamma \subset \mathbf{R}^d$ 是一非空集. 若恒成立

$$\lim_{t\to\infty} d(h(t),\Gamma) = 0, \text{a.s.}, \tag{4.4.8}$$

则称 $h(t)$a.s. 地渐近于集 Γ. 若 Γ 是一个锥，即有性质

$$\alpha\Gamma \subset \Gamma, \quad \forall \alpha > 0, \tag{4.4.9}$$

则式(4.4.8)等价于

$$\lim_{t\to\infty} \psi^{-\gamma}(t) d(x(t),\Gamma) = 0, \text{a.s.}. \tag{4.4.10}$$

由(4.4.10)推出

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\ln d(x(t),\Gamma)}{|\ln \psi(t)|} \leqslant -\gamma, \text{a.s.}. \tag{4.4.11}$$

当取 $\Gamma = \mathbf{R}^d$ 时式(4.4.8)平凡地成立，可见仅当对 Γ 施加一定限制时式(4.4.8)才是一个有价值的结论. 对 Γ 的限制越强，式(4.4.8)对于解的渐近状态所提供的信息就越有价值. 几种典型的情况是：

(i) 若 Γ 是一离散点集，则式(4.4.8)意味着 $h(t)$a.s. 收敛于 Γ 中某点(不必是同一点). 特别，若 $\Gamma = \{0\}$，则式(4.4.8)(⇔(4.4.10))意味着 $h(t)$ a.s. 收敛于零，从而

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\ln |x(t)|}{|\ln \psi(t)|} \leqslant -\gamma, \text{a.s.}, \tag{4.4.12}$$

这就得出方程的零解(若其存在)是 a.s. ψ^γ 稳定的(依定义 4.1.13).

(ii) 若 Γ 是一有界集，则式(4.4.8)推出 $h(t)$ a.s. 最终一致有界，即

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\psi^{-\gamma}(t)\,|\,x(t,\xi)\,|\leqslant C,\text{a. s.},$$

其中 $C>0$ 与 ξ 无关;上式显然又推出(4.4.12),即方程的零解(若其存在)a. s. ψ^{γ} 稳定.

(iii) 若 $\Gamma\subset D\subset\mathbf{R}^d$, $d(\Gamma,\partial D)>0$,则由式(4.4.8)推出 $h(t)$ a. s. 最终进入集 D. 特别,若 $\Gamma\subset\mathbf{R}_+^d$, $d(\Gamma,\partial\mathbf{R}_+^d)>0$,则式(4.4.8)推出 $h(t)$ a. s. 最终为正且与 $\partial\mathbf{R}_+^d$ 的距离有正下界. 这无疑是有价值的"持久性"结论.

综上可见,形如(4.4.8)的结论蕴涵了解的渐近稳定性、最终有界性等多种渐近性质,其意义无疑是重大的. 凡给出式(4.4.8)的结果不妨称之为广义 LaSalle 定理,其原型是 LaSalle 于 1960 年代对 ODE 所建立的类似结果. Mao(1999 ~ 2002)在其系列工作中将 LaSalle 的结果推广于随机微分方程,这些工作为 Shen(2006)等发展. 下面的定理是 Mao 与 Shen 等的结果的某种推广.

定理 4.4.1　设存在常数 $p\geqslant 1$, $\kappa\in[0,1)$, $\gamma\in[0,\ln\kappa^{-1}/\ln\rho)$, $c>0$ 与 $V(t,x)\in C^{1,2}(\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^d,\mathbf{R}_+)$, $q(x)\in C(\mathbf{R}^d,\mathbf{R}_+)$,使得条件(4.4.5)及以下条件满足:

$$K_r\triangleq\sup_{\|\varphi\|\leqslant r\psi^{\gamma}(t-\tau)}\psi^{-\gamma}(t)[\,|f(t,\varphi)|\vee|g(t,\varphi)|\,]<\infty,\quad\forall r>0,\tag{4.4.13}$$

$$\begin{cases}c\,|x|^p\leqslant V(t,x), & 若\ \gamma>0, \quad (4.4.14\text{a})\\ V(t,x)\ 径向无界, & 若\ \gamma=0,\quad (4.4.14\text{b})\end{cases}$$

$$\int_0^t L[\psi^{-p\gamma}(s)V(s,\tilde{x}(s))]\,\mathrm{d}s\leqslant c_1-\int_0^t z(s)\,\mathrm{d}s,\text{a. s.},\tag{4.4.15}$$

$$\begin{cases}\tilde{z}(t)\to 0,\text{a. s.}\Rightarrow z(t)\to 0,\text{a. s.}\ (t\to\infty), & (4.4.16\text{a})\\ \mathrm{E}\int_0^{\infty}z(t)\,\mathrm{d}t<\infty\Rightarrow\mathrm{E}\int_0^{\infty}\tilde{z}(t)\,\mathrm{d}t<\infty. & (4.4.16\text{b})\end{cases}$$

式(4.4.15),(4.4.16)中 $z(t)$ 与 $\tilde{z}(t)$ 依式(4.4.6), $x(t)=x(t,\xi)$ 是方程(4.4.1)的任一解, c_1 与 t 无关(但一般与 ξ 有关). 则式(4.4.8)恒成立,其中 $\Gamma=\{q=0\}\neq\varnothing$.

证　取定方程(4.4.1)的解 $x(t)=x(t,\xi)$. 为证式(4.4.8). 实行以下三个步骤:

(i) 取定 $\omega\in\Omega$,设 $h(t)=h(t,\omega)$ 有界, $z(t)=z(t,\omega)\to 0\,(t\to\infty)$. 则有序列 $t_k\to\infty$,使得 $h(t_k)\to x_0\in\mathbf{R}^d$. 于是 $z(t_k)\to q(x_0)=0$,因而 $x_0\in\Gamma\neq\varnothing$. 若 $d(h(t),\Gamma)\not\to 0\,(t\to\infty)$,则有序列 $s_k\to\infty$,使得 $\inf d(h(s_k),\Gamma)>0$. 如同上面之证,不妨设 $h(s_k)\to\bar{x}\in\Gamma$,这显然得出矛盾. 故必 $d(h(t),\Gamma)\to 0$. 因此,只需证 $h(t)$ 为 a. s. 轨道有界且 $z(t)\to 0$, a. s. $(t\to\infty)$;而由式(4.4.7)与条件(4.4.16a),这又归于证 $\tilde{h}(t)$ 为 a. s. 轨道有界与 $\tilde{z}(t)\to 0$, a. s. $(t\to\infty)$.

(ii) 证 $\tilde{h}(t)$ 为 a. s. 轨道有界与 $\mathrm{E}\int_0^{\infty}\tilde{z}(t)\,\mathrm{d}t<\infty$(后者用于证 $\tilde{z}(t)\to 0$, a. s.).

由 Itô 公式有

$$\psi^{-p\gamma}(t)V(t,\tilde{x}(t)) = V(0,\tilde{x}(0)) + \int_0^t L[\psi^{-p\gamma}(s)V(s,\tilde{x}(s))]\mathrm{d}s + M(t)$$

$$\leqslant c_2 - \int_0^t z(s)\mathrm{d}s + M(t), \qquad (用(4.4.15))$$

其中 c_2 与 t 无关, $M(t)$ 是一连续局部鞅, $M(0)=0$,其表达式无需写出. 由此得

$$\int_0^t z(s)\mathrm{d}s \vee \psi^{-p\gamma}(t)V(t,\tilde{x}(t)) \leqslant c_2 + M(t), \quad t \geqslant 0,$$

于是用定理 1.2.11(iii)得 $\mathrm{E}\int_0^\infty z(t)dt < \infty$,$\psi^{-p\gamma}(t)V(t,\tilde{x}(t))$ 为 a.s 轨道有界,二者分别推出 $\mathrm{E}\int_0^\infty \tilde{z}(t)\mathrm{d}t < \infty$ (用(4.4.16b)) 与 $\tilde{h}(t)$ a.s. 轨道有界(用条件(4.4.14)).

(iii) 证 $\tilde{z}(t)\to 0$, a.s. $(t\to\infty)$,这是证明的困难部分. 显然只要证 $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\tilde{z}(t) = 0$, a.s. . 设此结论不真,则可取 $\varepsilon > 0, k > \|\xi\|$,使得

$$\begin{cases} P(\Omega') \geqslant 3\varepsilon, & \Omega' = \left\{\overline{\lim\limits_{t\to\infty}}\tilde{z}(t) > 2\varepsilon\right\}, \\ P(\Omega'') \geqslant 1-\varepsilon, & \Omega'' = \left\{\sup\limits_{t\geqslant 0}|\tilde{h}(t)| < k\right\}. \end{cases} \qquad (4.4.17)$$

$\tilde{h}(t)$ 为 a.s. 有界保证如上的 k 存在. 由(4.4.17)得 $P(\Omega'\cap\Omega'')\geqslant 2\varepsilon$. 为由(4.4.17)推出矛盾,下面用一停时论证. 关键的观察是,由 $\mathrm{E}\int_0^\infty \tilde{z}(t)\mathrm{d}t < \infty$ 推出 $\underline{\lim\limits_{t\to\infty}}\tilde{z}(t) = 0$, a.s. , 因而当 $\omega\in\Omega'$ 时 $\tilde{z}(t)$ 必无限次交替地使 $\tilde{z}(t)\leqslant\varepsilon$ 与 $\tilde{z}(t)\geqslant 2\varepsilon$. 因此作停时

$$\begin{cases} \rho_k = \inf\{t\geqslant 0: |\tilde{h}(t)|\geqslant k\}, \ \sigma_0 = 0, \\ \tau_i = \inf\{t\geqslant \sigma_{i-1}: \tilde{z}(t)\geqslant 2\varepsilon\}, \ \sigma_i = \inf\{t\geqslant\tau_i: \tilde{z}(t)\leqslant\varepsilon\}, \ i\geqslant 1. \end{cases} \qquad (4.4.18)$$

注意 $\rho_k = \infty \Leftrightarrow \forall t\geqslant 0: |\tilde{h}(t)| < k; \sigma_i < \infty \Leftrightarrow \exists t\geqslant\tau_i: \tilde{z}(t)\leqslant\varepsilon; \tau_i < \infty \Rightarrow \sigma_i < \infty$. 因

$$\mathrm{E}\int_0^\infty \tilde{z}(t)\mathrm{d}t \geqslant \sum_{i=1}^\infty \mathrm{E}\left[I_{\{\tau_i<\infty=\rho_k\}}\int_{\tau_i}^{\sigma_i}\tilde{z}(t)\mathrm{d}t\right]$$

$$\geqslant \varepsilon\sum_{i=1}^\infty \mathrm{E}[I_{\{\tau_i<\infty=\rho_k\}}(\sigma_i - \tau_i)] \triangleq \varepsilon\sum_{i=1}^\infty \alpha_i,$$

故只要证 $\inf\alpha_i > 0$ 即推出矛盾. 取 $\delta = \delta(\varepsilon,k) > 0, T = T(\varepsilon,k,\delta) > 0$,使得

$$|x|\vee|y|\leqslant k, \ |x-y| < \delta \Rightarrow |q(x)-q(y)| < \varepsilon, \qquad (4.4.19a)$$

$$\begin{cases} 3T[\gamma^2k^2\phi^2T + K_r^2(T+4)] < \varepsilon\delta^2, \\ K_r(依(13)), r = k/(1-\kappa_1), \end{cases} \qquad (4.4.19b)$$

其中 ϕ 依(4.1.4). 对 $i \geqslant 1$, 令

$$\Omega_i = \left\{ \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} | \tilde{z}(t + \tau_i) - \tilde{z}(\tau_i) | < \varepsilon \right\},$$

$$S_i = \left\{ \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} | \tilde{h}(t + \tau_i) - \tilde{h}(\tau_i) | < \delta \right\}.$$

易验证

$$\Omega_i \cap \{\tau_i < \infty = \rho_k\} \subset \{\sigma_i - \tau_i \geqslant T\},$$
$$\Omega' \cap \Omega'' \subset \{\tau_i < \infty = \rho_k\}. \tag{4.4.20}$$

于是

$$\begin{aligned} T^{-1}\alpha_i &= T^{-1}\mathrm{E}[I_{\{\tau_i < \infty = \rho_k\}}(\sigma_i - \tau_i)] \\ &\geqslant P(\Omega_i \cap \{\tau_i < \infty = \rho_k\}) \qquad (\text{用}(4.4.20)) \\ &\geqslant P(S_i \cap \{\tau_i < \infty = \rho_k\}) \qquad (\text{用}(4.4.19\text{a})) \\ &\geqslant 2\varepsilon - P(\{\tau_i < \infty = \rho_k\} \setminus S_i). \qquad (\text{用}(4.4.20)) \end{aligned}$$

若能证 $\beta_i \triangleq P(\{\tau_i < \infty = \rho_k\} \setminus S_i) < \varepsilon$, 则得 $\alpha_i > \varepsilon T$, 从而 $\inf \alpha_i > 0$. 为证 $\beta_i < \varepsilon$, 估计(这是关键步骤)

$$\begin{aligned} \delta^2 \beta_i &= \delta^2 P\left(\tau_i < \infty = \rho_k, \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} | \tilde{h}(t + \tau_i) - \tilde{h}(\tau_i) |^2 \geqslant \delta^2\right) \\ &\leqslant \mathrm{E}\left[I_{\{\tau_i < \infty = \rho_k\}} \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} | \tilde{h}(t + \tau_i) - \tilde{h}(\tau_i) |^2 \right] \\ &= \mathrm{E}\left[\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \left| \int_{\tau_i}^{t+\tau} I_{\{\tau_i < \infty = \rho_k\}} \mathrm{d}[\psi^{-\gamma}(s)\tilde{x}(s)] \right|^2 \right] \\ &\leqslant 3\mathrm{E}\left[\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \left| \int_{\tau_i}^{t+\tau} I_{\{\tau_i < \infty = \rho_k\}} \tilde{x}(s) \mathrm{d}\psi^{-\gamma}(s) \right|^2 \right] \\ &\quad + 3\mathrm{E}\left[\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \left| \int_{\tau_i}^{t+\tau} I_{\{\tau_i < \infty = \rho_k\}} \psi^{-\gamma}(s) f(s, x_s) \mathrm{d}s \right|^2 \right] \\ &\quad + 3\mathrm{E}\left[\sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \left| \int_{\tau_i}^{t+\tau} I_{\{\tau_i < \infty = \rho_k\}} \psi^{-\gamma}(s) g(s, x_s) \mathrm{d}w(s) \right|^2 \right] \qquad (\text{用}(1.3.51)) \\ &\leqslant 3(\gamma k \phi T)^2 + 3T\mathrm{E}\int_{\tau_i}^{T+\tau} I_{\{\tau_i < \infty = \rho_k\}} \psi^{-2\gamma}(s) | f(s, x_s) |^2 \mathrm{d}s \qquad (\text{用 Hölder 不等式}) \\ &\quad + 12\mathrm{E}\int_{\tau_i}^{T+\tau} I_{\{\tau_i < \infty = \rho_k\}} \psi^{-2\gamma}(s) | g(s, x_s) |^2 \mathrm{d}s \qquad (\text{用}(1.3.43)) \\ &\leqslant 3T[\gamma^2 k^2 \phi^2 T + K_\gamma^2 (T + 4)] < \varepsilon \delta^2, \end{aligned}$$

最后一步用了(4.4.7),(4.4.13)与(4.4.19b),注意 $\rho_k = \infty \Rightarrow \forall t \geqslant 0: | \tilde{h}(t) | < k \Rightarrow \forall t \geqslant -\tau. \ | h(t) | \leqslant r$ (用(4.4.7),而 $k > \| \xi \|, r = k/(1 - \kappa_1)$)$\Rightarrow \forall t \geqslant 0$; $\| x_t \| \leqslant r\psi^\gamma(t - \tau)$, 因而可用条件(4.4.13). 于是 $\beta_i < \varepsilon$, 如所要证. □

直接由定理 4.4.1 推出

推论 4.4.2 设定理4.4.1的条件满足. 若存在 $\mathbf{R}^d$ 的子空间 A, 使得

$$q(x) > 0, \quad x \in \mathbf{R}^d, \quad P_A x \neq 0, \tag{4.4.21}$$

$P_A: \mathbf{R}^d \to A$ 是正投影, 则对方程(4.4.1)的任何解 $x(t)$ 有 $\psi^{-\gamma}(t)P_A x(t) \to 0$, a.s. $(t \to \infty)$. 特别, 取 $A = \mathbf{R}^d$ 得: 若 $q(x) > 0(0 \neq x \in \mathbf{R}^d)$, 则式(4.4.12)恒成立.

证 设 $\omega \in \Omega$ 使 $h(t)$ 有界, 但 $P_A h(t) \not\to 0(t \to \infty)$, 则如定理4.4.1之证, 不妨设有 $t_k \to \infty$, 使得 $h(t_k) \to x_0 \in \{q = 0\}$, 而 $P_A h(t_k) \to y \neq 0$, 从而 $P_A x_0 = y \neq 0$, 这与条件(4.4.21)矛盾. 因此必 $P_A h(t) \to 0$, a.s. $(t \to \infty)$. □

定理4.4.1的条件不很简单, 值得作较细的讨论. 条件(4.4.5)与(4.4.14)是常规的, 不必考虑. 若 $\gamma = 0$, 则条件(4.4.13)意味着"$f(t,\varphi)$ 与 $g(t,\varphi)$ 关于 $t \geqslant 0$ 一致地对 $\varphi \in C$ 局部有界", 这并不是一个很苛刻的条件. 若 $\gamma > 0$, f 与 g 满足线性增长条件

$$|f(t,\varphi)| \vee |g(t,\varphi)| \leqslant K\|\varphi\|, \quad t \geqslant 0, \varphi \in C,$$

其中 K 是正常数, 则 $\forall r > 0$, 当 $\|\varphi\| \leqslant r\psi^{\gamma}(t-\tau)$ 时有

$$\psi^{-\gamma}(t)[|f(t,\varphi)| \vee |g(t,\varphi)|] \leqslant Kr[\psi(t-\tau)/\psi(t)]^{\gamma} \leqslant Kr\rho^{\gamma},$$

可见条件(4.4.13)满足. 以上分析表明, 条件(4.4.13)似乎也是可以接受的.

条件(4.4.16)不直接关联方程(4.4.1)的已知信息, 似乎无从验证. 但实际上它可从一些不那么苛刻的条件推出. 首先注意当 $u(\cdot) \equiv 0$ 时条件(4.4.16)自动满足, 可见条件(4.4.16)是专为中立型方程而设的. 对于中立型方程, 下面考虑的特殊情况为验证条件(4.4.16)提供了一些思路. 设存在 $\alpha, \beta > 0$, 使函数 $q(x)$ 满足

$$\alpha|x|^p \leqslant q(x) \leqslant \beta|x|^p, \quad x \in \mathbf{R}^d, \tag{4.4.22}$$

则 $\alpha|h(t)|^p \leqslant z(t) \leqslant \beta|h(t)|^p (t \geqslant -\tau)$, $\tilde{z}(t)$ 仿此. 于是, 当 $t \geqslant 0$ 时有

$$\begin{aligned} z(t) &\leqslant \beta\psi^{-p\gamma}(t)[(1-\kappa_1)^{1-p}|\tilde{x}(t)|^p + \kappa_1^{1-p}\kappa^p\|x_t\|^p] \\ &\leqslant \beta[(1-\kappa_1)^{1-p}|\tilde{h}(t)|^p + \kappa_1 \sup_{t-\tau \leqslant s \leqslant t}|h(s)|^p] \\ &\leqslant \frac{\beta}{\alpha}\Big[\frac{\tilde{z}(t)}{(1-\kappa_1)^{p-1}} + \kappa_1 \sup_{t-\tau \leqslant s \leqslant t} z(s)\Big]. \end{aligned}$$

因此, 若 $\tilde{z}(t) \to 0$, a.s. $(t \to \infty)$, $\kappa_1 < \alpha/\beta$, 则由以上不等式得

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} z(t) \leqslant \frac{\beta}{(1-\kappa_1)^{p-1}(\alpha - \beta\kappa_1)} \lim_{t\to\infty}\tilde{z}(t) = 0, \text{a.s.},$$

可见条件(4.4.16a)满足. 若进而设以下条件满足

$$|u(\varphi)| \leqslant \kappa\int_{-\tau}^{0}|\varphi(\theta)|\,\mathrm{d}\mu, \quad \varphi \in C, \tag{4.4.23}$$

其中 μ 是 $[-\tau, 0]$ 上的某个概率测度, 则

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\int_0^\infty \tilde{z}(t)\,\mathrm{d}t &\leqslant \beta 2^{p-1}\mathrm{E}\int_0^\infty \psi^{-p\gamma}(t)\Big[|x(t)|^p + \kappa^p\int_{-\tau}^{0}|x(t+\theta)|^p\mathrm{d}\mu(\theta)\Big]\mathrm{d}t \\ &\leqslant \beta 2^{p-1}\mathrm{E}\Big[\int_0^\infty |h(t)|^p\mathrm{d}t + \kappa^p\int_{-\tau}^{0}\mathrm{d}\mu(\theta)\int_{-\tau}^{\infty}\psi^{-p\gamma}(t-\theta)|x(t)|^p\mathrm{d}t\Big] \end{aligned}$$

$$\leqslant \text{const} + \frac{\beta 2^{p-1}}{\alpha}(1 + \kappa^p \rho^{p\gamma}) \mathrm{E}\int_0^\infty z(t)\,\mathrm{d}t,$$

这表明条件(4.4.16b)满足. 若条件(4.4.5)′满足,则对方程(4.4.4)可证类似结论. 这就得到

引理 4.4.3　设 $q(x)$ 满足条件(4.4.22)且 $\kappa\rho^\gamma < \alpha/\beta$,则条件(4.4.16a)满足. 若进而设条件(4.4.23)满足,则条件(4.4.16b)亦满足. 对于方程(4.4.4)而言,条件(4.4.5)′与(4.4.22)及 $\kappa\rho^\gamma < \alpha/\beta$ 一起推出条件(4.4.16)满足.

定理 4.4.1 中最关键的条件无疑是(4.4.15). 条件(4.4.15)高度一般化,在具体应用时有很大选择余地,这是其优点. 但如何验证它却成问题. 而且,其中出现方程的解 $x(t)$ 亦不能令人满意. 鉴于以往的经验,我们希望用某个关于 $\mathscr{L}V(t,\varphi)$ 的不等式去取代(4.4.15). 下面的解决方案或许是较为实际可行的.

定理 4.4.4　设存在常数 $p \geqslant 1, \kappa \in [0,1), \gamma \in [0, \ln\kappa^{-1}/\ln\rho), \tau_j \in (0,\tau]$, $[-\tau,0]$ 上的概率测度 ν, 函数 $V(t,x) \in C^{1,2}(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d, \mathbf{R}_+), q_0(x), q_j(x), \bar{q}(x) \in C(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}_+)$ 及 $\zeta(t) \in L^1(\mathbf{R}_+)$, 使得以下条件满足:

$$q(x) \triangleq q_0(x) - \sum_j q_j(x) - \bar{q}(x) \geqslant 0, \quad x \in \mathbf{R}^d, \tag{4.4.24}$$

$$\begin{aligned} &\psi^{-p\gamma}(t)[\mathscr{L}V(t,\varphi) + p\gamma\phi V(t,\tilde{\varphi}(0))] \\ \leqslant&\zeta(t) - q_0(\psi^{-\gamma}(t)\varphi(0)) + \sum_j q_j(\psi^{-\gamma}(t-\tau_j)\varphi(-\tau_j)) \\ &+ \int_{-\tau}^0 \bar{q}(\psi^{-\gamma}(t+\theta)\varphi(\theta))\,\mathrm{d}\nu(\theta), \\ &t \geqslant 0, \varphi \in C, \phi \text{ 依}(4.1.4). \end{aligned} \tag{4.4.25}$$

则条件(4.4.15)满足,因此当定理 4.4.1 的其他条件满足时其结论成立.

证　取定方程(4.4.1)的解 $x(t)$,由条件(4.4.25)有

$$\begin{aligned} &\int_0^t L[\psi^{-p\gamma}(s)V(s,\tilde{x}(s))]\,\mathrm{d}s \\ \leqslant& \int_0^t \psi^{-p\gamma}(s)[LV(s,\tilde{x}(s)) + p\gamma\phi V(s,\tilde{x}(s))]\,\mathrm{d}s \\ \leqslant& \int_0^t \left[\zeta(s) - q_0(h(s)) + \sum_j q_j(h(s-\tau_j)) + \int_{-\tau}^0 \bar{q}(h(s+\theta))\,\mathrm{d}\nu(\theta)\right]\mathrm{d}s \\ \leqslant& \text{const} - \int_0^t q(h(s))\,\mathrm{d}s, \end{aligned}$$

这表明条件(4.4.15)满足,如所要证. □

不等式(4.4.24)意味着,在条件(4.4.25)中 $\varphi(0)$ 起某种支配作用,这正是涉及泛函微分方程的稳定性条件中所常见的. 这一思想同样明显地体现在下一定理中,它用了一个类似于(4.4.25)的条件.

定理 4.4.5　设存在常数 $p \geqslant 1, \kappa \in [0,1), \gamma \in [0, \ln\kappa^{-1}/\ln\rho), c > 0$ 与 $V(t,$

$x) \in C^{1,2}(\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^d,\mathbf{R}_+)$，$q_i(x)\in C(\mathbf{R}^d,\mathbf{R}_+)(i=1,2)$，$\zeta(t)\in L^1(\mathbf{R}_+)$，使得 $q\triangleq q_1-\eta^{-1}q_2\geqslant 0$（$\eta$ 依(4.1.46)），且条件(4.4.5)′，(4.4.14)，(4.4.16)及以下条件满足：

$$\sup_{|x|\vee|y|\leqslant r\psi^{\gamma}(t-\tau)}\psi^{-\gamma}(t)[|F(t,x,y)|\vee|G(t,x,y)|]<\infty,\forall r>0;\qquad(4.4.26)$$

$$\psi^{-p\gamma}(t)[\mathscr{L}V(t,x,y)+p\gamma\phi V(t,x-U(y))]$$
$$\leqslant\zeta(t)-q_1(\psi^{-\gamma}(t)x)+q_2(\psi^{-\gamma}(t-\delta(t))y),\quad t\geqslant 0,x,y\in\mathbf{R}^d.\qquad(4.4.27)$$

则定理4.4.1的结论对于方程(4.4.4)成立.

证 只需验证条件(4.4.15).设 $x(t)$ 为方程(4.4.4)的一个解,则由条件(4.4.27)有

$$\int_0^t L[\psi^{-p\gamma}(s)V(s,\tilde{x}(s))]\mathrm{d}s$$
$$\leqslant\int_0^t[\zeta(s)-q_1(h(s))+q_2(h(s-\delta(s)))]\mathrm{d}s$$
$$\leqslant\text{const}-\int_0^t q(h(s))\mathrm{d}s,$$

这表明条件(4.4.15)满足. □

特别,将定理4.4.4或定理4.4.5用于方程(4.4.3)得

推论4.4.6 设存在常数 $p,c>0,\gamma\geqslant 0$，函数 $V(t,x)\in C^{1,2}(\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^d,\mathbf{R}_+)$，$q(x)\in C(\mathbf{R}^d,\mathbf{R}_+)$ 与 $\zeta(t)\in L^1(\mathbf{R}_+)$，使得条件(4.4.14)及以下条件满足：

$$\sup_{|x|\leqslant r\psi^{-\gamma}(t)}\psi^{-\gamma}(t)[|f(t,x)|\vee|g(t,x)|]<\infty,\quad\forall r>0,\qquad(4.4.26)'$$

$$\mathscr{L}V(t,x)\leqslant p\gamma\psi_1(t)V(t,x)+\psi^{p\gamma}(t)[\zeta(t)-q(\psi^{-\gamma}(t)x)],\quad t\geqslant 0,x\in\mathbf{R}^d.\qquad(4.4.28)$$

则对方程(4.4.3)的任何解 $x(t)$，$\psi^{-\gamma}(t)x(t)$ a.s. 渐近于集 $\Gamma=\{q=0\}$；若 $q(x)>0(0\neq x\in\mathbf{R}^d)$，$\gamma>0$，则方程(4.4.3)的零解(若其存在)a.s. ψ^{γ} 稳定.

当 $\gamma=0$ 时条件(4.4.25)，(4.4.27)与(4.4.28)分别简化为

$$\mathscr{L}V(t,\varphi)\leqslant\zeta(t)-q_0(\varphi(0))+\sum_j q_j(\varphi(-\tau_j))$$
$$+\int_{-\tau}^0\bar{q}(\varphi(\theta))\mathrm{d}\nu,\quad t\geqslant 0,\varphi\in C,\qquad(4.4.25)'$$

$$\mathscr{L}V(t,x,y)\leqslant\zeta(t)-q_1(x)+q_2(y),\quad t\geqslant 0,x,y\in\mathbf{R}^d,\qquad(4.4.27)'$$

$$\mathscr{L}V(t,x)\leqslant\zeta(t)-q(x),\quad t\geqslant 0,x\in\mathbf{R}^d,\qquad(4.4.28)'$$

其中条件(4.4.28)′可与定理2.3.17的条件((2.3.56))对照.

当 $\gamma>0$ 时,条件(4.4.25),(4.4.27)与(4.4.28)略显累赘. 不过,若 $q_j(x)$ 等有某种齐次性,则这些条件可明显简化. 例如,设 $q_j(x)$ 是 p 次齐次函数,即

$$q_j(\alpha x)=\alpha^p q_j(x),\quad \alpha>0, x\in\mathbf{R}^d, \tag{4.4.29}$$

$q_0(x)$ 与 $\bar{q}(x)$ 亦如此,则条件(4.4.25)与(4.4.27)可分别代之以

$$\begin{aligned}\mathscr{L}V(t,\varphi)\leqslant & -p\gamma\phi V(t,\tilde{\varphi}(0))+\zeta(t)-q_0(\varphi(0))\\ &+\sum_j q_j(\varphi(-\tau_j))+\int_{-\tau}^0\bar{q}(\varphi(\theta))\mathrm{d}\nu,\quad t\geqslant 0,\varphi\in C;\end{aligned} \tag{4.4.30}$$

$$\mathscr{L}V(t,x,y)\leqslant -p\gamma\phi V(t,x-U(y))+\zeta(t)-q_1(x)+q_2(y), t\geqslant 0, x,y\in\mathbf{R}^d, \tag{4.4.31}$$

只是要求 $\zeta(t)\psi^{p\gamma}(t)\in L^1(\mathbf{R}_+)$,而式(4.4.30)与(4.4.31)中的函数 q_j 等分别满足:

$$q_0(x)\geqslant\sum_j\rho_j^{p\gamma}q_j(x)+\rho^{p\gamma}\bar{q}(x),\quad x\in\mathbf{R}^d,$$

$$\eta\, q_1(x)\geqslant\rho^{p\gamma}q_2(x),\quad x\in\mathbf{R}^d,$$

其中 ρ 与 ρ_j 分别依(4.1.4)与(4.1.24). 以上条件很接近于(4.2.28a)与定理4.1.4中的条件,而条件(4.4.30)与(4.4.31)可分别与(4.2.26a)'',(4.1.52a)'对照.

简单而常用的情况是取 $q_j(x)$ 为"二次函数",综合引理4.4.3、定理4.4.4和定理4.4.5及上面的分析得到

定理4.4.7　设存在正定矩阵 P,常数 $\kappa\in[0,1)$ 与可测函数 $\zeta(t)$,使得对 $\gamma\in[0,\ln\kappa^{-1}/\ln\rho)$ 有 $\zeta(t)\psi^{2\gamma}(t)\in L^1(\mathbf{R}_+)$,且条件(4.4.13),(4.4.23)及以下条件满足:

$$\begin{aligned}&2\tilde{\varphi}^{\mathrm{T}}(0)Pf(t,\varphi)+|\sqrt{P}g(t,\varphi)|^2+2\gamma\phi\tilde{\varphi}^{\mathrm{T}}(0)P\tilde{\varphi}(0)\\ \leqslant&\zeta(t)-\varphi^{\mathrm{T}}(0)M_\gamma\varphi(0)+\int_{-\tau}^0\varphi^{\mathrm{T}}(\theta)N_\gamma\varphi(\theta)\mathrm{d}\nu_\gamma,\qquad t\geqslant 0,\varphi\in C,\end{aligned} \tag{4.4.32}$$

其中 M_γ,N_γ 是连续地依赖于 γ 的半正定矩阵,ν_γ 是 $[-\tau,0]$ 上的概率测度;$Q_\gamma=M_\gamma-\rho^{2\gamma}N_\gamma$.

(i) 若 Q_0 正定,$\kappa<\lambda_{\min}(Q_0)/\lambda_{\max}(Q_0)$,则当 $\gamma>0$ 充分小时,方程(4.4.1)的零解(若其存在)a. s. ψ^γ 稳定.

(ii) 若 $u(\varphi)\equiv 0$, Q_γ 半正定,则方程(4.4.1)的任何解 $x(t)$ 满足式(4.4.10)与(4.4.11),其中 Γ 是 Q_γ 关于其零特征值的特征子空间,当 $0\,\overline{\in}\,\sigma(Q_\gamma)$ 时 $\Gamma=\{0\}$.

证　只需对 $V=x^{\mathrm{T}}Px$ 应用定理4.4.4. 若 Q_0 正定,则当 γ 充分小时 Q_γ 亦正定,且 $q(x)=x^{\mathrm{T}}Q_\gamma x$ 满足引理4.4.3之条件;而(4.4.32)表明条件(4.4.30)满足. 若 $u(\varphi)\equiv 0$, 则不必验证条件(4.4.16),仅由条件(4.4.32)与 $q(x)\geqslant 0$ 即可应用

定理4.4.4. 此外注意 $q(x) \equiv 0 \Leftrightarrow Q_\gamma x = 0$. □

完全平行地,对于方程(4.4.4)有以下结果.

定理4.4.8 设存在正定矩阵 P,常数 $\kappa \in [0,1)$ 与可测函数 $\zeta(t)$,使得对 $\gamma \in [0,\ln \kappa^{-1}/\ln \rho)$ 有 $\zeta(t)\psi^{2\gamma}(t) \in L^1(\mathbf{R}_+)$,且条件(4.4.5)′,(4.4.26)及以下条件满足:

$$\begin{aligned}&2z^{\mathrm{T}}PF(t,x,y) + |\sqrt{P}G(t,x,y)|^2 + 2\gamma\phi z^{\mathrm{T}}Pz\\&\leqslant \zeta(t) - x^{\mathrm{T}}M_\gamma x + y^{\mathrm{T}}N_\gamma y,\quad t \geqslant 0, x,y \in \mathbf{R}^d, z = x - U(y),\end{aligned}\quad (4.4.33)$$

其中 M_γ, N_γ 是连续地依赖于 γ 的半正定矩阵; $Q_\gamma = M_\gamma - \eta^{-1}\rho^{2\gamma}N_\gamma$.

(i) 若 $Q_0 = M_0 - \eta^{-1}N_0$ 正定, $\kappa < \lambda_{\min}(Q_0)/\lambda_{\max}(Q_0)$,则当 $\gamma > 0$ 充分小时方程(4.4.4)的零解(若其存在)a.s. ψ^γ 稳定.

(ii) 若 $U(y) \equiv 0$, Q_γ 半正定,则方程(4.4.4)的任何解 $x(t)$ 满足式(4.4.10)与(4.4.11),其中 Γ 是 Q_γ 关于其零特征值的特征子空间;当 $0 \overline{\in} \sigma(Q_\gamma)$ 时 $\Gamma = \{0\}$.

为初步检试以上结果的应用,下面考虑若干例子. 在以下讨论中,如下的代数不等式是有用的:设 $A,B,Q \in \mathbf{R}^{d\times d}$, Q 半正定, $x,y \in \mathbf{R}^d$, $\varepsilon > 0$, 则

$$2x^{\mathrm{T}}Qy \leqslant \varepsilon x^{\mathrm{T}}Qx + \varepsilon^{-1}y^{\mathrm{T}}Qy,$$
$$2x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}QBy \leqslant \varepsilon x^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}QAx + \varepsilon^{-1}y^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}QBy.$$

例4.4.9 考虑线性方程

$$\mathrm{d}[x(t) - Kx_t] = [-Ax(t) + Bx_t]\mathrm{d}t + \sum_{k=1}^{m}[C_k x(t) + D_k x_t]\mathrm{d}w_k(t),\quad (4.4.34)$$

其中 $A, C_k \in \mathbf{R}^{d\times d}$, $K,B,D_k: C \to \mathbf{R}^d$ 是有界线性算子. 由引理3.3.15有, $[-\tau,0]$ 上的有限正测度 μ, ν_B, ν_k,使得

$$|K\varphi| \leqslant \kappa\int_{-\tau}^{0}|\varphi(\theta)|\mathrm{d}\mu,\ |B\varphi|^2 \leqslant \int_{-\tau}^{0}|\varphi(\theta)|^2\mathrm{d}\nu_B,$$
$$|D_k\varphi|^2 \leqslant \int_{-\tau}^{0}|\varphi(\theta)|^2\mathrm{d}\nu_k,\quad \varphi \in C.$$

不妨设 μ 为概率测度, $\kappa \in [0,1)$. 设 $\gamma \in [0,\ln \kappa^{-1}/\ln \rho)$, $P \in \mathbf{R}^{d\times d}$ 为正定矩阵, $\varphi \in C$, $\tilde{\varphi}(0) = \varphi(0) - K\varphi$, 则

$$\begin{aligned}&2\tilde{\varphi}^{\mathrm{T}}(0)P[-A\varphi(0) + B\varphi] + 2\gamma\phi\tilde{\varphi}^{\mathrm{T}}(0)P\tilde{\varphi}(0)\\&\quad + \sum_k[C_k\varphi(0) + D_k\varphi]^{\mathrm{T}}P[C_k\varphi(0) + D_k\varphi]\\&= \varphi^{\mathrm{T}}(0)\Big(-2PA + 2\gamma\phi P + \sum_k C_k^{\mathrm{T}}PC_k\Big)\varphi(0) + 2\varphi^{\mathrm{T}}(0)PB\varphi\\&\quad + 2\varphi^{\mathrm{T}}(0)A^{\mathrm{T}}PK\varphi - 2(K\varphi)^{\mathrm{T}}PB\varphi - 4\gamma\phi\varphi^{\mathrm{T}}(0)PK\varphi\\&\quad + 2\gamma\phi|\sqrt{P}K\varphi|^2 + \sum_k[2\varphi^{\mathrm{T}}(0)C_k^{\mathrm{T}}PD_k\varphi + |\sqrt{P}D_k\varphi|^2]\end{aligned}$$

$$\leqslant -\varphi^{\mathrm{T}}(0)\left[2PA-(1+4\gamma\phi)P-\varepsilon A^{\mathrm{T}}PA-2\sum_{k}C_k^{\mathrm{T}}PC_k\right]\varphi(0)$$

$$+(1+\varepsilon^{-1}+4\gamma\phi)|\sqrt{P}K\varphi|^2+2|\sqrt{P}B\varphi|^2+2\sum_k|\sqrt{P}D_k\varphi|^2$$

$$\leqslant -\varphi^{\mathrm{T}}(0)M_\gamma\varphi(0)+\|P\|\left[(1+\varepsilon^{-1}+4\gamma\phi)|K\varphi|^2+2|B\varphi|^2\right.$$

$$\left.+2\sum_k|D_k\varphi|^2\right]$$

$$\leqslant -\varphi^{\mathrm{T}}(0)M_\gamma\varphi(0)+\int_{-\tau}^{0}\varphi^{\mathrm{T}}(\theta)N_\gamma\varphi(\theta)\mathrm{d}\nu_\gamma,$$

其中 $\varepsilon>0$,

$$M_\gamma=PA+A^{\mathrm{T}}P-(1+4\gamma\phi)P-\varepsilon A^{\mathrm{T}}PA-2\sum_k C_k^{\mathrm{T}}PC_k,$$

$$\nu_\gamma=c_\gamma^{-1}\|P\|\left[\kappa^2(1+\varepsilon^{-1}+4\gamma\phi)\mu+2\nu_B+2\sum_k\nu_k\right],$$

$$N_\gamma=c_\gamma I,\quad c_\gamma>0\text{ 决定于}\int_{-\tau}^{0}\mathrm{d}\nu_\gamma=1.$$

假定 ν_γ 使得 c_γ 连续地依赖于 γ. 这就使条件(4.4.32)形式上已满足(取 $\zeta(t)\equiv0$). 于是由定理4.4.7得:若存在正定矩阵 P 与 $\varepsilon>0$, 使得

$$Q_0=PA+A^{\mathrm{T}}P-P-\varepsilon A^{\mathrm{T}}PA-2\sum_k C_k^{\mathrm{T}}PC_k-c_0I$$

正定,且 $\kappa<\lambda_{\min}(Q_0)/\lambda_{\max}(Q_0)$,则当 $\gamma>0$ 适当小时方程(4.4.34)的零解 a. s. ψ^γ 稳定;当 $K=0, Q_\gamma=M_\gamma-c_\gamma\rho^{2\gamma}I$ 半正定时可得出相应结论.

例 4.4.10 考虑线性 SDDE:

$$\mathrm{d}[x(t)-Ky(t)]=[-Ax(t)+By(t)]\mathrm{d}t+\sum_{k=1}^{m}[C_kx(t)+D_ky(t)]\mathrm{d}w_k(t),\quad(4.4.35)$$

其中 $K,A,B,C_k,D_k\in\mathbf{R}^{d\times d}$, $\kappa=\|K\|<1$; $y(t)=x(t-\delta(t))$. 设 P 为正定矩阵, $\gamma\in[0,\ln\kappa^{-1}/\ln\rho)$, $x,y\in\mathbf{R}^d$, $z=x-Ky$, 则类似于例4.4.9中的做法可得

$$2z^{\mathrm{T}}P(-Ax+By)+\sum_k(C_kx+D_ky)^{\mathrm{T}}P(C_kx+D_ky)+2\gamma\phi z^{\mathrm{T}}Pz$$

$$\leqslant -x^{\mathrm{T}}M_\gamma x+y^{\mathrm{T}}N_\gamma y,$$

其中

$$\begin{cases}M_\gamma=PA+A^{\mathrm{T}}P-(\varepsilon_1+2\gamma\phi+2\varepsilon_2\gamma\phi)P-\varepsilon_3A^{\mathrm{T}}PA-2\sum_k C_k^{\mathrm{T}}PC_k,\\ N_\gamma=\varepsilon_1^{-1}B^{\mathrm{T}}PB+(\varepsilon_3^{-1}+2\gamma\phi+2\varepsilon_2\gamma\phi)K^{\mathrm{T}}PK+2\sum_k D_k^{\mathrm{T}}PD_k\\ \qquad -K^{\mathrm{T}}PB-B^{\mathrm{T}}PK.\end{cases}$$

(4.4.36)

于是由定理4.4.8得：若存在正定矩阵 P 与 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3>0$，使得 $Q_0=M_0-\eta^{-1}N_0$ 正定，M_γ,N_γ 依式(4.4.36)，N_γ 半正定，且 $\kappa<\lambda_{\min}(Q_0)/\lambda_{\max}(Q_0)$，则当 $\gamma>0$ 适当小时方程(4.4.35)的零解 a.s. ψ^γ 稳定；若 $K=0$，

$$Q_\gamma=PA+A^{\mathrm T}P-(\varepsilon_1+2\gamma\phi+2\varepsilon_2\gamma\phi)P-\varepsilon_3A^{\mathrm T}PA$$

$$-\eta^{-1}\varepsilon_1^{-1}\rho^{2\gamma}B^{\mathrm T}PB-2\sum_k(C_k^{\mathrm T}PC_k+\eta^{-1}\rho^{2\gamma}D_k^{\mathrm T}PD_k)$$

半正定，则如定理4.4.8(ii)的结论成立.

例4.4.11 考虑一维线性方程

$$\mathrm d[x(t)-0.2y(t)]=[-ax(t)+4y(t)]\mathrm dt+\left[\sqrt{\frac{2}{3}}x(t)+y(t)\right]\mathrm dw(t),\tag{4.4.37}$$

其中 $y(t)=x(t-0.2)$，$a>0$. 取 $\psi(t)=\mathrm e^{-t}$，则 $\rho=\mathrm e^{0.2}$，$\phi=1$. 下面用三种不同方法来研究方程(4.4.37)之零解的 a.s. 指数稳定性，以作对比.

(i) 应用推论4.1.26. 因 $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}x+y\right)^2\leqslant x^2+3y^2$，故套用例4.2.29(i)的结论得：当 $a>6.5$ 时方程(4.4.37)的零解 a.s. 指数稳定.

(ii) 套用4.4.10：取 $P=1,\varepsilon_1=4,\varepsilon_3=0.2a^{-1}$，以 $A=a,B=4,C_k=\sqrt{\frac{2}{3}}$，$D_k=1,k=m=1,K=0.2$ 代入式(4.4.36)，算得 $Q_0=M_0-N_0=1.6a-9.733$. 于是，当 $a>6.083$ 时方程(4.4.37)的零解 a.s. 指数稳定. 这优于(i)中的结论.

(iii) 直接应用定理4.4.8. 取 $P=1,\gamma=0$，则

$$\begin{aligned}\text{式(4.4.33)之左端}&=2(x-0.2y)(-ax+4y)+\left(\sqrt{\frac{2}{3}}x+y\right)^2\\&=x^2\left(\frac{2}{3}-2a\right)-0.6y^2+2\beta xy\qquad\left(\beta=0.2a+4+\sqrt{\frac{2}{3}}\right)\\&\leqslant x^2\left(\frac{2}{3}-2a\right)-0.6y^2+\beta(x^2+y^2)\\&=-\left(2a-\frac{2}{3}-\beta\right)x^2+(\beta-0.6)y^2,\end{aligned}$$

$$Q_0=2a-\frac{2}{3}-2\beta+0.6=1.6a-9.6997.$$

因 $Q_0>0\Leftrightarrow a>6.026$，故当 $a>6.026$ 时方程(4.4.37)的零解 a.s. 指数稳定. 这稍优于(ii)中的结论.

以上例子表明，将定理4.4.7与定理4.4.8应用于线性方程是有效的，但直接套用例4.4.9与例4.4.10中所得的估计则未必收到最好效果，因这些估计很可能

放大过头了,由其所得的判别法可能不够精细.

例 4.4.12 看一个一维非线性方程的例子:

$$d[x(t) - \kappa x(t-1)] = -ax^3(t)dt + b\int_{-1}^{0} x^2(t+\theta)d\theta dw(t), \tag{4.4.38}$$

其中 $\kappa \in [0,1)$, $2a > b^2$. 取 $V = x^2$, 任给 $\varphi \in C[-1,0]$, 有

$$\begin{aligned}\mathscr{L}V(t,\varphi) &= -2a\varphi^3(0)[\varphi(0) - \kappa\varphi(-1)] + b^2\left[\int_{-1}^{0}\varphi^2(\theta)d(\theta)\right]^2 \\ &\leqslant -2a\varphi^4(0) + 2a\kappa\left[\frac{3}{4}\varphi^4(0) + \frac{1}{4}\varphi^4(-1)\right] + b^2\int_{-1}^{0}\varphi^4(\theta)d\theta \\ &= -q_0(\varphi(0)) + q_1(\varphi(-1)) + \int_{-1}^{0}\bar{q}(\varphi(\theta))d\theta,\end{aligned}$$

其中

$$q_0(x) = \left(2a - \frac{3a\kappa}{2}\right)x^4, \quad q_1(x) = \frac{a\kappa x^4}{2}, \quad \bar{q}(x) = b^2x^4,$$

$$q(x) \triangleq q_0(x) - q_1(x) - \bar{q}(x) = (2a - b^2 - 2a\kappa)x^4.$$

若 $2a\kappa < 2a - b^2$, 则 $q(x) \geqslant 0$, $q(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$. 于是由定理4.4.4得:当 $2a > b$, $0 \leqslant \kappa < 1 - b^2/2a$ 时方程(4.4.38)的任何解 a.s. 收敛于零.

4.4.2 整体解的存在性

上一小节遗留一个问题:像(4.4.38)这样的非线性方程,何以知其整体解存在? 一般地,在缺少线性增长条件的情况下,由局部 Lipschitz 条件仅能得到局部解的存在唯一性(参照定理3.1.4),而这就无法支撑任何涉及及渐近性质的讨论. 因此,寻求线性增长条件以外的整体解存在条件具有基本的重要性. 下面的结果本质上基于 Shen(2006)的方法,但其条件更为一般,且更适于配合使用4.4.1节中的结果.

定理 4.4.13 设函数 $f(t,\varphi)$ 与 $g(t,\varphi)$ 满足局部 Lipschitz 条件(依(3.1.19));存在 $\tau_j \in (0,\tau]$, $[-\tau,0]$ 上的概率测度 μ,ν, 径向无界的函数 $V(t,x) \in C^{1,2}([-\tau,\infty) \times \mathbf{R}^d, \mathbf{R}_+)$, $\zeta(t) \in L^1(\mathbf{R}_+)$, $q_0(t,x)$, $q_j(t,x)$, $q(t,x) \in C([-\tau,\infty) \times \mathbf{R}^d, \mathbf{R}_+)$ 及非负增函数 $K(t)$, 使得以下条件满足:

$$q_0(t,x) \geqslant \sum_j q_j(t,x) + q(t,x), \quad t \geqslant 0, x \in \mathbf{R}^d, \tag{4.4.39}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{L}V(t,\varphi) \leqslant K(t)\Big[1 &+ V(t,\varphi(0)) + \sum_j V(t-\tau_j,\varphi(-\tau_j)) \\ &+ \int_{-\tau}^{0}V(t+\theta,\varphi(\theta))d\mu(\theta)\Big] + \zeta(t) - q_0(t,\varphi(0)) \\ &+ \sum_j q_j(t-\tau_j,\varphi(-\tau_j))\end{aligned}$$

$$+\int_{-\tau}^{0} q(t+\theta,\varphi(\theta))\,\mathrm{d}\nu(\theta), \tag{4.4.40}$$

其中 $t \geqslant 0, \varphi \in C$. 则对任给 $\xi \in C^b_{\mathscr{F}_0}(\Omega, C)$, 方程(4.4.2)存在唯一整体解 $x(t,\xi)(-\tau \leqslant t < \infty)$.

证　取定有界初值 ξ,由定理条件推出方程(4.4.2)有唯一极大局部解 $x(t) = x(t,\xi)$, $-\tau \leqslant t < \sigma$, 极大性意味着当 $\sigma < \infty$ 且 $t \uparrow \sigma$ 时 $x(t)$ 无界. 今证 $\sigma = \infty$, a.s.(从而 $x(t)$ 是整体解). 为此作停时序列 $\{\sigma_k\}$:

$$\sigma_k = \sigma \wedge \inf\{0 \leqslant t < \sigma : |x(t)| \geqslant k\}.$$

显然 σ_k 对 k 单调增,故可设 $\sigma_k \to \sigma_\infty (k \to \infty)$. 必定 $\sigma_\infty \leqslant \sigma$, 只要证 $\sigma_\infty = \infty$, a.s.;为此又只要证: $\forall t > 0$,有 $P(\sigma_k \leqslant t) \to 0 (k \to \infty)$. 取定 $t > 0$, 由条件(4.4.40)有

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}V(t\wedge\sigma_k, x(t\wedge\sigma_k)) \\
&= \text{const} + \mathrm{E}\int_0^{t\wedge\sigma_k} LV(s,x(s))\,\mathrm{d}s \\
&\leqslant \text{const} + \mathrm{E}\int_0^{t\wedge\sigma_k} K(s)\Big[1 + V(s,x(s)) + \sum_j V(s-\tau_j, x(s-\tau_j)) \\
&\qquad + \int_{-\tau}^{0} V(s+\theta, x(s+\theta))\,\mathrm{d}\mu(\theta)\Big]\mathrm{d}s \\
&\leqslant \text{const} + tK(t) + \text{const}\, K(t)\mathrm{E}\int_0^{t\wedge\sigma_k} V(s,x(s))\,\mathrm{d}s \\
&\leqslant M(t) + N(t)\int_0^t \mathrm{E}V(s\wedge\sigma_k, x(s\wedge\sigma_k))\,\mathrm{d}s \\
&\leqslant M(t) + N(t)\int_0^t h_k(s)\,\mathrm{d}s,
\end{aligned}$$

其中 $M(t)$ 与 $N(t)$ 是非负增函数(下面用不着其表达式)

$$h_k(t) = \sup_{0\leqslant s\leqslant t} \mathrm{E}V(s\wedge\sigma_k, x(s\wedge\sigma_k)).$$

这就得到

$$h_k(t) \leqslant M(t) + N(t)\int_0^t h_k(s)\,\mathrm{d}s, \quad t \geqslant 0.$$

注意到 $M(t)$ 与 $N(t)$ 单调增,用 Gronwall 不等式((1.3.60))得

$$h_k(t) \leqslant M(t)\exp[tN(t)], \quad t \geqslant 0.$$

于是

$$\begin{aligned}
M(t)\exp[tN(t)] &\geqslant \mathrm{E}V(t\wedge\sigma_k, x(t\wedge\sigma_k)) \\
&\geqslant P(\sigma_k \leqslant t)V(\sigma_k, x(\sigma_k)) \\
&\geqslant m_k P(\sigma_k \leqslant t),
\end{aligned}$$

其中 $m_k = \inf\{V(t,x) : t \geqslant 0, |x| \geqslant k\}$. 由 $V(t,x)$ 径向无界有 $m_k \to \infty$, 故必

$P(\sigma_k \le t) \to 0 (k \to \infty)$，如所要证. □

定理 4.4.13 的主要条件(4.4.40)之作用在于控制方程解的增长，使之不至于在有限时间内"爆破"，从而保证整体解存在. 因此可以说，整体解的存在性问题实质上是一个解估计问题；条件(4.4.40)颇类似于本书中用于解估计的条件，是很自然的. 当然，与稳定性与有界性条件比较，条件(4.4.40)毕竟要宽松得多.

定理 4.4.13 不能用于中立型方程(4.4.1)，这无疑不能令人满意. 消除这一缺陷的一个简单方案如下.

定理 4.4.14　设函数 $f(t,\varphi)$ 与 $g(t,\varphi)$ 满足局部 Lipschitz 条件；存在常数 $\kappa \in [0,1)$，$\tau_j \in (0,\tau]$，$[-\tau,0]$ 上的概率测度 ν，径向无界的函数 $V(t,x) \in C^{1,2}(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d, \mathbf{R}_+)$，$\zeta(t) \in L^1(\mathbf{R}_+)$，$q_0(t,x)$，$q_j(t,x)$，$q(t,x) \in C([-\tau,\infty) \times \mathbf{R}^d, \mathbf{R}_+)$ 及非负增函数 $K(t)$，使得条件(4.4.39)，(3.3.6)，(4.1.8)及以下条件满足：

$$\begin{aligned}\mathscr{L}V(t,\varphi) \le\ & K(t)[1 + V(t,\tilde{\varphi}(0))] + \zeta(t) - q_0(t,\varphi(0)) \\ & + \sum_j q_j(t-\tau_j,\varphi(-\tau_j)) + \int_{-\tau}^0 q(t+\theta,\varphi(\theta))\mathrm{d}\nu(\theta), \qquad (4.4.40)'\end{aligned}$$

其中 $t \ge 0$，$\varphi \in C$. 则对任给 $\xi \in C^b_{\mathscr{F}_0}(\Omega,C)$，方程(4.4.1)存在唯一整体解 $x(t,\xi)(-\tau \le t < \infty)$.

将定理 4.4.13 的证法稍作修改，即可证明以上结果，不必细述.

条件(4.4.40)与(4.4.40)′的右端均出现函数 V，这可能不便于验证. 下面的结果将消除这一缺点.

定理 4.4.15　设函数 $f(t,\varphi)$ 与 $g(t,\varphi)$ 满足局部 Lipschitz 条件；存在常数 $p \ge 1$，$c > 0$，$\kappa \in [0,1)$，$\tau_j \in (0,\tau]$，$[-\tau,0]$ 上的概率测度 μ,ν，函数 $V(t,x) \in C^{1,2}(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d)$，$\zeta(t) \in L^1(\mathbf{R}_+)$，$q_0(t,x)$，$q_j(t,x)$，$q(t,x) \in C([-\tau,\infty) \times \mathbf{R}^d, \mathbf{R}_+)$ 及非负增函数 $K(t)$，使得条件(4.4.14a)，(4.4.39)，(3.3.6)，(4.1.8)及以下条件满足：

$$\begin{aligned}\mathscr{L}V(t,\varphi) \le\ & K(t)\Big[1 + |\varphi(0)|^p + \sum_j |\varphi(-\tau_j)|^p + \int_{-\tau}^0 |\varphi(\theta)|^p \mathrm{d}\mu\Big] \\ & + \zeta(t) - q_0(t,\varphi(0)) + \sum_j q_j(t-\tau_j,\varphi(-\tau_j)) \\ & + \int_{-\tau}^0 q(t+\theta,\varphi(\theta))\mathrm{d}\nu(\theta), \quad t \ge 0, \varphi \in C, \qquad (4.4.41)\end{aligned}$$

则对任给 $\xi \in C^b_{\mathscr{F}_0}(\Omega,C)$，方程(4.4.1)存在唯一整体解 $x(t,\xi)(-\tau \le t < \infty)$.

证　沿用定理 4.4.13 的证法，但作适当改造. 设 $x(t) = x(t,\xi)(-\tau \le t < \sigma)$

是方程(4.4.1)的一个极大局部解，σ_k 仍如定理4.4.13之证. 仿照(4.1.7)约定：

$$h_k(t) = \mathrm{E}|x(t\wedge\sigma_k)|^p, \quad H_k(t) = \sup_{-\tau\leqslant s\leqslant t} h_k(s),$$

$$\tilde{h}_k(t) = \mathrm{E}|\tilde{x}(t\wedge\sigma_k)|^p, \quad \tilde{H}_k(t) = \sup_{0\leqslant s\leqslant t} \tilde{h}_k(s).$$

用证(4.1.13)的方法可建立不等式(此处可粗放些)

$$H_k(t) \leqslant (1-\kappa)^{1-p}[\|\xi\|_0^p + \tilde{H}_k(t)], \quad t\geqslant 0. \qquad (*)$$

关键在于用条件(4.4.41)估计 $\tilde{h}_k(t)$，这类似于定理4.4.13之证中的估计：

$$\begin{aligned} c\,\tilde{h}_k(t) &\leqslant \mathrm{E}V(t\wedge\sigma_k, \tilde{x}(t\wedge\sigma_k)) \\ &\leqslant \mathrm{const} + \mathrm{E}\int_0^{t\wedge\sigma_k} LV(s,\tilde{x}(s))\,\mathrm{d}s \\ &\leqslant \mathrm{const} + \mathrm{E}\int_0^{t\wedge\sigma_k} K(s)\Big[1 + |x(s)|^p + \sum_j |x(s-\tau_j)|^p \\ &\quad + \int_{-\tau}^0 |x(s+\theta)|^p \mathrm{d}\mu(\cdot\theta)\Big]\mathrm{d}s \\ &\leqslant \mathrm{const} + tK(t) + \mathrm{const}\,K(t)\mathrm{E}\int_{-\tau}^{t\wedge\sigma_k} |x(s)|^p\mathrm{d}s \\ &\leqslant M_1(t) + N_1(t)\int_0^t H_k(s)\,\mathrm{d}s, \end{aligned}$$

其中 $M_1(t)$, $N_1(t)$ 是非负增函数，不必写出其表达式. 这就得到

$$c\tilde{H}_k(t) \leqslant M_1(t) + N_1(t)\int_0^t H_k(s)\,\mathrm{d}s.$$

以此代入不等式($*$)得

$$H_k(t) \leqslant M(t) + N(t)\int_0^t H_k(s)\,\mathrm{d}s, \quad t\geqslant 0,$$

其中 $M(t)$ 与 $N(t)$ 仍为与 k 无关的非负增函数(这是要点!). 于是有

$$\begin{aligned} M(t)\exp[tN(t)] \geqslant H_k(t) &\geqslant h_k(t) \\ &\geqslant P(\sigma_k\leqslant t)\,|x(\sigma_k)|^p \\ &= k^p P(\sigma_k\leqslant t), \end{aligned}$$

这推出 $P(\sigma_k\leqslant t)\to 0\,(k\to\infty)$，如所要证. □

用一个例子来解释以上结果的应用.

例 4.4.16 考虑一维非线性方程

$$\mathrm{d}[x(t)-\kappa x(t-1)] = \psi(t)[ax(t) + bx(t-1) - x^3(t) + cx^3(t-1)]\mathrm{d}t$$
$$+ \sqrt{\psi(t)}\int_{-1}^0 [x(t+\theta) + x^2(t+\theta)]\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}w(t), \quad (**)$$

其中 $\psi(t)$ 依§4.2，$\kappa\in[0,1)$，$a,b,c\in\mathbf{R}$. 取 $V = x^2$，则对任给 $\varphi\in C[-1,0]$ 有

$$\mathscr{L}V(t,\varphi) = 2\psi(t)[\varphi(0)-\kappa\varphi(-1)][a\varphi(0) + b\varphi(-1) - \varphi^3(0) + c\varphi^3(-1)]$$

$$
\begin{aligned}
&+\psi(t)\left\{\int_{-\tau}^{0}[\varphi(\theta)+\varphi^{2}(\theta)]\mathrm{d}\theta\right\}^{2}\\
\leqslant\ &\psi(t)\left\{\mathrm{const}[\varphi^{2}(0)+\varphi^{2}(-1)]-2\varphi^{4}(0)-c\kappa\varphi^{4}(-1)\right.\\
&+|c|\left[\frac{\varphi^{4}(0)}{2}+\frac{3\varphi^{4}(-1)}{2}\right]+\kappa\left[\frac{3\varphi^{4}(0)}{2}+\frac{\varphi^{4}(-1)}{2}\right]\\
&\left.+\int_{-1}^{0}\left[\frac{\varphi^{2}(\theta)}{1-\varepsilon}+\frac{\varphi^{4}(\theta)}{\varepsilon}\right]\mathrm{d}\theta\right\}\qquad(0<\varepsilon<1)\\
\leqslant\ &K(t)\left[\varphi^{2}(0)+\varphi^{2}(-1)+\int_{-1}^{0}\varphi^{2}(\theta)\mathrm{d}\theta\right]\\
&-q_{0}(t,\varphi(0))+q_{1}(t-1,\varphi(-1))+\int_{-1}^{0}q(t+\theta,\varphi(\theta))\mathrm{d}\theta,
\end{aligned}
$$

其中 $K(t)$ 是一个非负增函数(不用其表达式),

$$2q_0(t,x)=x^4\psi(t)(4-|c|-3\kappa),$$

$$2q_1(t,x)=x^4\psi(t)\rho^{-1}(3|c|+\kappa-2c\kappa)^{+},\quad q(t,x)=x^4\psi(t)\rho^{-1}\varepsilon^{-1},$$

ρ 依(4.2.4)(取 $\tau=1$). 因此,只要假定

$$\rho(4-|c|-3\kappa)>2+(3|c|+\kappa-2c\kappa)^{+},$$

则可取 $\varepsilon\in(0,1)$ 充分接近于 1,使得

$$q_0(t,x)\geqslant q_1(t,x)+q(t,x),\quad t\geqslant 0,x\in\mathbf{R},$$

从而定理 4.4.15 的条件满足,这就可断定方程(* *)存在整体解.

对于方程(4.4.4),已不难写出对应于定理 4.4.13 ~ 定理 4.4.15 的以下结果.

定理 4.4.17　设函数 $F(t,x,y)$ 与 $G(t,x,y)$ 满足局部 Lipschitz 条件(参看定理 3.3.10);存在常数 $\kappa\in[0,1)$, 径向无界的函数 $V(t,x)\in C^{1,2}(\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^d,\mathbf{R}_+)$, $\zeta(t)\in L^1(\mathbf{R}_+)$, $p_i(t,x),q_i(t,x)\in C([-\tau,\infty)\times\mathbf{R}^d,\mathbf{R}_+)$ 及非负增函数 $K(t)$, 使得条件(4.4.5)′及以下条件满足:

$$\eta p_i(t,x)\geqslant q_i(t,x),\quad t\geqslant 0,x\in\mathbf{R}^d,\eta\text{ 依(4.1.46)},\tag{4.4.39$'$}$$

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}V(t,x,y)\leqslant\ &K(t)V(t,x-U(y))+\zeta(t)\\
&-\sum_i[p_i(t,x)-q_i(t-\delta(t),y)],\quad t\geqslant 0,x,y\in\mathbf{R}^d.
\end{aligned}\tag{4.4.42}
$$

则对任给 $\xi\in C^b_{\mathscr{F}_0}(\Omega,C)$, 方程(4.4.4)存在唯一整体解 $x(t,\xi)(-\tau\leqslant t<\infty)$. 若在式(4.4.4)中 $U(y)\equiv 0$, 则条件(4.4.42)可代之以条件

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}V(t,x,y)\leqslant\ &K(t)[1+V(t,x)+V(t-\delta(t),y)]+\zeta(t)\\
&-\sum_i[p_i(t,x)-q_i(t-\delta(t),y)],\quad t\geqslant 0,x,y\in\mathbf{R}^d.
\end{aligned}\tag{4.4.42$'$}
$$

定理 4.4.18　设函数 $F(t,x,y)$ 与 $G(t,x,y)$ 满足局部 Lipschitz 条件;存在常

数 $p \geqslant 1, \kappa \in [0,1), c>0$, 函数 $V(t,x) \in C^{1,2}(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d), \zeta(t) \in L^1(\mathbf{R}_+), p_i(t,x), q_i(t,x) \in C([-\tau,\infty) \times \mathbf{R}^d, \mathbf{R}_+)$ 及非负增函数 $K(t)$, 使得条件(4.4.5)′,(4.4.14a),(4.4.39)′及以下条件满足:

$$\mathscr{L}V(t,x,y) \leqslant K(t)(1+|x|^p+|y|^p)+\zeta(t) - \sum_i [p_i(t,x)-q_i(t-\delta(t),y)], \quad t \geqslant 0, x,y \in \mathbf{R}^d. \tag{4.4.42$''$}$$

则对任给 $\xi \in C^b_{\mathscr{F}_0}(\Omega,C)$, 方程(4.4.4)存在唯一整体解 $x(t,\xi)(-\tau \leqslant t < \infty)$.

对于最特殊的方程(4.4.3),应用定理4.4.13或定理4.4.17可得以下推论.

推论4.4.19 设函数 $f(t,x)$ 与 $g(t,x)$ 满足局部Lipschitz条件(参看(2.1.8));存在径向无界的函数 $V(t,x) \in C^{1,2}(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d, \mathbf{R}_+)$ 与非负增函数 $K(t)$, 使得

$$\mathscr{L}V(t,x) \leqslant K(t)[1+V(t,x)], \quad t \geqslant 0, x \in \mathbf{R}^d.$$

则对任给 $x_0 \in \mathbf{R}^d$, 方程(4.4.3)存在唯一整体解 $x(t,x_0)(0 \leqslant t < \infty)$.

特别,取 $V=|x|^2$ 从推论4.4.19得

推论4.4.20 设函数 $f(t,x)$ 与 $g(t,x)$ 满足局部Lipschitz条件;存在非负增函数 $K(t)$, 使得以下条件满足:

$$2x^{\mathrm{T}}f(t,x)+|g(t,x)|^2 \leqslant K(t)(1+|x|^2), \quad t \geqslant 0, x \in \mathbf{R}^d. \tag{M}$$

则对任给 $x_0 \in \mathbf{R}^d$, 方程(4.4.3)存在唯一整体解 $x(t,x_0)(0 \leqslant t < \infty)$.

实际上,条件(M)正好与定理2.1.3中的单调性条件((2.1.9))相当.这就从一个远为一般的考虑出发,重建了很特殊的定理2.1.3.有趣的是,当初颇显奇特的单调性条件(2.1.9),现在看来显得很自然了.甚至可以说,条件(4.4.41)或(4.4.42)正是单调性条件的某种推广.

应当指出,本小节所给出的整体解存在条件是相对宽松的,因而能为较多的方程所满足.特别,在局部解存在定理(例如定理3.1.3)之条件满足的前提下,稳定性或有界性条件常常自动地保证了整体解的存在性.几个明显的例子是:当 $\psi'(t) < 0$ 时,定理4.2.11的条件(4.2.26a)″(或(4.2.26b)″)与(4.2.28a)一起推出定理4.4.15的条件(4.4.41)与(4.4.39);定理4.4.16的条件实际上已蕴涵了定理4.4.18的条件.稍加分析后亦可断定,定理4.4.4的条件蕴涵了定理4.4.14的条件.

前面提到,整体解存在问题实质上是一个解估计问题.现在进一步指出,本小节中用于论证整体解存在的方法,可用来建立某些解估计公式.下面就是一例.

定理4.4.21 设 $p \geqslant 2$;函数 $f(t,\varphi)$ 与 $g(t,\varphi)$ 满足局部Lipschitz条件;存在常数 $\kappa \in [0,1), a,b \geqslant 0$, $[-\tau,0]$ 上的概率测度 μ,ν, 函数 $q_0(t,x), q(t,x) \in C([-\tau,\infty) \times \mathbf{R}^d, \mathbf{R}_+)$ 及非负增函数 $K(t), Q(t)$, 使条件(4.4.5),(3.3.6)及以下条件满足:

$$q_0(t,x) \geqslant q(t,x), \quad t \geqslant 0, x \in \mathbf{R}^d,$$

$$|g(t,\varphi)|^2 \leqslant Q(t)(1+\|\varphi\|^2), \quad t \geqslant 0, \varphi \in C,$$

$$\mathscr{L}V(t,\varphi)\leqslant K(t)\Big[1+a|\varphi(0)|^p+b\int_{-\tau}^0|\varphi(\theta)|^p\mathrm{d}\mu\Big]$$
$$-q_0(t,\varphi(0))+\int_{-\tau}^0 q(t+\theta,\varphi(\theta))\mathrm{d}\nu(\theta),\quad t\geqslant 0,\varphi\in C,$$

其中 $V=|x|^p$. 则对任给 $\xi\in C_{\mathscr{F}_0}^b(\Omega,C)$, 方程(4.4.1)的解 $x(t)=x(t,\xi)$ 满足:

$$\mathrm{E}\Big[\sup_{-\tau\leqslant s\leqslant t}|x(s)|^p\Big]\leqslant A\mathrm{e}^{t\beta(t)},\quad t\geqslant 0,$$

其中

$$A=1+\mathrm{E}\|\xi\|^p\Big[\frac{1}{1-\kappa}+2\Big(\frac{1+\kappa}{1-\kappa}\Big)^p\Big]+\frac{2}{(1-\kappa)^p}\int_{-\tau}^0\mathrm{E}q(\theta,\xi(\theta))\mathrm{d}\theta,$$

$$\beta(t)=\frac{2[1\vee(a+b)]K(t)+p^2 2^{6-2/p}(1+\kappa)^{p-2}Q(t)}{(1-\kappa)^p}.$$

证　由定理4.4.15知 $x(t)$ 必为整体解. 令

$$\sigma_k=\inf\{t\geqslant 0:|x(t)|\geqslant k\},$$
$$h_k(t)=\mathrm{E}[\sup_{-\tau\leqslant s\leqslant t}|x(s\wedge\sigma_k)|^p],$$
$$\tilde{h}_k(t)=\mathrm{E}[\sup_{0\leqslant s\leqslant t}|\tilde{x}(s\wedge\sigma_k)|^p],$$

其中 $k\in\mathbf{N},t\geqslant 0$. 显然 σ_k 对 k 单调增且 $\sigma_k\to\infty$, a.s.. 类似于(3.3.13), 可建立

$$h_k(t)\leqslant\frac{\mathrm{E}\|\xi\|^p}{1-\kappa}+\frac{\tilde{h}_k(t)}{(1-\kappa)^p},\quad t\geqslant 0.$$

取定 $t\geqslant 0$, 今估计 $\tilde{h}_k(t)$. 为记号简便, 约定 $t_k=t\wedge\sigma_k, s_k=s\wedge\sigma_k$.

$$\tilde{h}_k(t)=\mathrm{E}\Big\{\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\Big[|\tilde{x}(0)|^p+\int_0^{s_k}L|\tilde{x}(r)|^p\mathrm{d}r+\int_0^{s_k}Z(r)\mathrm{d}w(r)\Big]\Big\}$$
$$\leqslant\mathrm{E}|\tilde{x}(0)|^p+\mathrm{E}\Big[\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\int_0^{s_k}L|\tilde{x}(r)|^p\mathrm{d}r\Big]+\mathrm{E}\Big[\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\int_0^{s_k}Z(r)\mathrm{d}w(r)\Big]$$
$$\triangleq I_1+I_2+I_3,$$

其中 $Z(r)=p|\tilde{x}(r)|^{p-2}\tilde{x}^{\mathrm{T}}(r)g(r,x_r)$. 分别估计 $I_1\sim I_3$ 如下:

$$I_1\leqslant(1+\kappa)^p\mathrm{E}\|\xi\|^p,$$

$$I_2\leqslant\mathrm{E}\Big\{\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\Big[\int_0^{s_k}K(r)\Big(1+a|x(r)|^p+b\int_{-\tau}^0|x(r+\theta)|^p\mathrm{d}\mu(\theta)\Big)\mathrm{d}r$$
$$-\int_0^{s_k}\Big(q_0(r,x(r))-\int_{-\tau}^0 q(r+\theta,x(r+\theta))\mathrm{d}\nu(\theta)\Big)\mathrm{d}r\Big]\Big\}$$
$$\leqslant\mathrm{E}\int_0^{t_k}K(s)[1+(a+b)\|x_s\|^p]\mathrm{d}s+\int_{-\tau}^0\mathrm{E}q(\theta,\xi(\theta))\mathrm{d}\theta$$

$$\leqslant [1 \vee (a+b)]K(t)\int_0^t [1+h_k(s)]\mathrm{d}s + \int_{-\tau}^0 \mathrm{E}q(\theta,\xi(\theta))\mathrm{d}\theta$$

$$\triangleq A_1 + \beta_1(t)\int_0^t [1+h_k(s)]\mathrm{d}s,$$

$$I_3 \leqslant \mathrm{E}\Big[32p^2\int_0^{t_k} |\tilde{x}(s)|^{2p-4}|\tilde{x}^{\mathrm{T}}(s)g(s,x_s)|^2\mathrm{d}s\Big]^{1/2} \qquad (\text{用}(1.3.48))$$

$$\leqslant \mathrm{E}\Big[\sup_{0\leqslant s\leqslant t}|\tilde{x}(s_k)|^p\int_0^{t_k}32p^2|\tilde{x}(s)|^{p-2}|g(s,x_s)|^2\mathrm{d}s\Big]^{1/2}$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\tilde{h}_k(t) + 16p^2\mathrm{E}\int_0^{t_k}|\tilde{x}(s)|^{p-2}|g(s,x_s)|^2\mathrm{d}s$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\tilde{h}_k(t) + 16p\mathrm{E}\int_0^{t_k}[(p-2)\varepsilon^{\frac{p}{p-2}}|\tilde{x}(s)|^p + 2\varepsilon^{-\frac{p}{2}}|g(s,x_s)|^p]\mathrm{d}s \quad (\varepsilon>0)$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\tilde{h}_k(t) + 16p[(p-2)\varepsilon^{\frac{p}{p-2}}(1+\kappa)^p + (2Q(t)/\varepsilon)^{\frac{p}{2}}]\int_0^t[1+h_k(s)]\mathrm{d}s$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\tilde{h}_k(t) + p^2 2^{5-2/p}Q(t)(1+\kappa)^{p-2}\int_0^t[1+h_k(s)]\mathrm{d}s.\ (\text{取 } \varepsilon^{\frac{p}{p-2}} = \frac{2Q(t)}{4^{1/p}(1+\kappa)^2})$$

综上得

$$\tilde{h}_k(t) \leqslant A_2 + \beta_2(t)\int_0^t[1+h_k(s)]\mathrm{d}s,$$

其中

$$A_2 = 2A_1 + 2(1+\kappa)^p\mathrm{E}\|\xi\|^p, \beta_2(t) = 2\beta_1(t) + p^2 2^{6-2/p}Q(t)(1+\kappa)^{p-2}.$$

进而得

$$1+h_k(t) \leqslant A + \beta(t)\int_0^t[1+h_k(s)]\mathrm{d}s,$$

其中

$$A = 1 + \frac{\mathrm{E}\|\xi\|^p}{1-\kappa} + \frac{A_2}{(1-\kappa)^p}, \quad \beta(t) = \frac{\beta_2(t)}{(1-\kappa)^p}.$$

因 $A>0$,$\beta(t)$ 是与 k 无关的非负增函数,故可用 Gronwall 不等式解出

$$h_k(t) \leqslant 1 + h_k(t) \leqslant A\mathrm{e}^{t\beta(t)},$$

然后令 $k\to\infty$ 取极限即得所要证. □

定理 4.4.21 可与定理 3.3.4 相对照. 它的一个直接推论是,在定理 4.4.21 的条件下, 对方程(4.4.1)的每个解有

$$\mathrm{E}\Big(\sup_{-\tau\leqslant s\leqslant t}|x(s)|^p\Big) < \infty, \quad \forall t>0.$$

4.4.3　比较原理

现在考虑判定稳定性的另一种方法. 与方程(4.4.2)比较,考虑某个一维 FDE:

$$\dot{u}(t) = h(t,u_t), \tag{4.4.43}$$

其中 $h \in C(\mathbf{R}_+ \times \mathscr{C})$,此处 $\mathscr{C} = C([-\tau,0],\mathbf{R}_+)$. 下面总假定,对任给 $\zeta \in \mathscr{C}$, 方程(4.4.43)存在唯一解 $u(t,\zeta)$ 且 $u(t,\zeta) \geqslant 0(-\tau \leqslant t < \infty)$;$h(t,0) \equiv 0$,因而 $u(t,0) \equiv 0$. 对于确定性方程(4.4.43)零解稳定性之判定,有较多的方法可用. 而在一定条件下,从方程(4.4.43)的某些稳定性结论可推出方程(4.4.2)的相应稳定性结论. 这一类的结果基于**比较原理**,它是从 ODE 理论中的类似结果发展出来的,这方面的工作似乎还不多,此处主要参考 Luo(2003,2006). 在稳定性理论中,比较原理应当是一种独具特色的工具.

本小节所要利用的比较原理,依据以下引理.

引理 4.4.22　设存在 $V(t,x) \in C^{1,2}([-\tau,\infty) \times \mathbf{R}^d,\mathbf{R}_+)$ 使得以下条件满足:

$$\mathrm{E}\mathscr{L}V(t,\varphi) \leqslant h(t,V_t), \quad V_t(\theta) = \mathrm{E}V(t+\theta,\varphi(\theta)), \quad t \geqslant 0, \tag{4.4.44}$$

只要 C 值随机变量 φ 使 $V_t(\theta)(-\tau \leqslant \theta \leqslant 0)$ 有定义且 $V_t \in \mathscr{C}$. 若 $x(t) = x(t,\xi)$ 与 $u(t) = u(t,\xi)$ 分别为方程(4.4.2)与(4.4.43)的解,

$$\mathrm{E}V(\theta,\xi(\theta)) \leqslant \zeta(\theta), \quad -\tau \leqslant \theta \leqslant 0, \tag{4.4.45}$$

$$\mathrm{E}V(t,x(t)) < \infty, \quad t \geqslant 0, \tag{4.4.46}$$

则成立

$$\mathrm{E}V(t,x(t)) \leqslant u(t), \quad t \geqslant -\tau. \tag{4.4.47}$$

证　结合条件(4.4.45)与(4.4.46)知 $m(t) \triangleq \mathrm{E}V(t,x(t))$ 对 $t \geqslant -\tau$ 有定义,且 $m(\theta) \leqslant u(\theta)(-\tau \leqslant \theta \leqslant 0$,依(4.4.45)). 易见 $0 \leqslant m(t) \in C[-\tau,\infty)$. 若 $0 \leqslant t < \sigma < \infty$,则

$$m(s)\Big|_t^\sigma = \int_t^\sigma \mathrm{E}LV(s,x(s))\mathrm{d}s \leqslant \int_t^\sigma h(s,m_s)\mathrm{d}s, \qquad (\text{用}(4.4.44))$$

这得出 $\mathrm{D}^+ m(t) \leqslant h(t,m_t)(t \geqslant 0)$,$\mathrm{D}^+$ 记右上导数. 由已知的微分不等式结论,这推出 $m(t) \leqslant u(t)(t \geqslant 0)$,可见式(4.4.47)成立. □

不等式(4.4.47)的价值在于,利用(4.4.47),可将关于方程(4.4.43)零解的某些稳定性结论过渡到关于方程(4.4.2)的类似结论. 为利用引理 4.4.22,通常设定条件(4.4.44)满足,而关键的技巧常在于选择适当的 $\zeta \in \mathscr{C}$ 使条件(4.4.45)满足,然后引用不等式(4.4.47)去导出所需要的结论.

下面总假定方程(4.4.2)有零解.

定理 4.4.23　设条件(4.4.44)满足,存在 $a(t),b(t) \in C(\mathbf{R}_+)$,$a(t)$ 严格增且 $a(0) = 0$,$b(t)$ 是凹函数, $b(0) = 0$;

$$a(|x|) \leqslant V(t,x) \leqslant b(|x|), \quad t \geqslant -\tau, x \in \mathbf{R}^d. \tag{4.4.48}$$

(i) 若方程(4.4.43)的零解稳定,则 $\forall \varepsilon, r > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon, r) > 0$,当 $\|\xi\| < \delta$ 时方程(4.4.2)的解 $x(t,\xi)$ 满足

$$P(|x(t,\xi)| > r) < \varepsilon, \quad \forall t \geqslant -\tau. \tag{4.4.49}$$

(ii) 若方程(4.4.43)的零解渐近稳定,即其零解稳定,且 $\exists \delta_0 > 0$,当 $\|\zeta\| < \delta_0$ 时方程(4.4.43)的解 $u(t,\zeta)$ 收敛于零,则 $\exists \delta > 0, \forall \varepsilon, r > 0, \exists T = T(\varepsilon, r) > 0$,当 $\|\xi\| < \delta$ 时有

$$P(|x(t,\xi)| > r) < \varepsilon, \quad \forall t \geqslant T. \tag{4.4.49$'$}$$

证 (i) 取定 $\varepsilon, r > 0$. 取 $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon, r)$,使当 $\|\zeta\| < \delta_0$ 时有

$$u(t,\zeta) < \varepsilon a(r), \quad t \geqslant -\tau. \tag{4.4.50}$$

取定 $\zeta \in \mathscr{C}$,使得 $0 < \zeta(\theta) < \delta_0 (-\tau \leqslant \theta \leqslant 0)$. 由 $b(0) = 0$ 及连续性,有 $\delta > 0$,使得

$$b(u) \leqslant \zeta(\theta), \quad -\tau \leqslant \theta \leqslant 0 \leqslant u < \delta. \tag{4.4.51}$$

取定方程(4.4.2)的解 $x(t) = x(t,\xi)$,其中 ξ 满足 $\|\xi\| < \delta$. 结合式(4.4.48)与(4.4.51)得

$$\mathrm{E}V(\theta,\xi(\theta)) \leqslant \mathrm{E}b(|\xi(\theta)|) \leqslant \zeta(\theta), \quad -\tau \leqslant \theta \leqslant 0,$$

可见条件(4.4.46)满足. 其次, $\forall t \geqslant 0$,由对 b 的假定有

$$\mathrm{E}V(t,x(t)) \leqslant \mathrm{E}b(|x(t)|) \leqslant b(\mathrm{E}|x(t)|) < \infty.$$

于是可用引理4.4.22 与式(4.4.50)得

$$\mathrm{E}V(t,x(t)) \leqslant u(t,\zeta) < \varepsilon a(r), \quad t \geqslant -\tau.$$

若式(4.4.49)不成立,则存在 $t \geqslant -\tau$,使得 $P(|x(t)| > r) \geqslant \varepsilon$,于是

$$\begin{aligned}\varepsilon &\leqslant P(a(|x(t)|) > a(r)) && (a(t)\ \text{严格增})\\ &\leqslant P(V(t,x(t)) > a(r)) && (\text{用}(4.4.48))\\ &\leqslant \mathrm{E}V(t,x(t))/a(r) < \varepsilon,\end{aligned}$$

得出矛盾. 故式(4.4.49)必成立.

(ii) 取 $\delta_0 > 0$, 使当 $\|\zeta\| < \delta_0$ 时 $u(t,\zeta) \to 0 (t \to \infty)$. 取定 $\zeta \in \mathscr{C}$, 使得 $0 < \zeta(\theta) < \delta_0 (-\tau \leqslant \theta \leqslant 0)$; 取 $\delta > 0$,使得不等式(4.4.51)成立. 取定 $\varepsilon, r > 0$, $T = T(\varepsilon, r) > 0$,使不等式(4.4.50)在 $t \geqslant T$ 时成立. 设 $x(t) = x(t,\xi)$, $\|\xi\| < \delta$, 则重复(i)中的推理可得(4.4.49)$'$成立. □

定理4.4.23 表明,在定理条件下,方程(4.4.43)的稳定性与渐近稳定性分别推出方程(4.4.2)的随机稳定性与随机渐近稳定性. 不过,由式(4.4.49)(或(4.4.49)$'$)所描述的"随机稳定"(或"随机渐近稳定"),弱于定义2.3.1(i)(或(ii))所界定的随机稳定(或随机渐近稳定).

定理4.4.24 设条件(4.4.44)满足; $a(t)$ 与 $b(t)$ 如定理4.4.23 且 $a(t)$ 为凸函数;存在正常数 p,使得

$$a(|x|^p) \leqslant V(t,x) \leqslant b(|x|^p), \quad t \geqslant -\tau, x \in \mathbf{R}^d. \tag{4.4.52}$$

(i) 若方程(4.4.43)的零解稳定,则方程(4.4.2)的零解 p 阶矩稳定,即 $\forall r > 0, \exists \delta = \delta(r) > 0$,使得当 $\|\xi\| < \delta$ 时,方程(4.4.2)的解 $x(t,\xi)$ 满足

$$\mathrm{E}|x(t,\xi)|^p < r, \quad t \geqslant -\tau. \tag{4.4.53}$$

(ii) 若方程(4.4.43)的零解渐近稳定,则方程(4.4.2)的零解 p 阶矩渐近稳定,即 p 阶矩稳定,且 $\exists \delta > 0$,当 $\|\xi\| < \delta$ 时方程(4.4.2)的解 $x(t,\xi)$ 均满足 $\mathrm{E}|x(t,\xi)|^p \to 0 (t \to \infty)$.

证 (i) 取定 $r > 0$,取 $\delta_0 = \delta_0(r) > 0$,使当 $\|\zeta\| < \delta_0$ 时 $u(t,\zeta) < a(r) (\forall t \geqslant -\tau)$. 取 $\delta = \delta(r) > 0$,使得

$$b(u^p) < \delta_0, \quad 0 \leqslant u < \delta. \tag{4.4.54}$$

取定 $x(t) = x(t,\xi)$, $\|\xi\| < \delta$. 令 $\zeta(\theta) = b(\mathrm{E}|\xi(\theta)|^p)$,则 $\zeta(\theta) \in \mathscr{C}$, $\|\zeta\| < \delta_0$ (用(4.4.54)); $\mathrm{E}V(\theta,\xi(\theta)) \leqslant \zeta(\theta)$ (用(4.4.52)). 于是可用引理4.4.22得

$$\mathrm{E}V(t,x(t)) \leqslant u(t,\zeta) < a(r), \quad t \geqslant -\tau.$$

然后用条件(4.4.52)及 $a(t)$ 为凸函数得

$$a(\mathrm{E}|x(t)|^p) \leqslant \mathrm{E}a(|x(t)|^p) \leqslant \mathrm{E}V(t,x(t)) < a(r), \quad t \geqslant -\tau,$$

这得出不等式(4.4.53).

(ii) 取 $\delta_0 > 0$,使当 $\|\zeta\| < \delta_0$ 时 $u(t,\zeta) \to 0 (t \to \infty)$. 取 $\delta > 0$,使式(4.4.54)成立. 则如同(i)之证,当 $\|\xi\| < \delta$ 时有 $\mathrm{E}V(t,x(t)) \leqslant u(t,\zeta) \to 0 (t \to \infty)$,此处 $\zeta(\theta) = b(\mathrm{E}|\xi(\theta)|^p)$. 进而有 $a(\mathrm{E}|x(t,\xi)|^p) \to 0 (t \to \infty)$,从而 $\mathrm{E}|x(t,\xi)|^p \to 0 (t \to \infty)$. □

注意在定理4.4.24(ii)中,当 $\delta_0 = \infty$ 时可取 $\delta = \infty$.

定理4.4.25 设条件(4.4.44)与(4.4.52)满足,函数 $a(t)$ 与 $b(t)$ 如定理4.4.23,且设 $a(t)$ 为凸函数, $a'(0) > 0$; $\psi(t)$ 依§4.1, $\gamma > 0$; $\delta_0 \in (0,\infty]$,当 $\|\zeta\| < \delta_0$ 时方程(4.4.43)的解 $u(t,\zeta)$ 满足

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{\ln u(t,\zeta)}{|\ln \psi(t)|} \leqslant -\gamma. \tag{4.4.55}$$

则存在 $\delta \in (0,\infty]$,使当 $\|\xi\| < \delta$ 时方程(4.4.2)的解 $x(t,\xi)$ 满足

$$\overline{\lim_{t \to \infty}} \frac{\ln \mathrm{E}|x(t,\zeta)|^p}{|\ln \psi(t)|} \leqslant -\gamma. \tag{4.4.56}$$

当 $\delta_0 = \infty$ 时可取 $\delta = \infty$,因此当方程(4.4.43)的零解"ψ^γ 稳定"时,方程(4.4.2)的零解 p 阶矩 ψ^γ 稳定.

证 取 $\delta \in (0,\infty]$,使得式(4.4.54)成立. 注意当 $\delta_0 = \infty$ 时可取 $\delta = \infty$. 取定方程(4.4.2)的解 $x(t) = x(t,\xi)$,使 $\|\xi\| < \delta$. 令 $\zeta(\theta) = b(\mathrm{E}|\xi(\theta)|^p)$,则 $\zeta \in \mathscr{C}$, $\|\zeta\| < \delta_0$(用(4.4.54)),且如定理4.4.24之证可得

$$a(\mathrm{E}|x(t)|^p) \leqslant u(t,\zeta) \triangleq u(t), \quad t \geqslant -\tau.$$

为证式(4.4.56),只要对任给 $\mu \in (0,\gamma)$, 证 $E|x(t)|^p \leqslant \text{const}\ \psi^\mu(t)$ (t 充分大). 由式(4.4.55),当 t 充分大时有 $u(t) \leqslant \psi^\mu(t)$. 取常数 $\beta > 1/a'(0)$,则当 $s \downarrow 0$ 有 $\beta > s/a(s)$. 于是当 t 充分大时

$$a(E|x(t)|^p) \leqslant \psi^\mu(t) = \frac{\beta\,\psi^\mu(t)}{\beta\,a(\beta\,\psi^\mu(t))}a(\beta\,\psi^\mu(t)) \leqslant a(\beta\,\psi^\mu(t)),$$

从而 $E|x(t)|^p \leqslant \beta\,\psi^\mu(t)$, 如所要证. □

一个类似于定理4.4.25 的结果是

定理4.4.26 设条件(4.4.44)与(4.4.48)满足,且设函数 $a(t)$ 有性质 $a'(0) > 0$;$\psi(t)$ 如 §4.1,$\gamma > 0$;存在$\delta_0 \in (0,\infty]$,当 $\|\xi\| < \delta_0$ 时方程(4.4.43)的解 $u(t,\zeta)$ 满足式(4.4.55). 则存在 $\delta \in (0,\infty]$,使当 $\|\xi\| < \delta$ 时方程(4.4.2)的解 $x(t,\xi)$ 有以下性质: $\forall \varepsilon > 0,\mu \in (0,\gamma)$, $\exists T = T(\varepsilon,\mu,\xi) > 0$, 使得

$$P(|x(t,\xi)| > \psi^\mu(t)) < \varepsilon, \quad t \geqslant T. \tag{4.4.57}$$

当 $\delta_0 = \infty$ 时可取 $\delta = \infty$.

证 取 $\delta \in (0,\infty]$,使得 $\forall u \in (0,\delta]$,有 $b(u) < \delta_0$. 显然, 当 $\delta_0 = \infty$ 时,可取 $\delta = \infty$. 取定方程(4.4.2)的解 $x(t) = x(t,\xi)$,设 $\|\xi\| < \delta$. 令 $\zeta(\theta) = b(E|\xi(\theta)|)$,则 $\zeta \in \mathscr{C}$, $\|\zeta\| < \delta_0$,于是 $u(t) \triangleq u(t,\zeta)$ 满足式(4.4.55). 类似于前面的论证,由引理4.4.22 推出 $EV(t,x(t)) \leqslant u(t)$ $(t \geqslant -\tau)$.

取定 $\varepsilon > 0,\mu \in (0,\gamma)$. 由式(4.4.55),有 $T = T(\varepsilon,\mu,\xi) > 0$,使得

$$EV(t,x(t)) \leqslant u(t) \leqslant \varepsilon^2\psi^\mu(t), \quad t \geqslant T.$$

另一方面,不妨设 $\varepsilon < a'(0)$,因而当 $s > 0$ 充分小时有 $\varepsilon < a(s)/s$,因此不妨设

$$\varepsilon < a(\psi^\mu(t))/\psi^\mu(t), \quad t \geqslant T.$$

以上事实推出式(4.4.57)必成立. 否则有 $t \geqslant T$,使得 $P(|x(t)| > \psi^\mu(t)) \geqslant \varepsilon$;于是

$$\begin{aligned}\varepsilon &\leqslant P(a(|x(t)|) > a(\psi^\mu(t)))\\ &\leqslant P(V(t,x(t)) > a(\psi^\mu(t))) \qquad (\text{用}(4.4.48))\\ &\leqslant \frac{1}{a(\psi^\mu(t))}EV(t,x(t)) \leqslant \frac{\varepsilon^2\psi^\mu(t)}{a(\psi^\mu(t))} < \varepsilon,\end{aligned}$$

得出矛盾. □

式(4.4.57)表明,当 t 充分大时,不等式 $\dfrac{\ln|x(t,\xi)|}{|\ln\psi(t)|} \leqslant -\mu$ 以很大的概率成立. 但这仍不足以推出

$$\varlimsup_{t\to\infty}\frac{\ln|x(t,\xi)|}{|\ln\psi(t)|} \leqslant -\gamma, \text{a. s.}.$$

为有效地应用已得的比较定理,关键在于找到一个适当的"比较方程"(4.4.43). 显然,函数 h 的选择强烈地依赖于不等式(4.4.44),因而依赖于 Liapunov 函数 V

的选择. 通常 h 并不是预先选定的,而是在选定 V 后作为估计 $\mathrm{E}\mathscr{L}V(t,\varphi)$ 的自然结果. 试看一个特殊情况. 取 $V=|x|^p, p\geqslant 1$, 设(参看(3.3.40))

$$\mathrm{E}\mathscr{L}V(t,\varphi)\leqslant -\lambda_0\mathrm{E}|\varphi(0)|^p+\lambda_1\|\varphi\|_0^p,\quad \varphi\in L^p_{\mathscr{F}_t}(\Omega,C). \tag{4.4.58}$$

对照式(4.4.58)与(4.4.44)看出,若取

$$h(v)=-\lambda_0 v(0)+\lambda_1\|v\|,\quad v\in\mathscr{C},$$

则对任给 $\varphi\in L^p_{\mathscr{F}}(\Omega,C)$, $t\geqslant 0$, 有 $V_t(\theta)=\mathrm{E}|\varphi(\theta)|^p$, $\|V_t\|=\|\varphi\|_0^p$,

$$h(V_t)=-\lambda_0\mathrm{E}|\varphi(0)|^p+\lambda_1\|\varphi\|_0^p,$$

这表明条件(4.4.44)满足. 取 $a(t)\equiv t\equiv b(t)$ 知条件(4.4.52)满足. 对于一维 FDE:

$$\dot{u}(t)=h(u_t)=-\lambda_0 u(t)+\lambda_1\|u_t\|,$$

有多种方法得出(例如用定理3.3.9,或参看 Baker 等(2005)):当 $\lambda_0>\lambda_1^+$ 时以上方程的零解指数稳定. 于是从定理4.4.25 得到

推论 4.4.27　设 $p\geqslant 1$, $V=|x|^p$, 存在 $\lambda_0,\lambda_1,\lambda_0>\lambda_1^+$, 使条件(4.4.58)满足,则方程(4.4.2)的零解 p 阶矩指数稳定.

已获结果定理4.4.23～定理4.4.26 的共同基础是引理4.4.22 之证中用到的微分不等式结论. 还可依其他途径应用类似的微分不等式,下面结果即属此类.

定理 4.4.28　设存在 $V(t,x)\in C^{1,2}([-\tau,\infty)\times\mathbf{R}^d)$, 常数 $c_1,c_2>0, a, a_j, b\geqslant 0, \tau_j\in(0,\tau]$, $[-\tau,0]$ 上的概率测度 μ, 使得以下条件满足:

$$c_1|x|^p\leqslant V(t,x)\leqslant c_2|x|^p,\quad t\geqslant -\tau, x\in\mathbf{R}^d, \tag{4.4.59}$$

$$\mathscr{L}V(t,\varphi)\leqslant -aV(t,\varphi(0))+\sum_j a_jV(t-\tau_j,\varphi(-\tau_j))$$
$$+b\int_{-\tau}^0 V(t+\theta,\varphi(\theta))\mathrm{d}\mu(\theta),\quad t\geqslant 0,\varphi\in C,$$

$0<b+\sum a_j<a$, γ 是以下方程的唯一正解:

$$b\rho^\gamma+\gamma\phi+\sum_j a_j\rho_j^\gamma=a,$$

其中 ρ,ϕ 依(4.1.4), ρ_j 依(4.1.24). 若方程(4.4.2)的解 $x(t,\xi)$ 满足条件(4.4.46),则

$$\mathrm{E}|x(t,\xi)|^p\leqslant (c_2/c_1)\|\xi\|_0^p\psi^\gamma(t),\quad t\geqslant -\tau. \tag{4.4.60}$$

证　取定方程(4.4.2)的一个解 $x(t)=x(t,\xi)$, 令 $m(t)=\mathrm{E}V(t,x(t))$. 则

$$c_1\mathrm{E}|x(t)|^p\leqslant m(t)\in C[-\tau,\infty).$$

只要证 $m(t)\leqslant c_2\|\xi\|_0^p\psi^\gamma(t)\triangleq u(t)\,(t\geqslant -\tau)$. 不妨设 $\tau>0$, $\|\xi\|_0^p>0$. 只要对任给 $\beta>1$, 证 $m(t)<\beta u(t)\,(t\geqslant -\tau)$. 首先对 $\theta\in[-\tau,0]$ 有

$$m(\theta)\leqslant c_2\mathrm{E}|\xi(\theta)|^p\leqslant c_2\|\xi\|_0^p\leqslant u(\theta)<\beta u(\theta).$$

若不等式 $m(t)<\beta u(t)$ 不对所有 $t>0$ 成立,则必有最小的 $r>0$, 使得在 $[-\tau, r]$ 上成立 $m(t)<\beta u(t)$; 必定 $m(r)=\beta u(r)$. 对充分小的 $\delta>0$ 有

$$m(r-\delta)-m(r)<\beta u(r-\delta)-\beta u(r).$$

这推出左下导数 $D_- m(r)$ 满足

$$D_- m(r)\geqslant \beta u'(r)=\beta\gamma\psi_1(r)u(r)\geqslant -\beta\gamma\phi u(r).$$

另一方面，对任给 $t\geqslant 0$ 有

$$m(s)\Big|_t^{t+\delta}=\mathrm{E}\int_t^{t+\delta}LV(s,x(s))\,\mathrm{d}s$$

$$\leqslant\int_t^{t+\delta}\Big[-am(s)+\sum_j a_j m(s-\tau_j)+b\int_{-\tau}^0 m(s+\theta)\,\mathrm{d}\mu(\theta)\Big]\mathrm{d}s,$$

这推出

$$D^+ m(t)\leqslant -am(t)+\sum_j a_j m(t-\tau_j)+b\int_{-\tau}^0 m(t+\theta)\,\mathrm{d}\mu(\theta).$$

而由此又可用一不等式结果（见文献（Baker 等，2005））得

$$D_- m(r)\leqslant -am(r)+\sum_j a_j m(r-\tau_j)+b\int_{-\tau}^0 m(r+\theta)\,\mathrm{d}\mu(\theta)$$

$$<\beta u(r)\Big(-a+\sum_j a_j\rho_j^{\gamma}+b\rho^{\gamma}\Big)=-\beta\gamma\phi u(r),$$

这与前面已得的 $D_- m(r)\geqslant -\beta\gamma\phi u(r)$ 相矛盾. 于是定理得证. □

类似的方法可用到方程（依方程(4.4.4)的记号）

$$\mathrm{d}x(t)=F(t,x(t),y(t))\,\mathrm{d}t+G(t,x(t),y(t))\,\mathrm{d}w(t).\qquad(4.4.4)'$$

定理 4.4.29　设存在 $V(t,x)\in C^{1,2}([-\tau,\infty)\times\mathbf{R}^d)$，常数 $c_1,c_2>0,a>b>0$，使得条件(4.4.59)及以下条件满足：

$$\mathscr{L}V(t,x,y)\leqslant -aV(t,x)+bV(t-\delta(t),y),\quad t\geqslant 0,x,y\in\mathbf{R}^d,$$

γ 是方程 $b\rho^{\gamma}+\gamma\phi=a$ 的唯一正解，其中 ρ,ϕ 依(4.1.4). 若方程(4.4.4)′的解 $x(t,\xi)$ 满足条件(4.4.46)，则必满足不等式(4.4.60).

上面所用的微分不等式方法在 ODE 与 SDE 理论中已有颇长的历史. Baker 等(2005)提供了一些值得注意的近期结果，定理 4.4.28 与定理 4.4.29 是 Baker 工作的推广.

4.4.4　振动性

与前几节所考虑的稳定性、有界性不同，SDF 解的振动性是完全不同的另一类性质，自然需要很不同的处理方法. 在 ODE 理论中，振动性就是一个有很大意义的专门课题. 如所熟知，最简单的一维振荡联系于如下二阶方程

$$\ddot{x}+kx=F(t),$$

其中 $F(t)$ 表示某个外加振源. 如果以某个随机扰动取代 $F(t)$，就产生随机振荡的问题. 一般地，可考虑如下二阶 SDE：

$$\ddot{x}(t)+f(t,x(t),\dot{x}(t))=g(t,x(t),\dot{x}(t))\dot{w}(t),\quad t\geqslant 0,\qquad(4.4.61)$$

其中 $\dot{w} = \mathrm{d}w/\mathrm{d}t$, $w(t)$ 是一个 m 维 Brown 运动，函数

$$f: \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d \text{ 与 } g: \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^{d\times m}$$

满足适当条件. 若令 $z = (x,y)^{\mathrm{T}}$, $y = \dot{x}$, 则将方程(4.4.61)转化为 $2d$ 维 SDE:

$$\mathrm{d}z(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ -f(t,z(t)) \end{bmatrix}\mathrm{d}t + \begin{bmatrix} 0 \\ g(t,z(t)) \end{bmatrix}\mathrm{d}w(t). \tag{4.4.62}$$

正是方程(4.4.62)在结构上的特殊性，得以对其展开一些特殊结论.

本小节的讨论需要 **Girsanov 定理**这一工具，该定理在整个 SDE 理论中都是基本而重要的. 现在我们就来介绍它. 迄今对 SDE 所作的讨论，都假定 $w(t)$ 是一个给定的 m 维 Brown 运动，所建立的结论与分析方法都不涉及 $w(t)$ 的选择. 这就自然提出一个问题：能否以另一个 m 维 Brown 运动 $\tilde{w}(t)$ 取代 $w(t)$，使所讨论的 SDE 得以化简？我们试图设计一个如下变换：

$$\mathrm{d}\tilde{P} = \mathrm{e}^{\zeta}\mathrm{d}P, \quad \mathrm{d}\tilde{w} = \mathrm{d}w - \varphi\mathrm{d}t, \tag{4.4.63}$$

其中 ζ 与 $\varphi(t)$ 应如此选定，使得 $\tilde{P}$ 仍为 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上的概率测度，而 $\tilde{w}(t)$ 则是概率空间 $(\Omega,\mathscr{F},\tilde{P})$ 上的 $(\mathscr{F}_t)$ 标准 Brown 运动. 若能使

$$g(t,z(t))\varphi(t) = f(t,z(t)),$$

以 $\mathrm{d}w = \mathrm{d}\tilde{w} + \varphi\mathrm{d}t$ 代入方程(4.4.62)，则得到如下简化方程

$$\mathrm{d}z(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ 0 \end{bmatrix}\mathrm{d}t + \begin{bmatrix} 0 \\ g(t,z(t)) \end{bmatrix}\mathrm{d}\tilde{w}(t). \tag{4.4.62$'$}$$

结合方程(4.4.62)′的扩散算子 $\mathscr{L}$（参看(2.1.11)′）具有较简单的形式：

$$\mathscr{L} = \sum_i y_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{i,j}(gg^{\mathrm{T}})_{ij}\frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j}. \tag{4.4.64}$$

约定以 $\tilde{\mathrm{E}}$ 记关于概率 $\tilde{P}$ 的期望，即 $\tilde{\mathrm{E}}X = \mathrm{E}(X\mathrm{e}^{\zeta})$. 由(1.3.38)，有

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\Big[\exp\int_0^t \varphi^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}w(s)\Big] &= \exp\Big(\frac{1}{2}\int_0^t |\varphi(s)|^2\mathrm{d}s\Big) \\
&= \tilde{\mathrm{E}}\Big[\exp\int_0^t \varphi^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}\tilde{w}(s)\Big] \\
&= \mathrm{E}\Big[\exp\Big(\zeta + \int_0^t \varphi^{\mathrm{T}}(s)(\mathrm{d}w(s) - \varphi(s)\mathrm{d}s)\Big)\Big].
\end{aligned}$$

因此若取

$$\zeta = -\frac{1}{2}\int_0^T |\varphi(s)|^2\mathrm{d}s + \int_0^T \varphi^{\mathrm{T}}(s)\mathrm{d}w(s), \tag{4.4.65}$$

则能使

$$\mathrm{E}\Big[\exp\Big(\zeta + \int_0^T \varphi^{\mathrm{T}}(s)(\mathrm{d}w(s) - \varphi(s)\mathrm{d}s)\Big)\Big] = \exp\Big(\frac{1}{2}\int_0^T |\varphi(s)|^2\mathrm{d}s\Big).$$

定理 4.4.30(Cameron-Martin-Girsanov) 设 $J = [0,T]$, $T > 0$, $\varphi \in \mathscr{L}^2(J,\mathbf{R}^m)$；存在正常数 μ，使 $\mathrm{E}[\exp(\mu|\varphi(t)|^2)]$ 在 J 上有界；$\tilde{P}$, $\tilde{w}$ 与 ζ 分别依式(4.4.63)

与(4.4.65),则 $\tilde{P}$ 是 $(\Omega,\mathscr{F})$ 上的概率测度,而 $\tilde{w}(t)(t\in J)$ 是 $(\Omega,\mathscr{F},\tilde{P})$ 上的 m 维标准 Brown 运动.

下面设 $\tilde{P},\tilde{w},\zeta,\varphi$ 依定理4.4.30.考察 (P,w) 与 $(\tilde{P},\tilde{w})$ 之间的对应关系.

(i) 逆变换.因(4.4.63)与(4.4.65)可分别改写成

$$\mathrm{d}P=\mathrm{e}^{-\zeta}\mathrm{d}\tilde{P},\quad \mathrm{d}w=\mathrm{d}\tilde{w}-(-\varphi)\mathrm{d}t, \tag{4.4.63$'$}$$

$$-\zeta=-\frac{1}{2}\int_0^T|-\varphi(t)|^2\mathrm{d}t+\int_0^T[-\varphi^{\mathrm{T}}(t)]\mathrm{d}\tilde{w}(t), \tag{4.4.65$'$}$$

可见 (P,w) 与 $(\tilde{P},\tilde{w})$ 正好依定理4.4.30互相变换.

(ii) P 与 $\tilde{P}$ 的关系.由(4.4.63)与(4.4.63)′看出,P 与 $\tilde{P}$ 互为绝对连续,因此

$$P(A)=0\Leftrightarrow\tilde{P}(A)=0;\quad P(A)=1\Leftrightarrow\tilde{P}(A)=1,\quad A\in\mathscr{F}.$$

这又推出:Pa.s.与 $\tilde{P}$a.s.一致;$P(A_n)\to0\Leftrightarrow\tilde{P}(A_n)\to0(\{A_n\}\subset\mathscr{F})$;依概率 P 收敛与依概率 $\tilde{P}$ 收敛一致;空间 $\mathscr{L}^p(J,\mathbf{R}^d)$ 对 P 定义与对 $\tilde{P}$ 定义一致.

(iii) w 与 $\tilde{w}$ 的关系.$\forall g(t)\in\mathscr{L}^2(J,\mathbf{R}^{d\times m})$,有

$$\int_0^t g(s)\mathrm{d}\tilde{w}(s)=\int_0^t g(s)\mathrm{d}w(s)-\int_0^t g(s)\varphi(s)\mathrm{d}s,\quad t\in J. \tag{4.4.66}$$

形式上,这意味着式(4.4.66)左端积分中的 $\mathrm{d}\tilde{w}(s)$ 可代以 $\mathrm{d}w(s)-\varphi(s)\mathrm{d}s$.式(4.4.66)的证明并不难:首先指明(4.4.66)对阶梯过程 $g(t)$ 成立,然后易过渡到一般情况.

利用公式(4.4.66)直接得到我们所需要的基本结果:

定理4.4.31(Girsanov) 设 $\tilde{P},\tilde{w}$ 与 $\varphi(\cdot)$ 依定理4.4.30,

$$x(t)=x(0)+\int_0^t f(s)\mathrm{d}s+\int_0^t g(s)\mathrm{d}w(s),\quad t\in J,$$

其中 $f\in\mathscr{L}^2(J,\mathbf{R}^d)$,$g\in\mathscr{L}^2(J,\mathbf{R}^{d\times m})$,则

$$x(t)=x(0)+\int_0^t[f(s)+g(s)\varphi(s)]\mathrm{d}s+\int_0^t g(s)\mathrm{d}\tilde{w}(s),\quad t\in J.$$

Girsanov 定理的意义在于,它表明 $x(t)$ 满足 SDE:

$$\mathrm{d}x(t)=f(t,x(t))\mathrm{d}t+g(t,x(t))\mathrm{d}w(t)$$

当且仅当它满足经变换后的 SDE:

$$\mathrm{d}x(t)=[f(t,x(t))+g(t,x(t))\varphi(t)]\mathrm{d}t+g(t,x(t))\mathrm{d}\tilde{w}(t),$$

而后者可能较简单.例如,若 $f(t,x(t))+g(t,x(t))\varphi(t)=0$,则从后一个方程得

$$x(t)=x(0)+\int_0^t g(s,x(s))\mathrm{d}\tilde{w}(s),$$

因而 $x(t)$ 可能是一个鞅或局部鞅.

为行文方便,凡涉及从 (P,w) 到 $(\tilde{P},\tilde{w})$(依定理4.4.30)或从方程(4.4.62)到方程(4.4.62)′(依定理4.4.31)的变换,均称为 **Girsanov 变换.**

现在考虑方程(4.4.61)的以下特殊情况：

$$\ddot{x}(t)+f(t,x(t),\dot{x}(t))=b\dot{w}(t),\quad t\geqslant 0,\qquad(4.4.67)$$

其中$f(t,x,y):\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$有界且对$(x,y)$局部Lipschitz连续，$b$是一正常数，$w(t)$是一维标准Brown运动. 令$y=\dot{x},z=(x,y)^{\mathrm{T}}$，将方程(4.4.67)转化为

$$\mathrm{d}z(t)=\begin{bmatrix}y(t)\\-f(t,z(t))\end{bmatrix}\mathrm{d}t+\begin{bmatrix}0\\b\end{bmatrix}\mathrm{d}w(t),\quad t\geqslant 0.\qquad(4.4.68)$$

由定理2.1.3，方程(4.4.68)的初值问题在$\mathbf{R}_+$上有唯一解$z(t)$. 现在解决如下问题：设$z(0)=z_0\neq 0$，能否断定$z(t)\neq 0$? 注意此处并不能援引引理2.3.8，因方程(4.4.68)显然并无零解. 下面利用Girsanov定理建立一个肯定的结果.

定理4.4.32 设$z(t)=(x(t),y(t))^{\mathrm{T}}$是方程(4.4.68)的解，$0\neq z_0=z(0)\in\mathbf{R}^2$，则$P(z(t)\neq 0(\forall t\geqslant 0))=1$，即$z(t)$的几乎所有轨道不经过原点.

证 (i) 转化问题. 只要对任给$T>0$，证$P(z(t)\neq 0(\forall t\in[0,T]))=1$. 取定$T>0$，令$J=[0,T]$，$\varphi(t)=b^{-1}f(t,z(t))$，则$\varphi\in\mathscr{L}^2(J)$，且$\varphi(t)$在$J$上有界. 于是可由定理4.4.30确定概率$\tilde{P}$与Brown运动$\tilde{w}(t)$；由定理4.4.31，$z(t)$满足方程

$$\mathrm{d}z(t)=\begin{bmatrix}y(t)\\0\end{bmatrix}\mathrm{d}t+\begin{bmatrix}0\\b\end{bmatrix}\mathrm{d}\tilde{w}(t),\quad t\geqslant 0.\qquad(4.4.69)$$

只要证$\tilde{P}(z(t)=0(\exists t\in J))=0$. 令$\tau=\inf\{t\in J:z(t)=0\}$，则$\tau\leqslant T\Leftrightarrow\exists t\in J:z(t)=0$，故只要证$\tilde{P}(\tau\leqslant T)=0$. 为此令

$$\tau_n=\inf\{t\in J:|z(t)|\leqslant 1/n\},\quad n\geqslant 1,$$

因$\{\tau\leqslant T\}\subset\cap_1^\infty\{\tau_n\leqslant T\}$，故只要证$\tilde{P}(\tau_n\leqslant T)\to 0(n\to\infty)$.

(ii) 证$\tilde{P}(\tau_n\leqslant T)\to 0$. 设已作$C^2$ $V(z):\mathbf{R}^2\backslash\{0\}\to\mathbf{R}$，满足条件：

$$V(z)>0,\quad\lim_{|z|\to 0}V(z)=\infty;\quad\mathscr{L}V(z)=yV_x+(b^2/2)V_{yy}=0,\qquad(4.4.70)$$

其中$0\neq z=(x,y)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^2$，$\mathscr{L}$依式(4.4.64). 令$v_n=\min\limits_{|z|=1/n}V(z)$，则必$v_n\to\infty$. 于是

$$\begin{aligned}\tilde{P}(\tau_n\leqslant T)&\leqslant v_n^{-1}\tilde{\mathrm{E}}V(z(\tau_n\wedge T))\\&=v_n^{-1}\left[V(z_0)+\int_0^{\tau_n\wedge T}\tilde{\mathrm{E}}LV(z(s))\mathrm{d}s\right]\\&\leqslant v_n^{-1}V(z_0)\to 0,\quad n\to\infty.\end{aligned}$$

(iii) 构作满足条件(4.4.70)的函数$V(z)$：令$V(z)=\int_0^\infty\psi(t,z)\mathrm{d}t$，其中

$$\psi(t,z)=\frac{1}{t^2}\exp\left(-\frac{6x^2+6txy+2t^2y^2}{b^2t^3}\right).$$

则

$$V(z) \geqslant \int_0^\infty \frac{1}{t^2}\exp\left[-\frac{6(1+t^2)|z|^2}{b^2t^3}\right]dt$$

$$\geqslant \int_0^1 \frac{1}{t^2}\exp\left(-\frac{12|z|^2}{b^2t^3}\right)dt$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{b^2}{12|z|^2}\right)^{1/3}\int_{12b^{-2}|z|^2}^\infty s^{-2/3}e^{-s}ds \to \infty, \quad |z| \to 0.$$

直接计算可验证

$$\mathscr{L}V(z) = \int_0^\infty \mathscr{L}\psi(t,z)dt = \int_0^\infty \psi_t(t,z)dt = 0.$$

故条件(4.4.70)满足,于是定理得证. □

定理4.4.32只是断定:方程(4.4.68)的起于非零点的解 $z(t)$ 几乎必然不到达原点. 至于 $z(t)$ 是否穿过 y 轴(即 $x(t)$ 经过零点)的问题,则仍然悬而未决. 下面就一种特殊情况考虑这一问题. 考虑方程(4.4.67)的以下特例:

$$\ddot{x}(t) + a^2x(t) = b\dot{w}(t), \quad t \geqslant 0, \tag{4.4.71}$$

其中 a,b 为正常数. 此时方程(4.4.68)可写成

$$dz(t) = Az(t)dt + gdw(t), \quad t \geqslant 0, \tag{4.4.72}$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}.$$

利用(2.2.14),从方程(4.4.72)解出

$$z(t) = e^{At}z_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}gdw(s), \quad z_0 = z(0) \in \mathbf{R}^2.$$

注意到 $A^2 = -a^2I$, 有

$$e^{At} = \sum_{n=0}^\infty \left[\frac{(-1)^n(at)^{2n}}{(2n)!}I - \frac{(-1)^n(at)^{2n+1}}{(2n+1)!a}A\right] = I\cos at + A\frac{\sin at}{a}.$$

于是

$$z(t) = z_0\cos at + \frac{\sin at}{a}Az_0 + \int_0^t \left[g\cos a(t-s) + \frac{\sin a(t-s)}{a}Ag\right]dw(s).$$

下面特取 $a = 1 = x(0), y(0) = 0$, 则

$$z(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{bmatrix} + b\int_0^t \begin{bmatrix} \sin(t-s) \\ \cos(t-s) \end{bmatrix} dw(s),$$

$$x(t) = \cos t + b\int_0^t \sin(t-s)dw(s). \tag{4.4.73}$$

定理 4.4.33 对几乎所有的 $\omega \in \Omega$, 由式(4.4.73)表达的 $x(t)$ 有无限个零点,它们都是简单零点.

证　由定理4.4.32,可设已排除例外的 ω, 使得 $z(t) \neq 0(\ \forall t \geqslant 0)$, 从而当 $x(t) = 0$ 时 $\dot{x}(t) \neq 0$, 故 $x(t)$ 只能有简单零点.

令 $t_n = 2n\pi + \pi/2(n = 0,1,2,\cdots)$, 则当 $n \geqslant 1$ 时

$$x(t_n) = b\int_0^{\pi/2} \cos t\mathrm{d}w(t) + \sum_{k=1}^{n} b\int_{t_{k-1}}^{t_k} \cos t\mathrm{d}w(t) \triangleq Y_0 + \sum_{k=1}^{n} Y_k.$$

注意 $\{Y_k : k \geqslant 0\}$ 是独立随机变量序列, $\mathrm{E}Y_k = 0(k \geqslant 0)$,

$$\mathrm{E}Y_k^2 = b^2\int_{t_{k-1}}^{t_k} \cos^2 t\mathrm{d}t = b^2\pi, \quad k \geqslant 1.$$

故 $Y_k \sim N(0,b^2\pi)(k \geqslant 1)$; 类似地 $Y_0 \sim N(0,b^2\pi/4)$. 由独立随机变量和的定理, $x(t_n)$ 必无限次变号,因而 $x(t)$ 有无限多个零点. □

以下设 $x(t)$ 是由式(4.4.73)表出的随机函数. 由定理4.4.33, $x(t)$ 有无限可数多个零点,设为 $0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots < \tau_n < \cdots$, τ_n 是一随机变量序列. 注意当 $b = 0$ 时 $x(t) = \cos t$ 在 $[0,\infty)$ 上有零点 $(n - 1/2)\pi(n \geqslant 1)$. τ_n 会类似于 $\cos t$ 的零点吗? 下面我们要作一细致的分析,这一分析依赖于 Brown 运动 $w(t)$ 的特殊性质. 特别,要用到与正态分布有关的**误差函数**

$$\mathrm{Erf}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{d}t, \quad x \geqslant 0$$

及 $w(t)$ 的**首达时间** $S(a) = \inf\{t \geqslant 0 : w(t) = a\}$; $S(a)$ 有分布函数

$$P(S(a) \leqslant x) = P(S(-a) \leqslant x) = 1 - 2\mathrm{Erf}(a/\sqrt{x}), \quad x > 0.$$

定理 4.4.34　设 $x(t)$ 依式(4.4.73),则 $x(t)$ 的零点 τ_n 有以下性质:

$$\mathrm{E}\tau_1 \geqslant 2\operatorname{arccot} b\ \mathrm{Erf}(1/\sqrt{\operatorname{arccot} b}), \tag{4.4.74}$$

$$\begin{cases} P(\tau_1 > T) < 2^{2-T/\pi}c(b), \quad T \geqslant \pi, & (4.4.75\text{a}) \\ \mathrm{E}\tau_1 < \pi(1 + 2c(b)) < 2\pi, & (4.4.75\text{b}) \\ \mathrm{E}\tau_1^2 < \pi^2(1 + 10c(b)) < 6\pi^2, & (4.4.75\text{c}) \end{cases}$$

$$c(b) = \frac{1}{2} - \mathrm{Erf}(b^{-1}\sqrt{2/\pi}),$$

$$\mathrm{E}\tau_n \leqslant 2n\pi, \quad n \geqslant 1. \tag{4.4.76}$$

证　(i) 证(4.4.74). 首先建立一个辅助结果:

$$P\Big(\inf_{0\leqslant t\leqslant T} w(t) > -a\Big) = 2\mathrm{Erf}(a/\sqrt{T}), \quad a,T > 0. \tag{4.4.77}$$

取定 $a,T > 0$, 令 $J = [0,T]$, 则

$$\text{式(4.4.77)左端} = 1 - P\Big(\inf_{t\in J} w(t) \leqslant -a\Big)$$
$$= 1 - P(S(-a) \leqslant T) = 2\mathrm{Erf}(a/\sqrt{T}).$$

现在用式(4.4.77)证(4.4.74). 令 $\theta = \operatorname{arccot} b$, 则 $0 < \theta < \pi/2$. 令

$$A = \{w(t) > -1(\forall t \in [0,\theta])\}.$$

$\forall (t,\omega) \in (0,\theta) \times A$, 有

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos t + b\int_0^t w(s)\cos(t-s)\,\mathrm{d}s \quad (\text{分部积分}) \\ &\geqslant \cos t - b\int_0^t \cos(t-s)\,\mathrm{d}s = \cos t - b\sin t \\ &= \sin t(\cot t - \cot\theta) > 0, \end{aligned}$$

因而 $\tau_1 \mid A \geqslant \theta$. 于是

$$\mathrm{E}\tau_1 \geqslant \mathrm{E}(\tau_1 I_A) \geqslant \theta P(A) = 2\theta\,\mathrm{Erf}(1/\sqrt{\theta}), \quad (\text{用}(4.4.77))$$

此即不等式(4.4.74).

(ii) 证(4.4.75). 首先导出 $x(n\pi)$ 的表达式:

$$\begin{aligned} x(n\pi) &= \cos n\pi + b\int_0^{n\pi} \sin(n\pi - t)\,\mathrm{d}w(t) \\ &= \cos n\pi\Big(1 - b\sum_{k=1}^{n} Y_k\Big), \end{aligned} \tag{4.4.78}$$

其中 $Y_k = \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \sin t\,\mathrm{d}w(t)\,(k \geqslant 1)$. $Y_k(k \geqslant 1)$ 是互相独立的随机变量, $\mathrm{E}Y_k = 0$,

$$\mathrm{E}Y_k^2 = \int_{(k-1)\pi}^{k\pi} \sin^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}, \qquad (\text{用}(1.3.11))$$

因而 $Y_k \sim N(0,\pi/2)$. 利用 Y_k 的性质及式(4.4.78)有

$$\begin{aligned} P(\tau_1 > \pi) &\leqslant P(x(\pi) > 0) = P(Y_k > 1/b) \\ &= \frac{1}{2}[1 - 2P(0 \leqslant Y_1 \leqslant 1/b)] \qquad (\text{用 } Y_1 \sim N(0,\pi/2)) \\ &= \frac{1}{2} - \mathrm{Erf}(b^{-1}\sqrt{2/\pi}) = c(b), \\ P(\tau_1 > 2\pi) &\leqslant P(x(\pi) > 0, x(2\pi) > 0) \\ &\leqslant P(Y_1 > 1/b, Y_1 + Y_2 < 1/b) \\ &\leqslant P(Y_1 > 1/b)P(Y_2 < 0) = 2^{-1}c(b). \end{aligned}$$

一般地,可得

$$P(\tau_1 > n\pi) \leqslant 2^{1-n}c(b), \quad n \geqslant 1. \tag{4.4.79}$$

任给 $T \geqslant \pi$, 取 $n \in \mathbf{N}$ 使 $n\pi \leqslant T < (n+1)\pi$, 则

$$P(\tau_1 > T) \leqslant P(\tau_1 \geqslant n\pi) \leqslant 2^{1-n}c(b) < 2^{2-T/\pi}c(b),$$

此即不等式(4.4.75a). 其次,

$$\mathrm{E}\tau_1 \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{E}(\tau_1 I_{\{n\pi < \tau_1 \leqslant (n+1)\pi\}})$$

$$\leqslant \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\pi P(n\pi < \tau_1 \leqslant (n+1)\pi)$$

$$= \pi + \pi\sum_{n=1}^{\infty}P(\tau_1 > n\pi)$$

$$\leqslant \pi\left[1 + c(b)\sum_{n=1}^{\infty}2^{1-n}\right] < 2\pi, \qquad (\text{用}(4.4.79))$$

得式(4.4.75b). 类似地,

$$E\tau_1^2 \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2\pi^2[P(\tau_1 > n\pi) - P(\tau_1 > (n+1)\pi)]$$

$$= \pi^2 + \pi^2\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)P(\tau_1 > n\pi)$$

$$\leqslant \pi^2 + \pi^2 c(b)\sum_{n=1}^{\infty}2^{1-n}(2n+1) < 6\pi^2,$$

得式(4.4.75c).

(iii) 证(4.4.76). 由式(4.4.75b),(4.4.76)已对 $n = 1$ 成立. 下面只证 $E\tau_2 \leqslant 4\pi$ (重复下面的证法即得(4.4.76)). 令 $B(t) = w(t+\tau_1) - w(\tau_1)$, $z(t) = x(t+\tau_1)$, 则 $B(t)$ $(t \geqslant 0)$ 是一个 Brown 运动, $z(t)$ 满足

$$\ddot{z}(t) + z(t) = b\dot{B}(t), \quad z(0) = 0, \quad \dot{z}(0) \neq 0.$$

于是由方程(4.4.71)的解公式有

$$z(t) = \dot{z}(0)\sin t + b\int_0^t \sin(t-s)\mathrm{d}w(s), \quad t \geqslant 0,$$

$$z(n\pi) = b(-1)^{n-1}\sum_{k=1}^{n}Y_k. \qquad (\text{参照}(4.4.78))$$

以 θ_1 记 $z(t)$ 的第一个正零点, 则 $E\tau_2 = E(\tau_1 + \theta_1) \leqslant 2\pi + E\theta_1$. 可见只要证 $E\theta_1 \leqslant 2\pi$, 为此仍用第(ii)段中的方法:

$$P(\theta_1 > \pi) \leqslant P(z(\pi) > 0) = P(Y_1 > 0) = 1/2,$$

$$\begin{aligned} P(\theta_1 > 2\pi) &\leqslant P(z(\pi) > 0, z(2\pi) > 0) \\ &= P(z(\pi) > 0, Y_1 + Y_2 < 0) \\ &\leqslant P(Y_1 > 0)P(Y_2 < 0) = 1/2^2. \end{aligned}$$

一般地, 有 $P(\theta_1 > n\pi) \leqslant 2^{-n}$ $(n \geqslant 1)$. 于是

$$E\theta_1 \leqslant \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\pi P(n\pi < \theta_1 \leqslant (n+1)\pi)$$

$$= \pi\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}P(\theta_1 > n\pi)\right] \leqslant 2\pi,$$

如所要证. □

§4.5 Markov 调制的 SDE

本书迄今所考虑的 SDE，Brown 运动 $w(t)$ 是唯一的随机干扰源. 而不难设想，一个实际的系统常不免有多种随机因素介入. 一种相对简单而典型的情况是，某个有限状态 Markov 链 $r(t)\,(t \geqslant 0)$ 进入方程的系数，形成所谓 **Markov 调制**的 SDE：

$$dx(t) = f(t,x_t,r(t))dt + g(t,x_t,r(t))dw(t), \tag{4.5.1}$$

其中 $f: \mathbf{R}_+ \times C \times S \to \mathbf{R}^d$，$g: \mathbf{R}_+ \times C \times S \to \mathbf{R}^{d\times m}$，$S = \{1,2,\cdots,n\}$ 是 $r(t)$ 的状态空间. 若取 $r(t) = i \in S$，且记 $f_i(t,x_t) = f(t,x_t,i)$，g_i 仿此，则方程(4.5.1) 成为通常的 SFDE：

$$dx(t) = f_i(t,x_t)dt + g_i(t,x_t)dw(t), \quad i \in S. \tag{4.5.1$'$}$$

问题在于 $r(t)$ 并非确定地取值 i，因而方程(4.5.1)并非方程组(4.5.1)′的简单拼合. 粗略地说，方程(4.5.1)是方程组(4.5.1)′随 Markov 链移动调制而成. 这预示着方程(4.5.1)既具有通常 SFDE 的某些特点，又必然依赖于 Markov 链 $r(t)$ 的属性.

方程(4.5.1)自然包含以下特殊情况：

$$dx(t) = f(t,x(t),r(t))dt + g(t,x(t),r(t))dw(t), \tag{4.5.2}$$

$$dx(t) = F(t,x(t),y(t),r(t))dt + G(t,x(t),y(t),r(t))dw(t), \tag{4.5.3}$$

其中 $y(t) = x(t-\delta(t))$ 如同(4.1.4). Basak 等(1996)首先考虑了方程(4.1.2)的特例：

$$dx(t) = A(r(t))x(t)dt + g(x(t),r(t))dw(t).$$

随后 Mao (1999)研究了方程(4.5.2)；Mao (2000)进而研究了更一般的方程(4.5.3). 一般形式的方程(4.5.1)，则由 Mao 等在最近作了考虑.

4.5.1 预备

本节(及本书后面)总假定 $r(t)$ 是以 $S = \{1,2,\cdots,n\}$ 为状态空间且右连续的 Markov 链，其密度矩阵(或生成元)为 $\Gamma = [\gamma_{ij}] \in \mathbf{R}^{n\times n}$，这意味着

$$P(r(t+\delta) = j \mid r(t) = i) = \begin{cases} \gamma_{ij}\delta + o(\delta), & i \neq j, \\ 1 + \gamma_{ii}\delta + o(\delta), & i = j. \end{cases} \quad (\delta > 0)$$

必定 $\gamma_{ij} \geqslant 0\,(i \neq j)$，$\sum_j \gamma_{ij} = 0$. 因此，$\Gamma$ 是一个**本性非负矩阵**(即非对角线元素皆非负的矩阵)，这一事实有基本的重要性. 此外，假定 $r(t)$ 与 $w(t)$ 互相独立.

本节中总假定 i 遍取 S 而不处处注明.

所有后面的讨论均基于如下存在定理(参考文献(Mao,1999)).

定理 4.5.1 设函数 f 与 g 满足以下条件：

（i）局部 Lipschitz 条件：$\forall h \in \mathbf{N}$，存在正常数 $\bar{K}_h$，使得对 $0 \leqslant t \leqslant h, \varphi, \psi \in C$，$\|\varphi\| \vee \|\psi\| \leqslant h$，有

$$|f(t,\varphi,i) - f(t,\psi,i)| \vee |g(t,\varphi,i) - g(t,\psi,i)| \leqslant \bar{K}_h \|\varphi - \psi\|;$$

（ii）线性增长条件：$\forall h \in \mathbf{N}$，存在正常数 K_h，使对 $0 \leqslant t \leqslant h, \varphi \in C$，有

$$|f(t,\varphi,i)| \vee |g(t,\varphi,i)| \leqslant K_h(1 + \|\varphi\|).$$

则对任给 $\xi \in L^2_{\mathscr{F}_0}(\Omega, C)$，方程(4.5.1)存在唯一连续解 $x(t) = x(t,\xi)(-\tau \leqslant t < \infty)$，使得 $x_0 = \xi$，且

$$\mathrm{E}\Big[\sup_{-\tau \leqslant s \leqslant t} |x(s,\xi)|^2\Big] < \infty, \quad \forall t \geqslant 0.$$

下面论及方程(4.5.1)及其特例时，总假定其解的存在唯一性已由一定条件保证，且以 $x(t,\xi)$ 记其解.

如同先前所研究的方程一样，对于方程(4.5.1)所要解决的问题，仍然是其解的稳定性、有界性、持久性等. 如我们已多次看到的，这些问题实质上都归结为某种形式的解估计. 这就毫不足怪，本节的内容依如下标题展开：矩估计、轨道估计、延迟微分方程等. 初看起来，这如同§4.1 或§4.2 的翻版. 这一印象对于引导思路并无坏处，但毕竟会看到一些实质上新的东西.

如现有经验已充分显示的，对于解的估计，Liapunov 函数法起基本作用. 对于方程(4.5.1)，考虑与状态 i 有关的 Liapunov 函数似乎是理所当然的. 设 $V(t,x,i) \in C^{1,2}(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d \times S)$（记号表示 V 对 t 与 x 分别为 C^1 与 C^2 函数），$x(t)$ 是方程(4.5.1)的一个解. 若 $r(t) \equiv i \in S$，则依 Itô 公式((1.3.19))有

$$\begin{aligned} LV(t,x(t),i) &= V_t(t,x(t),i) + V_x(t,x(t),i)f(t,x_t,i) \\ &\quad + (1/2)\mathrm{tr}[g^{\mathrm{T}}(t,x_t,i)V_{xx}(t,x(t),i)g(t,x_t,i)]. \end{aligned}$$

但若 $r(t)$ 实质性地依赖于 t，则以上公式未必表示 $LV(t,x(t),r(t))$ 在 $r(t) = i$ 时的值. 这意味着，在 Markov 链 $r(t)$ 介入的情况下形如(1.3.19)的 Itô 公式已不适用，必须代之以如下**广义 Itô 公式**(Skorohod, 1989)：

$$\begin{aligned} LV(t,x(t),r(t)) &= V_t(t,x(t),r(t)) + V_x(t,x(t),r(t))f(t,x_t,r(t)) \\ &\quad + (1/2)\mathrm{tr}[g^{\mathrm{T}}(t,x_t,r(t))V_{xx}(t,x(t),r(t))g(t,x_t,r(t))] \\ &\quad + \sum_s \gamma_{rs}V(t,x(t),s), \end{aligned} \tag{4.5.4}$$

其中作为下标出现的 r 记 $r(t)$（下文保持此约定）. 与通常 Itô 公式的关键区别是式(4.5.4)右端增加了最后一项. 因 $\sum_s \gamma_{is} = 0$，故当 V 不依赖于 $i \in S$ 时式(4.5.4)中增加的一项消失；若 f 与 g 也不依赖于状态 $i \in S$，则式(4.5.4)完全退化为通常的 Itô 公式.

仿照(3.2.4)，我们希望有公式

$$LV(t,x(t),r(t)) = \mathscr{L}V(t,x_t,r(t)), \quad t \geqslant 0. \tag{4.5.5}$$

而为使式(4.5.5)成立,显然应如下定义 $\mathscr{L}V(t,\varphi,i)$ (对照(3.2.3)):

$$\begin{aligned}\mathscr{L}V(t,\varphi,i) = & V_t(t,\varphi(0),i) + V_x(t,\varphi(0),i)f(t,\varphi,i)\\ & + (1/2)\mathrm{tr}[g^{\mathrm{T}}(t,\varphi,i)V_{xx}(t,\varphi(0),i)g(t,\varphi,i)]\\ & + \sum_s \gamma_{is}V(t,\varphi(0),s), \quad t \geqslant 0,\varphi \in C.\end{aligned} \tag{4.5.6}$$

对于 SDDE(4.5.3),式(4.5.5)与(4.5.6)分别代之以(参照(3.3.45),(3.3.47))

$$LV(t,x(t),r(t)) = \mathscr{L}V(t,x(t),y(t),r(t)), \tag{4.5.5$'$}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{L}V(t,x,y,i) = & V_t(t,x,i) + V_x(t,x,i)F(t,x,y,i)\\ & + (1/2)\mathrm{tr}[G^{\mathrm{T}}(t,x,y,i)V_{xx}(t,x,i)G(t,x,y,i)]\\ & + \sum_s \gamma_{is}V(t,x,s), \quad t \geqslant 0,x,y \in \mathbf{R}^d.\end{aligned} \tag{4.5.6$'$}$$

必须强调,与 $LV(t,x(t),r(t))$ 不同,在式(4.5.6)(或(4.5.6)$'$)中,(t,φ,i)(或 (t,x,y,i))是独立变元,它们并不直接涉及方程(4.5.1)(或(4.5.3))的某个解 $x(t)$.

如通常一样,$LV(t,x(t),r(t))$ 的作用主要体现于公式(参照(1.3.23))

$$\mathrm{E}V(t,x(t),r(t))\Big|_a^b = \mathrm{E}\int_a^b LV(t,x(t),r(t))\mathrm{d}t,$$

其中 a,b 是常数或停时,$0 \leqslant a \leqslant b < \infty$.

选择 Liapunov 函数时可借鉴现有经验,但因涉及 $i \in S$,略显多样化.简单而常用的选择是令 $V = x^{\mathrm{T}}P_ix$,P_i 为正定矩阵.特别,若取 $P_i = p_iI$,则

$$\mathscr{L}V(t,\varphi,i) = p_i[2\varphi^{\mathrm{T}}(0)f(t,\varphi,i) + |g(t,\varphi,i)|^2] + \sum_s \gamma_{is}p_s|\varphi(0)|^2. \tag{4.5.7}$$

任给 $V(t,x,i) \in C^{1,2}(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d \times S)$ 与方程(4.5.1)的某个给定的解 $x(t)$,仿照(4.1.23)可构成 Liapunov 函数

$$W(t,x,i) = V(t,x,i) + \sum_j \int_{t-\tau_j}^t [x^{\mathrm{T}}(\theta)Q_{ij}x(\theta)]^{p/2}\mathrm{d}\theta, \tag{4.5.8}$$

其中 $Q_{ij}(i \in S,1 \leqslant j \leqslant J)$ 是适当选定的半正定矩阵.对于如上的 $W(t,x,i)$ 有

$$\begin{aligned}LW(t,x(t),r(t)) = & LV(t,x(t),r(t))\\ & + \sum_j \{[x^{\mathrm{T}}(t)Q_{rj}x(t)]^{p/2} - [x^{\mathrm{T}}(t-\tau_j)Q_{rj}x(t-\tau_j)]^{p/2}\}\\ & + \sum_{i,j}\gamma_{ri}\int_{t-\tau_j}^t [x^{\mathrm{T}}(\theta)Q_{ij}x(\theta)]^{p/2}\mathrm{d}\theta.\end{aligned} \tag{4.5.9}$$

若以 I 记式(4.5.9)右端的最后一项,令 $q_i = \lambda_{\min}(Q_i)$,则

$$I \leqslant \sum_j \int_{t-\tau_j}^t (\gamma_{rr}q_{rj}^{p/2} + \sum_{i\neq r}\gamma_{ri}\|Q_{ij}\|^{p/2})|x(\theta)|^p\mathrm{d}\theta$$

$$\leqslant \sum_j M_j \int_{t-\tau_j}^{t} |x(\theta)|^p \mathrm{d}\theta, \tag{4.5.10}$$

其中

$$M_j = \max_i \Big(\gamma_{ii} q_{ij}^{p/2} + \sum_{s \neq i} \gamma_{is} \| Q_{sj} \|^{p/2} \Big). \tag{4.5.11}$$

类似于(4.5.8)与(4.1.50),对于方程(4.5.3)常用 Liapunov 函数

$$V(t,x,i) = |x|^p + \int_{t-\delta(t)}^{t} [x^{\mathrm{T}}(\theta) Q_i x(\theta)]^{p/2} \mathrm{d}\theta, \tag{4.5.12}$$

其中 Q_i 是半正定矩阵. 类似于(4.5.9),(4.5.10),对依式(4.5.12)的 $V(t,x,i)$ 可建立

$$LV(t,x(t),r(t)) \leqslant L|x(t)|^p + [x^{\mathrm{T}}(t) Q_r x(t)]^{p/2} - \eta [y^{\mathrm{T}}(t) Q_r y(t)]^{p/2}$$
$$+ M \int_{t-\delta(t)}^{t} |x(\theta)|^p \mathrm{d}\theta, \tag{4.5.13}$$

其中 $x(t)$ 是方程(4.5.3)的解,η 依(4.1.46),$y(t) = x(t-\delta(t))$,

$$M = \max_i \Big(\gamma_{ii} q_i^{p/2} + \sum_{s \neq i} \gamma_{is} \| Q_s \|^{p/2} \Big), \quad q_i = \lambda_{\min}(Q_i). \tag{4.5.11$'$}$$

不难验证 $M, M_j \geqslant 0$. 例如对于 M, 不妨设 $\|Q_1\| \geqslant \|Q_2\| \geqslant \cdots \geqslant \|Q_n\|$,则

$$M \geqslant \gamma_{nn} q_n^{p/2} + \sum_{i<n} \gamma_{ni} \| Q_i \|^{p/2} \geqslant q_n^{p/2} \sum_i \gamma_{ni} = 0.$$

矩阵 Γ 为本性非负矩阵这一事实预示着,对于方程(4.5.1)的研究,非负矩阵理论将起重要作用. 这就需要准备某些相关知识. 首先,对任给 $A,B \in \mathbf{R}^{m\times n}$,$A = [a_{ij}]$,约定

$$\begin{cases} A \geqslant 0 \Leftrightarrow a_{ij} \geqslant 0 (1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n), A > 0 \Leftrightarrow 0 \neq A \geqslant 0, \\ A \gg 0 \Leftrightarrow a_{ij} > 0 (1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n), \\ A \geqslant B \Leftrightarrow A - B \geqslant 0 \Leftrightarrow B \leqslant A; A > B \text{ 与 } A \gg B \text{ 仿此}. \end{cases} \tag{4.5.14}$$

这就在同阶矩阵(包括向量)之间定义了一种序关系. 但应注意,这与(4.1.68)所描述的序完全不同,不应混淆.

定义 4.5.2 设 $A = [a_{ij}] \in \mathbf{R}^{n\times n}$. 若 $\forall \lambda \in \sigma(A)$,有 $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$,则称 A 为**稳定矩阵**. 若 $a_{ij} \leqslant 0 < a_{ii} (j \neq i = 1,2,\cdots,n)$,$-A$ 是稳定矩阵,则称 A 为 **M 矩阵**.

关于 M 矩阵的以下结果是常用的.

定理 4.5.3 设 $A = [a_{ij}] \in \mathbf{R}^{n\times n}$,$a_{ij} \leqslant 0 < a_{ii} (j \neq i = 1,2,\cdots,n)$,则以下条件互相等价:

(i) A 是 M 矩阵;

(ii) $A^{-1} \geqslant 0$;

(iii) 存在 $x \in \mathbf{R}^n$, 使得 $x \gg 0, Ax \gg 0$;

(iv) A 的所有顺序主子式为正;

(v) 令 $D = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn})$,则 $I - D^{-1}A$ 的谱半径 <1;

(vi) $A = \lambda I - B, B \geqslant 0, \lambda > B$ 的谱半径.

为简单起见,今后将用记号

$$\mathrm{diag}(a) = \mathrm{diag}(a_i) = \mathrm{diag}(a_1, a_2, \cdots, a_n), a = (a_i) \in \mathbf{R}^n.$$

直接由定理 4.5.3(例如用 4.5.3(iii))看出:若 $a_i > 0$ 适当大,则 $\mathrm{diag}(a_i) - \Gamma$ 是 M 矩阵;若 $A = [a_{ij}] \in \mathbf{R}^{n\times n}$ 是 M 矩阵, $e = (1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}$(本节将保持此约定),则 $(p_i) = A^{-1}e \gg 0$,从而 $p_i > 0$, $\sum_j a_{ij}p_j = 1$;若 $A = \mathrm{diag}(a_i) - \Gamma$, $(p_i) = A^{-1}e$,则 $\sum_j \gamma_{ij}p_j = a_ip_i - 1$. 本节中将反复用到这些事实.

本节将频繁地使用如下缩记号:

$$\hat{\alpha} = \min \alpha_i, \quad \check{\alpha} = \max \alpha_i, \quad \|\check{Q}\| = \max \|Q_i\|,$$
$$\hat{\alpha}_j = \min_i \alpha_{ij}, \quad \check{\alpha}_j = \max_i \alpha_{ij}, \quad \|\check{Q}_j\| = \max_i \|Q_{ij}\|. \qquad (4.5.15)$$

如同在 §4.1 ~ §4.3 中一样,本节将使用某个参照函数 $\psi(t)$, $0 < \psi(t) \in C^1[-\tau, \infty)$, $\psi_1(t) = \psi'(t)/\psi(t)$; $\psi(0) = 1$; $\sup_{t\geqslant 0} |\psi_1(t)| < \infty$. 鉴于经常合并考虑 $\psi'(t) \gtrless 0$ 这两种情况,常令 $\pm 1 = \mathrm{sgn}\, \psi'(t)$.

4.5.2 矩估计

在 §4.1 ~ §4.3 中我们看到,对于随机微分方程解的矩估计,两种基本的方法是 Razumikhin 定理与基于定理 1.2.11 的直接估计法,本小节将运用后一方法(关于方程(4.5.1)的一个 Razumikhin 定理参看 Mao 与 Yuan(2006)). 鉴于有以往的经验可用,下面将处理得更紧凑些.

首先推广定理 4.2.11 建立如下基本结果.

定理 4.5.4 设 $p > 0$;存在常数 $c_1, c_2 > 0, a_i \in \mathbf{R}, a_{ij}, b_i, \gamma \geqslant 0, \tau_j \in (0, \tau]$, $[-\tau, 0]$ 上的概率测度 μ_i, ν_i,函数 $V(t,x,i) \in C^{1,2}(\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}^d \times S)$, $q_{i0}(t,x)$, $q_{ij}(t,x)$, $q_i(t,x) \in C([-\tau,\infty) \times \mathbf{R}^d, \mathbf{R}_+)$ 及函数 $\zeta_i(t)$,半正定矩阵 Q_{ij},使得 $\zeta_i(t)\psi^{-\gamma}(t)^{\cdot} \in L^1(\mathbf{R}_+)$,且以下条件满足:

$$c_1 |x|^p \leqslant V(t,x,i) \leqslant c_2 |x|^p, \quad t \geqslant 0, x \in \mathbf{R}^d, \qquad (4.5.16)$$

$$\begin{aligned}\mathscr{L}V(t,\varphi,i) \leqslant & -a_i |\varphi(0)|^p + \sum_j a_{ij} |\varphi(-\tau_j)|^p + b_i \int_{-\tau}^{0} |\varphi(\theta)|^p \mathrm{d}\mu_i \\ & + \zeta_i(t) - q_{i0}(t,\varphi(0)) + \sum_j q_{ij}(t-\tau_j, \varphi(-\tau_j)) \\ & + \int_{-\tau}^{0} q_i(t+\theta, \varphi(\theta))\mathrm{d}\nu_i(\theta) \end{aligned} \qquad (4.4.17\mathrm{a})$$

或

$$\mathscr{L}V(t,\varphi,i) + \sum_j \{[\varphi^{\mathrm{T}}(0)Q_{ij}\varphi(0)]^{p/2} - [\varphi^{\mathrm{T}}(-\tau_j)Q_{ij}\varphi(-\tau_j)]^{p/2}\}$$

$$\leqslant a_i|\varphi(0)|^p-\sum_j a_{ij}|\varphi(-\tau_j)|^p+b_i\int_{-\tau}^0|\varphi(\theta)|^p\mathrm{d}\mu_i$$

$$+\zeta_i(t)-q_{i0}(t,\varphi(0))+\sum_j q_{ij}(t-\tau_j,\varphi(-\tau_j))$$

$$+\int_{-\tau}^0 q_i(t+\theta,\varphi(\theta))\mathrm{d}\nu_i(\theta),\quad t\geqslant 0,\varphi\in C. \tag{4.5.17b}$$

若 $\psi'(t)<0,\gamma>0,\rho,\phi$ 依(4.1.4)，π_j,ρ_j 依(4.1.24)，M_j 依式(4.5.11)，

$$q_{i0}(t,x)\geqslant\sum_j\rho_j^\gamma q_{ij}(t,x)+\rho^\gamma q_i(t,x),\quad t\geqslant 0,x\in\mathbf{R}^d, \tag{4.5.18a}$$

则在以下两种情况下方程(4.5.1)的零解(若其存在) p 阶矩 ψ^γ 稳定：

(i) 条件(4.5.17a)满足，且

$$\breve{b}\rho^\gamma+c_2\gamma\phi+\sum_j\breve{a}_j\rho_j^\gamma\leqslant\hat{a}; \tag{4.5.19a}$$

(ii) 条件(4.5.17b)满足，且

$$\breve{a}+\breve{b}\rho^\gamma+c_2\gamma\phi+\sum_j[\|\breve{Q}_j\|^{p/2}(\rho_j^\gamma-1)+\tau_jM_j\rho_j^\gamma]$$

$$<(c_1/\check{\tau})\wedge\sum_j\hat{a}_j\pi_j^\gamma. \tag{4.5.19b}$$

若 $\psi'(t)>0,\phi$ 依(4.2.4)，π_j,ρ_j 依(4.2.24)，

$$q_{i0}(t,x)\geqslant\sum_j\rho_j^\gamma q_{ij}(t,x)+q_i(t,x),\quad t\geqslant 0,x\in\mathbf{R}^d \tag{4.5.18b}$$

(对照(4.2.28b))，则在以下两种情况下方程(4.5.1)的解 p 阶矩 ψ^γ 有界.

(iii) 条件(4.5.17a)满足，且

$$\breve{b}-c_1\gamma\phi+\sum_j\breve{a}_j\rho_j^\gamma\leqslant\hat{a}. \tag{4.5.20a}$$

(iv) 条件(4.5.17b)满足，且

$$\breve{a}+\breve{b}-c_1\gamma\phi+\sum_j\tau_jM_j$$

$$<(c_1/\check{\tau})\wedge\sum_j[\hat{a}_j\pi_j^\gamma+\min_i\lambda_{\min}^{p/2}(Q_{ij})(1-\rho_j^\gamma)]. \tag{4.5.20b}$$

若 $\zeta_i(t)\in L^1(\mathbf{R}_+)$，$\gamma=0$ 时式(4.5.18b)满足，$\breve{b}+\sum\breve{a}_j\leqslant\hat{a}$(对情况(iii))或 $\breve{a}+\breve{b}+\sum\tau_jM_j<(c_1/\check{\tau})\wedge\sum\hat{a}_j$(对情况(iv))，则方程(4.5.1)的解 p 阶矩有界.

证　取定方程(4.5.1)的一个解 $x(t)=x(t,\xi)$，只要证 $h(t)$（依(4.1.7)）有界.

首先考虑情况(i). 由条件(4.5.16)有

$$c_1h(t)\leqslant\mathrm{E}[\psi^{-\gamma}(t)V(t,x(t),r(t))]\leqslant\mathrm{const}+I_1+I_2,$$

其中

$$I_1 = \mathrm{E}\int_0^t V(s,x(s),r(s))\mathrm{d}\psi^{-\gamma}(s) \leqslant c_2\gamma\phi\int_0^t h(s)\mathrm{d}s;$$

$$I_2 = \mathrm{E}\int_0^t \psi^{-\gamma}(s)LV(s,x(s),r(s))\mathrm{d}s \leqslant \mathrm{const} + I'_2 + I''_2,$$

$$I_2' = \mathrm{E}\int_0^t \psi^{-\gamma}(s)\Big[-a_r|x(s)|^p + \sum_j a_{rj}|x(s-\tau_j)|^p$$

$$+ b_r\int_{-\tau}^0 |x(s+\theta)|^p\mathrm{d}\mu_r(\theta)\Big]\mathrm{d}s$$

$$\leqslant \mathrm{const} + \Big(-\hat{a} + \sum_j \check{a}_j\rho_j^\gamma + \check{b}\rho^\gamma\Big)\int_0^t h(s)\mathrm{d}s,$$

$$I_2'' = \mathrm{E}\int_0^t \psi^{-\gamma}(s)\Big[-q_{r0}(s,x(s)) + \sum_j q_{rj}(s-\tau_j,x(s-\tau_j))$$

$$+ \int_{-\tau}^0 q_r(s+\theta,x(s+\theta))\mathrm{d}\nu_r(\theta)\Big]\mathrm{d}s$$

$$\leqslant \mathrm{const},$$

最后一步依据条件(4.5.18a)(参考定理4.2.11).综上即得 $h(t) \leqslant \mathrm{const}$.

对于情况(ii),采用由式(4.5.8)定义的函数 $W(t,x,i)$,有

$$c_1 h(t) \leqslant \mathrm{E}[\psi^{-\gamma}(t)W(t,x(t),r(t))] \leqslant \mathrm{const} + I_1 + I_2 + I_3,$$

其中 I_1 与情况(i)之证无异;类似于定理4.1.8情况(ii)之证有

$$I_2 = \mathrm{E}\int_0^t \mathrm{d}\psi^{-\gamma}(s)\sum_j\int_{s-\tau_j}^s [x^{\mathrm{T}}(\theta)Q_{rj}x(\theta)]^{p/2}\mathrm{d}\theta$$

$$\leqslant \mathrm{const} + \sum_j \|\check{Q}_j\|^{p/2}(\rho_j^\gamma - 1)\int_0^t h(s)\mathrm{d}s;$$

$$I_3 = \mathrm{E}\int_0^t \psi^{-\gamma}(s)LW(s,x(s),r(s))\mathrm{d}s \leqslant \mathrm{const} + I_3' + I_3'' + I_2'',$$

这用到条件(4.5.17b),其中 I_2'' 与情况(i)之证无异,

$$I_3' = \mathrm{E}\int_0^t \psi^{-\gamma}(s)\Big[a_r|x(s)|^p - \sum_j a_{rj}|x(s-\tau_j)|^p$$

$$+ b_r\int_{-\tau}^0 |x(s+\theta)|^p\mathrm{d}\mu_r\Big]\mathrm{d}s$$

$$\leqslant \mathrm{const} + (\check{a} + \check{b}\rho^\gamma)\int_0^t h(s)\mathrm{d}s - \sum_j \hat{a}_j\pi_j^\gamma\int_0^{t-\check{\tau}} h(s)\mathrm{d}s,$$

$$I_3'' = \mathrm{E}\int_0^t \psi^{-\gamma}(s)\mathrm{d}s\sum_{i,j}\gamma_{ri}\int_{s-\tau_j}^s [x^{\mathrm{T}}(\theta)Q_{ij}x(\theta)]^{p/2}\mathrm{d}\theta$$

$$\leqslant \sum_j M_j\int_{-\tau}^t \mathrm{E}|x(\theta)|^p\mathrm{d}\theta\int_\theta^{\theta+\tau_j}\psi^{-\gamma}(s)\mathrm{d}s \qquad (\text{用}(4.5.10))$$

$$\leqslant \mathrm{const} + \sum_j \tau_j M_j\rho_j^\gamma\int_0^t h(s)\mathrm{d}s.$$

在不等式(4.5.19b)两端之间插入一非负数 ω，则综上得

$$c_1 h(t) \leqslant \text{const} + \omega\int_{t-\check{\tau}}^{t} h(s)\,\mathrm{d}s \leqslant \text{const} + \omega\check{\tau}H(t).$$

因 $\omega\check{\tau} < c_1$，故可从以上不等式解出 $H(t) \leqslant \text{const}$.

情况(iii)与(iv)的证明是类似的，从略. □

以上证明中，因"分项"地形成极小 $\hat{a}$ 与极大 $\check{b}$ 等，很可能在估计 $h(t)$ 时放大得过头了，以至所得的条件(4.5.19a)、(4.5.19b)、(4.5.20a)、(4.5.20b)不甚精细. 这一缺点可用某种"合项估计"来消除. 例如，易将条件(4.5.19a)改进为一般更精细的

$$c_2\gamma\phi + \max_i\Big(b_i\rho^\gamma + \sum_j a_{ij}\rho_j^\gamma - a_i\Big) \leqslant 0. \qquad (4.5.19\text{a})'$$

鉴于这类改进总可平凡地作出，且常导致不那么简洁的条件，今后将不再提及.

考虑以下例子，以解释定理4.5.4的应用.

例4.5.5　考虑一维非线性方程：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}x(t) &= [-\alpha_r x(t) + x(t-1) - \mathrm{e}^{0.2t}x^3(t)]\,\mathrm{d}t \\ &\quad + \int_{-1}^{0}[x(t+\theta) + \mathrm{e}^{0.1t}x^2(t+\theta)]\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}w(t),\end{aligned} \qquad (*)$$

其中 $\alpha_i > 0$. 取 $V = x^2$，对任给 $t \geqslant 0, \varphi \in C[-1,0]$ 有

$$\begin{aligned}\mathscr{L}V(t,\varphi,i) &= 2\varphi(0)[-\alpha_i\varphi(0) + \varphi(-1) - \mathrm{e}^{0.2t}\varphi^3(0)] \\ &\quad + \Big\{\int_{-1}^{0}[\varphi^2(\theta) + \mathrm{e}^{0.1t}\varphi^2(\theta)]\,\mathrm{d}\theta\Big\}^2 \\ &\leqslant -a_i\varphi^2(0) + a_{i1}\varphi^2(-1) + b_i\int_{-1}^{0}\varphi^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &\quad - q_{i0}(t,\varphi(0)) + q_{i1}(t-1,\varphi(-1)) + \int_{-1}^{0}q_i(t+\theta,\varphi(\theta))\,\mathrm{d}\theta,\end{aligned}$$

其中

$$a_i = 2\alpha_i - 1,\quad a_{i1} = 1,\quad b_i = (1-\varepsilon)^{-1},\quad (0 < \varepsilon < 1)$$

$$q_{i0}(t,x) = 2x^4\mathrm{e}^{0.2t},\quad q_{i1}(t,x) = 0,\quad q_i(t,x) = \varepsilon^{-1}x^4\mathrm{e}^{0.2(t+1)}.$$

于是类似于例4.2.12中的分析可得，若 $0.6107 < \varepsilon < 1$，则当 $\gamma > 0$ 充分小时条件(4.5.18a)满足. 然后用定理4.5.4情况(i)得出，当 $\hat{\alpha} > 2.2844$ 时方程($*$)的零解均方指数稳定.

其次取 $Q_i \equiv 1$，仍设 $V = x^2$，则有

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}V(t,\varphi,i) + Q_i[\varphi^2(0) - \varphi^2(-1)] \\ &\leqslant a_i\varphi^2(0) - a_{i1}\varphi^2(-1) + b_i\int_{-1}^{0}\varphi^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &\quad - q_{i0}(t,\varphi(0)) + q_{i1}(t-1,\varphi(-1)) + \int_{-1}^{0}q_i(t+\theta,\varphi(0))\,\mathrm{d}\theta,\end{aligned}$$

其中 b_i, q_{i0}, q_{i1}, q_i 仍如前述，而 $a_i = 2 - 2\alpha_i, a_{i1} = 0$. 当 $\gamma = 0$ 时条件(4.5.19b)成为

$$2 - 2\hat{\alpha} + (1 - \varepsilon)^{-1} < 1 \wedge \hat{a}_1 = 0.$$

结合 $0.6107 < \varepsilon < 1$ 同样解出 $\hat{\alpha} > 2.2844$.

定理4.5.4具有很大的一般性，可作多种特殊使用，不拟详细讨论. 下面仅考虑一种较简单的特殊情况，即取 $V = p_i |x|^2, \tau_j \equiv \tau_1, q_{i0}, q_{i1}, q_i \equiv 0$ 的情况.

推论4.5.6 设存在常数 $p_i > 0, a_i \in \mathbf{R}, a_{i1}, b_i \geqslant 0, \tau_1 \in (0, \tau]$, $[-\tau, 0]$ 上的概率测度 μ_i，半正定矩阵 Q_i，使得以下条件满足：

$$2p_i\varphi^{\mathrm{T}}(0)f(t,\varphi,i) + p_i|g(t,\varphi,i)|^2 + \sum_s \gamma_{is}p_s|\varphi(0)|^2$$
$$\leqslant -a_i|\varphi(0)|^2 + a_{i1}|\varphi(-\tau_1)|^2 + b_i\int_{-\tau}^0 |\varphi(\theta)|^2 \mathrm{d}\mu_i \qquad (4.5.21\mathrm{a})$$

或

$$2p_i\varphi^{\mathrm{T}}(0)f(t,\varphi,i) + p_i|g(t,\varphi,i)|^2 + \sum_s \gamma_{is}p_s|\varphi(0)|^2$$
$$+ \varphi^{\mathrm{T}}(0)Q_i\varphi(0) - \varphi^{\mathrm{T}}(-\tau_1)Q_i\varphi(-\tau_1)$$
$$\leqslant a_i|\varphi(0)|^2 - a_{i1}|\varphi(-\tau_1)|^2 + b_i\int_{-\tau}^0 |\varphi(\theta)|^2 \mathrm{d}\mu_i, \qquad (4.5.21\mathrm{b})$$

其中 $t \geqslant 0, \varphi \in C$. 若 $\psi'(t) < 0, \rho, \phi$ 依(4.1.4)，π_1, ρ_1 依(4.1.24)，则在以下两种情况下方程(4.5.1)的零解(若其存在)均方 ψ^γ 稳定：

(i) 条件(4.5.21a)满足，$\check{a}_1 + \check{b} < \hat{a}$，$\gamma$ 是以下方程的唯一正解：

$$\check{a}_1\rho_1^\gamma + \check{b}\rho^\gamma + \check{p}\gamma\phi = \hat{a}; \qquad (4.5.22\mathrm{a})$$

(ii) 条件(4.5.21b)满足，$\gamma > 0$，且

$$\check{a} + \check{b}\rho^\gamma + \check{p}\gamma\phi + \|\check{Q}\|(\rho_1^\gamma - 1) + \tau_1 M\rho_1^\gamma < (\hat{p}/\tau_1) \wedge (\hat{a}_1\pi_1^\gamma), \qquad (4.5.22\mathrm{b})$$

其中 M 依式(4.5.11)′. 当 $\check{a} + \check{b} + \tau_1 M < (\hat{p}/\tau_1) \wedge \hat{a}_1$ 时满足式(4.5.22b)的 $\gamma > 0$ 必存在.

若 $\psi'(t) > 0, \phi$ 依(4.2.4)，π_1, ρ_1 依(4.2.24)，$\gamma \geqslant 0$，则在以下两种情况下方程(4.5.1)的解均方 ψ^γ 有界：

(iii) 条件(4.5.21a)满足，且

$$\check{a}_1\rho_1^\gamma + \check{b} - \hat{p}\gamma\phi \leqslant \hat{a} \text{ 或 } \gamma = (\check{b} - \hat{a})^+ / \hat{p}\phi (\text{若 } \check{a}_1 = 0); \qquad (4.5.23\mathrm{a})$$

(iv) 条件(4.5.21b)满足，且

$$\check{a} + \check{b} - \hat{p}\gamma\phi + \tau_1 M < (\hat{p}/\tau_1) \wedge [\hat{a}_1\pi_1^\gamma + \min_i \lambda_{\min}(Q_i)(1 - \rho_1^\gamma)]. \qquad (4.5.23\mathrm{b})$$

若 $\check{a}_1 + \check{b} \leqslant \hat{a}$ (对情况(iii))或 $\check{a} + \check{b} + \tau_1 M < (\hat{p}/\tau_1) \wedge \hat{a}_1$ (对情况(iv))，则

方程(4.5.1)的解均方有界.

条件(4.5.21)中出现和式 $\sum_s \gamma_{is}p_s$ 似不方便,我们希望代以更简洁的条件:

$$2\varphi^{\mathrm{T}}(0)f(t,\varphi,i)+|g(t,\varphi,i)|^2$$
$$\leqslant -\alpha_i|\varphi(0)|^2+\eta_i|\varphi(-\tau_1)|^2+\beta_i\int_{-\tau}^{0}|\varphi(\theta)|^2\mathrm{d}\mu_i \qquad (4.5.24\mathrm{a})$$

或

$$2\varphi^{\mathrm{T}}(0)f(t,\varphi,i)+|g(t,\varphi,i)|^2+\varphi^{\mathrm{T}}(0)H_i\varphi(0)-\varphi^{\mathrm{T}}(-\tau_1)H_i\varphi(-\tau_1)$$
$$\leqslant \alpha_i|\varphi(0)|^2-\eta_i|\varphi(-\tau_1)|^2+\beta_i\int_{-\tau}^{0}|\varphi(\theta)|^2\mathrm{d}\mu_i. \qquad (4.5.24\mathrm{b})$$

今用基于定理4.5.3的方法来实现上述意图. 设有 $q_i>0$ 使 $A\triangleq\mathrm{diag}(q_i)-\Gamma$ 为M矩阵, $e=(1,1,\cdots,1)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$(下同), 则 $(p_i)=A^{-1}e\gg 0$,

$$\sum_s\gamma_{is}p_s=p_iq_i-1.$$

于是只要令 $Q_i=p_iH_i, a_i=\alpha_ip_i+p_iq_i-1, a_{i1}=p_i\eta_i, b_i=p_i\beta_i$, 即从条件(4.5.24b)推出(4.5.21b). 另一方面,若 $q_i=\alpha_i$, 则只要令 $a_i=1, a_{i1}=p\eta_i, b_i=p_i\beta_i$, 即从条件(4.5.24a)推出(4.5.21a). 这就由推论4.5.6得到

定理4.5.7　设存在常数 $\alpha_i\in\mathbf{R},\beta_i,\eta_i\geqslant 0,\tau_1\in(0,\tau]$,$[-\tau,0]$上的概率测度 μ_i,半正定矩阵 H_i, 使得条件(4.5.24a)或(4.5.24b)满足.

(i) 设条件(4.5.24a)满足, $A\triangleq\mathrm{diag}(\alpha_i)-\Gamma$ 为M矩阵, $(p_i)=A^{-1}e, a_{i1}=p_i\eta_i, b_i=p_i\beta_i$. 若 $\psi'(t)<0,\check{a}+\check{b}<1,\gamma$ 是以下方程的唯一正解:

$$\check{a}_1\rho_1^\gamma+\check{b}\rho^\gamma+\check{p}\gamma\phi=1, \qquad (\rho,\phi\text{ 依}(4.1.4),\rho_1\text{ 依}(4.1.24)) \qquad (4.1.25\mathrm{a})$$

则方程(4.5.1)的零解(若其存在)均方 ψ^γ 稳定. 若 $\psi'(t)>0,\gamma\geqslant 0$ 满足

$$\check{a}_1\rho_1^\gamma+\check{b}-\hat{p}\gamma\phi\leqslant 1 \qquad (\phi\text{ 依}(4.2.4),\rho_1\text{ 依}(4.2.24)) \qquad (4.5.25\mathrm{b})$$

(当 $\eta_i\equiv 0$ 时可取 $\gamma=(\check{b}-1)^+/\hat{p}\phi$), 则方程(4.5.1)的解均方 ψ^γ 有界, 当 $\check{a}+\check{b}\leqslant 1$ 时均方有界.

(ii) 设条件(4.5.24b)满足;存在 $q_i>0$ 使 $A\triangleq\mathrm{diag}(q_i)-\Gamma$ 为M矩阵, $(p_i)=A^{-1}e, Q_i=p_iH_i, a_i=p_i\alpha_i+p_iq_i-1, a_{i1}=p_i\eta_i, b_i=p_i\beta_i$. 若 $\psi'(t)<0,\gamma>0$ 满足式(4.5.22b), 则方程(4.5.1)的零解(若其存在)均方 ψ^γ 稳定;若 $\psi'(t)>0.\gamma\geqslant 0$ 满足式(4.5.23b), 则方程(4.5.1)的解均方 ψ^γ 有界.

以上结果常用于如下形式的方程:

$$\mathrm{d}x(t)=[f_1(t,x(t),r(t))+f_2(t,x_t,r(t))]\mathrm{d}t+g(t,x_t,r(t))\mathrm{d}w(t). \qquad (4.5.26)$$

为验证条件(4.5.24a)或(4.5.24b),给出如下条件:

$$\begin{cases} x^{\mathrm{T}} f_1(t,x,i) \leqslant -\lambda_i |x|^2, & (4.5.27\mathrm{a}) \\ 1f_2 | f_2(t,\varphi,i) | \leqslant s_i |\varphi(-\tau_1)| + \kappa_i \int_{-\tau}^{0} |\varphi(\theta)| \mathrm{d}\mu_i, & (4.5.27\mathrm{b}) \\ |g(t,\varphi,i)| \leqslant \sigma_i \int_{-\tau}^{0} |\varphi(\theta)| \mathrm{d}\mu_i, & (4.5.27\mathrm{c}) \end{cases}$$

其中 $t \geqslant 0, x \in \mathbf{R}^d, \varphi \in C, \lambda_i, s_i, \kappa_i, \sigma_i \geqslant 0$. 若令

$$f(t,\varphi,i) = f_1(t,\varphi(0),i) + f_2(t,\varphi,i),$$

$H_i = \lambda_i I$, 则由条件(4.5.27a) ~ (4.5.27c)推出

$$2\varphi^{\mathrm{T}}(0) f(t,\varphi,i) + |g(t,\varphi,i)|^2$$
$$\leqslant -(2\lambda_i - s_i - \kappa_i) |\varphi(0)|^2 + s_i |\varphi(-\tau_1)|^2 + (\kappa_i + \sigma_i^2) \int_{-\tau}^{0} |\varphi(\theta)|^2 \mathrm{d}\mu_i,$$
$$2\varphi^{\mathrm{T}}(0) f(t,\varphi,i) + |g(t,\varphi,i)|^2 + \varphi^{\mathrm{T}}(0) H_i \varphi(0) - \varphi^{\mathrm{T}}(-\tau_1) H_i \varphi(-\tau)$$
$$\leqslant (s_i + \kappa_i - \lambda_i) |\varphi(0)|^2 - (\lambda_i - s_i) |\varphi(-\tau_1)|^2$$
$$+ (\kappa_i + \sigma_i^2) \int_{-\tau}^{0} |\varphi(\theta)|^2 \mathrm{d}\mu_i.$$

这就在形式上验证了条件(4.5.24a)与(4.5.24b),因而可由定理 4.5.7 得到

推论 4.5.8 设存在常数 $\lambda_i, s_i, \kappa_i, \sigma_i \geqslant 0$ 使条件(4.5.27a) ~ (4.5.27c)满足, $\tau_1 \in (0,\tau]$, μ_i 是$[-\tau,0]$上的概率测度.

(i) 设 $A \triangleq \mathrm{diag}(2\lambda_i - s_i - \kappa_i) - \Gamma$ 为 M 矩阵, $(p_i) = A^{-1}e, a_{1i} = p_i s_i, b_i = p_i(\kappa_i + \sigma_i^2)$, 则定理 4.5.7(i)中的结论成立;

(ii) 设存在 $q_i > 0$, 使 $A \triangleq \mathrm{diag}(q_i) - \Gamma$ 为 M 矩阵, $(p_i) = A^{-1}e, Q_i = p_i \lambda_i I$, $a_i = p_i(s_i + \kappa_i - \lambda_i + q_i) - 1, a_{1i} = p_i(\lambda_i - s_i) \geqslant 0, b_i = p_i(\kappa_i + \sigma_i^2)$, 则定理 4.5.7(ii)中的结论成立.

若进而取 $\psi(t) = \mathrm{e}^{\pm t}, s_i = 0$, 则从推论 4.5.8(i)得到更简单的结论:

推论 4.5.9 设存在常数 $\lambda_i, \kappa_i, \sigma_i \geqslant 0$, $[-\tau,0]$ 上的概率测度 μ_i, 使条件(4.5.27a) ~ (4.5.27c)满足(取 $s_i = 0$); $A \triangleq \mathrm{diag}(2\lambda_i - \kappa_i) - \Gamma$ 为 M 矩阵, $(p_i) = A^{-1}e, b_i = p_i(\kappa_i + \sigma_i^2)$. 若 $\hat{b} < 1$, γ 是方程 $\hat{b}\mathrm{e}^{\gamma\tau} + \hat{p}\gamma = 1$ 的唯一正解,则方程(4.5.26)的解 $x(t,\xi)$ 满足:

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\, t^{-1} \ln \mathrm{E} |x(t,\xi)|^2 \leqslant -\gamma. \tag{4.5.28}$$

若 $\gamma = (\hat{b} - 1)^+ / \hat{p}$, 则方程(4.5.26)的解 $x(t,\xi)$ 满足:

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\, t^{-1} \ln \mathrm{E} |x(t,\xi)|^2 \leqslant \gamma. \tag{4.5.29}$$

将推论 4.5.9 分别用于方程

$$\dot{x}(t) = f_1(t, x(t), r(t)), \tag{4.5.30}$$

$$\mathrm{d}x(t) = f_1(t, x(t), r(t))\mathrm{d}t + g(t, x_t, r(t))\mathrm{d}w(t) \tag{4.5.31}$$

得

推论 4.5.10　设存在正常数 $\lambda_i(i\in S)$ 使条件(4.5.27a)满足；$A\triangleq\mathrm{diag}(2\lambda_i)-\Gamma$ 为 M 矩阵，$(p_i)=A^{-1}e,\gamma=1/\check{p}$，则方程(4.5.30)的解满足式(4.5.28)，因而其零解(若其存在)均方指数稳定.

推论 4.5.11　设存在非负常数 $\lambda_i,\sigma_i(i\in S)$ 使条件(4.5.27a)与(4.5.27c)满足，$A\triangleq\mathrm{diag}(2\lambda_i)-\Gamma$ 为 M 矩阵，$(p_i)=A^{-1}e,b_i=p_i\sigma_i^2$，则可将推论 4.5.9 的结论用于方程(4.5.31). 特别，若 σ_i 适当小，则方程(4.5.31)的零解(若其存在)均方指数稳定.

推论 4.5.9 ~ 推论 4.5.11 中的稳定性结论属于 Mao.

下面推广定理 4.3.8 与定理 4.3.17，它们给出另一方向的矩估计.

定理 4.5.12　设 $p>0,\beta\in(0,1],\xi\in S_{\beta,p}$(依(4.3.6))，$x(t,\xi)$ 是方程(4.5.1)的解. 设存在半正定矩阵 Q_i，常数 $c_1,c_2>0,a_i\in\mathbf{R},a_{1i},b_i,\gamma\geqslant 0,\tau_1\in(0,\tau]$，$[-\tau,0]$ 上的概率测度 μ_i，函数 $V(t,x,i)\in C^{1,2}(\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^d\times S)$ 与 $\zeta_i(t)$，使得 $\zeta_i(t)\psi^{-\gamma}(t)\in L^1(\mathbf{R}_+)$，且条件(4.5.16)及以下条件满足：

$$\mathscr{L}V(t,\varphi,i)-[\varphi^{\mathrm{T}}[-\tau_1]Q_i\varphi(-\tau_1)]^{p/2}+[\varphi^{\mathrm{T}}(-\tau)Q_i\varphi(-\tau)]^{p/2}$$

$$\geqslant a_i|\varphi(0)|^p-a_{1i}|\varphi(-\tau_1)|^p-b_i\int_{-\tau}^{0}|\varphi(\theta)|^p\mathrm{d}\mu_i-\zeta_i(t),\ t\geqslant 0,\varphi\in C. \tag{4.5.32}$$

(i) 若 $\psi'(t)>0$，ϕ_0 依(4.2.4)，ρ_1 依(4.2.24)，

$$\hat{a}\geqslant\check{a}_1\rho_1^\gamma+\check{b}+c_2\gamma\phi_0-N\rho_1^\gamma(\tau-\tau_1), \tag{4.5.33a}$$

$$N=\min_i\Big(\gamma_{ii}\|Q_i\|^{p/2}+\sum_{s\neq i}\gamma_{is}q_s^{p/2}\Big),\quad q_i=\lambda_{\min}(Q_i) \tag{4.5.34}$$

(与式(4.5.11)′对照，注意必定 $N\leqslant 0$)，则成立

$$c_2\mathrm{E}|x(t,\xi)|^p\geqslant\psi^\gamma(t)\{\|\xi\|_0^p[\beta c_1-\|\check{Q}\|^{p/2}(\tau-\tau_1)-\check{a}_1\tau_1$$
$$-\check{b}\tau+N\tau(\tau-\tau_1)]-\max_i\|\zeta_i\psi^{-\gamma}\|_1\}(t\geqslant 0). \tag{4.5.35a}$$

(ii) 若 $\psi'(t)<0$，

$$\hat{a}+c_1\gamma\phi_0\geqslant\check{a}_1\rho_1^\gamma+\check{b}\rho^\gamma+\|\check{Q}\|^{p/2}(\rho^\gamma-\pi_1^\gamma)-N\rho^\gamma(\tau-\tau_1), \tag{4.5.33b}$$

其中 ρ,ϕ_0 依(4.1.4)，ρ_1 依(4.1.24)，则成立

$$c_2\mathrm{E}|x(t,\xi)|^p\geqslant\psi^\gamma(t)\{\|\xi\|_0^p[\beta c_1-\|\check{Q}\|^{p/2}(\tau-\tau_1)(1+\tau\phi\rho^\gamma)$$
$$-\check{a}_1\tau_1\rho_1^\gamma-\check{b}\tau\rho^\gamma+N\rho^\gamma\tau(\tau-\tau_1)]-\max_i\|\zeta_i\psi^{-\gamma}\|_1\}, \tag{4.5.35b}$$

其中 ϕ 依(4.1.4). 若 $\zeta_i(t)\in L^1(\mathbf{R}_+)$，$\hat{a}\geqslant\check{a}_1+\check{b}-N(\tau-\tau_1)$，则

$$c_2\mathrm{E}|x(t,\xi)|^p\geqslant\|\xi\|_0^p[\beta c_1-\|\check{Q}\|^{p/2}(\tau-\tau_1)-\check{a}_1\tau_1$$

$$- b\tau + N\tau(\tau - \tau_1) \rfloor - \max_i \| \zeta_i \|_1 .$$

定理4.3.8 的证法稍作修改即可用于证定理4.5.12,不必细述.

参照形成定理4.5.7 的方法,可获得应用定理4.5.12 的如下途径. 设存在半正定矩阵 H_i, 常数 $\alpha_i,\eta_i,\beta_i \geqslant 0$, $[-\tau,0]$ 上的概率测度 μ_i 及函数 $\zeta_i(t)$, 使得

$$2\varphi^{\mathrm{T}}(0)f(t,\varphi,i) + | g(t,\varphi,i) |^2 - \varphi^{\mathrm{T}}(-\tau_1)H_i\varphi(-\tau_1) + \varphi^{\mathrm{T}}(-\tau)H_i\varphi(-\tau)$$

$$\geqslant \alpha_i | \varphi(0) |^2 - \eta_i | \varphi(-\tau_1) |^2 - \beta_i\int_{-\tau}^0 | \varphi(\theta) |^2 \mathrm{d}\mu_i - \zeta_i(t). \tag{4.5.36}$$

取 $q_i > 0$ 使 $A \triangleq \operatorname{diag}(q_i) - \Gamma$ 为 M 矩阵. 令 $(p_i) = A^{-1}\mathrm{e}, Q_i = p_iH_i$, 则不难从条件(4.5.36)推出

$$\mathscr{L}V(t,\varphi,i) - \varphi^{\mathrm{T}}(-\tau_1)Q_i\varphi(-\tau_1) + \varphi^{\mathrm{T}}(-\tau)Q_i\varphi(-\tau)$$

$$\geqslant a_i | \varphi(0) |^2 - a_{1i} | \varphi(-\tau_1) |^2 - b_i\int_{-\tau}^0 | \varphi(\theta) |^2 \mathrm{d}\mu_i - p_i\zeta_i(t),$$

其中 $V = p_i | x |^2$, $a_i = p_i(\alpha_i + q_i) - 1, a_{1i} = p_i\eta_i, b_i = p_i\beta_i$. 这就形式上验证了条件(4.5.32)(取 $p = 2, V = p_i | x |^2$), 从而可依定理4.5.12 形成与式(4.5.33a),(4.5.33b)相当的条件,并得出与式(4.5.35a),(4.5.35b)相当的结论. 这些都不拟详述.

4.5.3 轨道估计

在§4.1~§4.3 中运用了多种方法对方程的解作轨道估计,现在看能否对方程(4.5.1)运用类似的方法. 首先,定理4.1.14 与定理4.2.15 之证无需用到 Itô 公式,因而可平凡地推广于方程(4.5.1),这就是下面的定理.

定理 4.5.13 设 $p > 0$;方程(4.5.1)的某个解 $x(t)$ 满足

$$\mathrm{E} | x(t) |^p \leqslant \beta \psi^{\mu}(t), \quad t \geqslant 0, \tag{4.5.37}$$

其中 $\beta,\mu > 0$ 与 t 无关;存在正常数 ε,K,使以下条件满足

$$\sum_n [\psi(n\tau)]^{\mp\varepsilon} < \infty, \quad \pm 1 = \operatorname{sgn} \psi'(t), \tag{4.5.38}$$

$$\begin{cases} \mathrm{E} | f(t,x_t,r(t)) |^p \vee \mathrm{E} | g(t,x_t,r(t)) |^p \leqslant K \| x_t \|_0^p, \quad p \geqslant 2, \\ \mathrm{E}[\sup\limits_{t-\tau\leqslant s\leqslant t} | f(s,x_s,r(s)) |^p] \vee \mathrm{E}[\sup\limits_{t-\tau\leqslant s\leqslant t} | g(s,x_s,r(s)) |^p] \\ \leqslant K \| x_t \|_0^p, \quad 0 < p < 2 \end{cases} \tag{4.5.39}$$

若 $\gamma = \mu \pm \varepsilon > 0$,则

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\ln | x(t) |^p}{| \ln \psi(t) |} \leqslant \pm \gamma, \text{a. s.}. \tag{4.5.40}$$

分别取 $\psi(t) = \mathrm{e}^{\pm t}$ 与 $\psi(t) = (1 + \sigma t)^{\pm 1} (0 < \sigma < 1/\tau)$,由定理4.5.13 得

推论 4.5.14 设 $p > 0$;方程(4.5.1)的某个解 $x(t)$ 满足

$$\mathrm{E} | x(t) |^p \leqslant \beta\mathrm{e}^{\pm\mu t} \quad \text{或} \ \mathrm{E} | x(t) |^p \leqslant \beta(1 + \sigma t)^{\pm\mu}, \quad t \geqslant 0,$$

其中$\beta,\mu>0$与t无关,$0<\sigma<1/\tau$;条件(4.5.39)满足.则

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\, t^{-1}\ln|x(t)|^p\leqslant\pm\mu,\text{a. s.}$$

或

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\ln|x(t)|^p}{\ln t}\leqslant 1\pm\mu,\text{a. s.}.$$

基于指数鞅不等式的定理4.1.19与定理4.2.20是本章的主要轨道估计结果,现在看能否推广于方程(4.5.1).考虑到广义的Itô公式(4.5.4)中$LV(t,x(t),r(t))$有一个更复杂的表达式(对照(1.3.19)),而这将使类似于(4.1.41)或(4.2.38)的条件更难验证,现在应采用一个稍特殊的Liapunov函数,它具有$p_iV(t,x)$的形式,而这就有较简单的公式:

$$\mathrm{d}\ln[p_rV(t,x(t))]=\mathrm{d}\ln p_r+\mathrm{d}\ln V(t,x(t)).$$

由此,仿照定理4.1.19与定理4.2.20可建立以下结果.

定理4.5.15　设$x(t)$是方程(4.5.1)的一个解,$\forall t\geqslant0,x(t)\neq0$,a. s.,存在$V(t,x)\in C^{1,2}(\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^d)$,$\zeta(t)\in L^1(\mathbf{R}_+)$与在$\delta=1$邻近定义的连续函数$\mu(\delta)$及正常数$c,p_i(i\in S)$,使得$\mu(1)\geqslant0$(若$\psi'(t)>0$)或$\mu(1)>0$(若$\psi'(t)<0$),且以下条件满足:

$$c|x|^2\leqslant V(t,x),\quad t\geqslant0,x\in\mathbf{R}^d,\tag{4.5.41}$$

$$\frac{LV(t,x(t))}{V(t,x(t))}-\frac{\delta}{2}|Z(t)|+\sum_j\gamma_{ij}\ln p_j\leqslant\zeta(t)+\mu(\delta)\psi_1(t),\tag{4.5.42}$$

其中$\delta\in(0,1)$邻近1,$Z(t)=V_x(t,x(t))g(t,x_t,r(t))/V(t,x(t))$.则成立

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\ln|x(t)|^2}{|\ln\psi(t)|}\leqslant\pm\mu(1),\text{a. s.},\qquad\pm1=\operatorname{sgn}\psi'(t).\tag{4.5.43}$$

证　取$\gamma>\mu(1)$(若$\psi'(t)>0$)或$\gamma\in(0,\mu(1))$(若$\psi'(t)<0$),只要以γ取代$\mu(1)$证式(4.5.43).为此又只要证$h(t)\triangleq\psi^{-\gamma}(t)|x(t)|^2$为a. s.轨道有界.由条件(4.5.41)有

$$\begin{aligned}\ln[c\hat{p}h(t)]&\leqslant\ln[p_r\psi^{-\gamma}(t)V(t,x(t))]\\&=c_0+\int_0^tL[\ln p_r-\gamma\ln\psi(s)+\ln V(s,x(s))]\mathrm{d}s+M(t)\\&=c_0+\int_0^t\Big[\sum_j\gamma_{rj}\ln p_j-\gamma\psi_1(s)\\&\quad+\frac{LV(s,x(s))}{V(s,x(s))}-\frac{1}{2}|Z(s)|^2\Big]\mathrm{d}s+M(t),\end{aligned}$$

其中c_0与t无关,$M(t)=\int_0^tZ(s)\mathrm{d}w(s)$.以$\varphi(t)$记$\psi(t)$(若$\psi'(t)>0$)或$1/\psi(t)$(若$\psi'(t)<0$)的反函数,设$\delta\in(0,1)$充分接近于1,则由指数鞅不等式

有

$$P\Big(\sup_{0\leqslant t\leqslant\varphi(e^{n+1})}\Big[M(t)-\frac{1-\delta}{2}\int_0^t|Z(s)|^2\mathrm{d}s\Big]\geqslant\frac{2\ln n}{1-\delta}\Big)\leqslant\frac{1}{n^2}.$$

于是 a.s. 地,当 n 充分大, $\varphi(e^n)\leqslant t\leqslant\varphi(e^{n+1})$ 时有

$$M(t)\leqslant\frac{1-\delta}{2}\int_0^t|Z(s)|^2\mathrm{d}s+\frac{2\ln|\ln\psi(t)|}{1-\delta}.$$

以此代入前面的估计得,a.s. 地,当 t 充分大时有

$$\begin{aligned}\ln[c\hat{p}h(s)]&\leqslant c_0+\int_0^t\Big[\sum_j\gamma_{rj}\ln p_j-\gamma\psi_1(s)+\frac{LV(s,x(s))}{V(s,x(s))}\\&\qquad-\frac{\delta}{2}|Z(s)|^2\Big]\mathrm{d}s+\frac{2\ln|\ln\psi(t)|}{1-\delta}\\&\leqslant c_0+\int_0^t\zeta(s)\mathrm{d}s+[\mu(\delta)-\gamma]\int_0^t\psi_1(s)\mathrm{d}s+\frac{2\ln|\ln\psi(t)|}{1-\delta}\\&\leqslant c_1-|\mu(\delta)-\gamma||\ln\psi(t)|+\frac{2\ln|\ln\psi(t)|}{1-\delta}\leqslant c_1,\end{aligned}$$

其中 c_1 与 t 无关. 由此得出所要证. □

条件(4.5.42)中的 $\sum_j\gamma_{ij}\ln p_j$ 有些累赘,有一简单的方法将其消除. 取正常数 a_i 使 $A\triangleq\mathrm{diag}(a_i)-\Gamma$ 为 M 矩阵. 令 $(b_i)=A^{-1}e,p_i=\mathrm{e}^{b_i}$. 若以下条件满足:

$$\frac{LV(t,x(t))}{V(t,x(t))}-\frac{\delta}{2}|Z(t)|^2\leqslant1-a_rb_r+\zeta(t)+\mu(\delta)\psi_1(t),\qquad(4.5.44)$$

则由 $a_ib_i-\sum_s\gamma_{is}b_s=1$ 得

$$\frac{LV(t,x(t))}{V(t,x(t))}-\frac{\delta}{2}|Z(t)|^2\leqslant-\sum_s\gamma_{rs}\ln p_s+\zeta(t)+\mu(\delta)\psi_1(t),$$

这正表明条件(4.5.42)满足. 这就从定理 4.5.15 推出

推论 4.5.16 设 $x(t)$ 是方程(4.5.1)的一个解, $\forall t\geqslant0,x(t)\neq0$, a.s. ;存在 $V(t,x)\in C^{1,2}(\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^d)$, $\zeta(t)\in L^1(\mathbf{R}_+)$, 在 $\delta=1$ 邻近定义的连续函数 $\mu(\delta)$ 与正常数 c,a_i, 使得 $\mu(1)\geqslant0$(若 $\psi'(t)>0$) 或 $\mu(1)>0$(若 $\psi'(t)<0$), $A\triangleq\mathrm{diag}(a_i)-\Gamma$ 是 M 矩阵, $(b_i)=A^{-1}e$, 且条件(4.5.41)与(4.5.44)满足,则估计式(4.5.43)成立.

4.5.4 延迟微分方程

依照预定的顺序,现在轮到推广 4.1.3 节与 4.2.3 节中的结果了,即研究方程

$$\mathrm{d}x(t)=F(t,x(t),y(t),r(t))\mathrm{d}t+G(t,x(t),y(t),r(t))\mathrm{d}w(t),\qquad(4.5.3)$$

$$\mathrm{d}x(t)=[-A_rx(t)+B_ry(t)]\mathrm{d}t+G(t,x(t),y(t),r(t))\mathrm{d}w(t),\qquad(4.5.45)$$

其中 $y(t)=x(t-\delta(t))$，$A_r=A_{r(t)}\in\mathbf{R}^{d\times d}$，$B_r$ 仿此，对函数 F 与 G 无需解释. 依然沿用(4.1.46)，(4.2.44)的记号，特别约定

$$0\leqslant\tau_0\leqslant\delta(t)\leqslant\tau,\quad 0<\eta\leqslant 1-\delta'(t)\leqslant\eta_0<\infty,\quad t\geqslant 0. \qquad (4.5.46)$$

定理 4.5.17　设 $p>0$；存在常数 $\lambda_i\in\mathbf{R}$，$\mu_i\geqslant 0$，$\gamma>0$（若 $\psi'<0$）或 $\gamma\geqslant 0$（若 $\psi'>0$）与可测函数 $\zeta_i(t)$，半正定矩阵 Q_i，使得 $\zeta_i(t)\psi^{-\gamma}(t)\in L^1(\mathbf{R}_+)$，且以下条件满足：

$$\begin{aligned}\Phi_i &\triangleq (p/2)|x|^{p-2}[2x^{\mathrm T}F(t,x,y,i)+|G(t,x,y,i)|^2\\ &\quad +(p-2)|x|^{-2}|x^{\mathrm T}G(t,x,y,i)|^2]\\ &\leqslant \zeta_i(t)-\lambda_i|x|^p+\mu_i|y|^p \end{aligned}\qquad (4.5.47a)$$

或

$$\begin{aligned}&\Phi_i+(x^{\mathrm T}Q_ix)^{p/2}-\eta(y^{\mathrm T}Q_iy)^{p/2}\\ &\leqslant\zeta_i(t)+\lambda_i|x|^p-\mu_i|y|^p,\quad t\geqslant 0,x,y\in\mathbf{R}^d.\end{aligned}\qquad (4.5.47b)$$

若 $\psi'(t)<0$，则在以下两种情况下方程(4.5.3)的零解（若其存在）p 阶矩 ψ^γ 稳定：

（i）条件(4.5.47a)满足，且

$$\hat\lambda>\eta^{-1}\check\mu, \qquad (4.5.48a)$$

$\gamma\leqslant(\hat\lambda-\eta^{-1}\check\mu)/\phi$ 是以下方程的唯一正解：

$$\eta^{-1}\check\mu\rho^\gamma+\gamma\phi=\hat\lambda. \qquad (\rho,\phi\text{ 依(4.1.4)}) \qquad (4.5.49a)$$

（ii）条件(4.5.47b)满足，M 依式(4.5.11)′，η_0，π_0 依(4.1.46)，

$$\check\lambda+\tau M<\tau^{-1}\wedge(\eta_0^{-1}\hat\mu),\quad \eta_0^{-1}\hat\mu\leqslant\|\check Q\|^{p/2}, \qquad (4.5.48b)$$

γ 是以下方程的唯一正解：

$$\|\check Q\|^{p/2}(1-\rho^\gamma)-\gamma\phi-\tau M\rho^\gamma+\tau^{-1}\wedge(\eta_0^{-1}\hat\mu\pi_0^\gamma)=\check\lambda. \qquad (4.5.49b)$$

若 $\psi'(t)>0$，则在以下两种情况下方程(4.5.3)的解 p 阶矩 ψ^γ 有界：

（iii）条件(4.5.47a)满足，且

$$\hat\lambda+\gamma\phi\geqslant\eta^{-1}\check\mu\rho_0^\gamma. \qquad (\phi\text{ 依(4.2.4)},\rho_0\text{ 依(4.2.44)}) \qquad (4.5.50a)$$

（iv）条件(4.5.47b)满足，π，ϕ 依(4.2.4)，η_0，ρ_0 依(4.2.44)，$q_i=\lambda_{\min}(Q_i)$，

$$\check\lambda-\gamma\phi+\tau M<\tau^{-1}\wedge[\eta_0^{-1}\hat\mu\pi^\gamma+\hat q^{p/2}(1-\rho_0^\gamma)]. \qquad (4.5.50b)$$

若 $\zeta_i(t)\in L^1(\mathbf{R}_+)$，$\hat\lambda\geqslant\eta^{-1}\check\mu$（对情况(iii)）或 $\check\lambda+\tau M<\tau^{-1}\wedge(\eta_0^{-1}\hat\mu)$（对情况(iv)），则方程(4.5.3)的解 p 阶矩有界.

证　大体上沿用证明定理4.1.22，定理4.2.24及定理4.5.4的思路，不妨写得简略些，且不妨只证情况(ii)与(iv). 取定方程(4.5.3)的一个解 $x(t)=x(t,\xi)$，只要证 $h(t)$（依(4.1.7)）有界. 设 V 依式(4.5.12)，则如同定理4.1.22或定

理4.5.4之证有

$$h(t) \leqslant \text{const} + I_1 + I_2 + I_3,$$

下面依情况分别描述与估计 $I_1 \sim I_3$. 对于情况(ii)有

$$I_1 = -\gamma \mathrm{E}\int_0^t \psi^{-\gamma}(s)\psi_1(s) \mid x(s) \mid^p \mathrm{d}s \leqslant \gamma\phi\int_0^t h(s)\mathrm{d}s,$$

$$I_2 = \mathrm{E}\int_0^t \mathrm{d}\psi^{-\gamma}(s)\int_{s-\delta(s)}^{s} [x^{\mathrm{T}}(\theta)Q_r x(\theta)]^{p/2}\mathrm{d}\theta$$

$$\leqslant \text{const} + \| \check{Q} \|^{p/2}(\rho^\gamma - 1)\int_0^t h(s)\mathrm{d}s;$$

$$I_3 = \mathrm{E}\int_0^t \psi^{-\gamma}(s) LV(s,x(s),r(s))\mathrm{d}s$$

$$\leqslant \mathrm{E}\int_0^t \psi^{-\gamma}(s)\Big[\zeta_r(s) + \lambda_r \mid x(s) \mid^p - \mu_r \mid y(s) \mid^p$$

$$+ M\int_{s-\delta(s)}^{s} \mid x(\theta) \mid^p \mathrm{d}\theta\Big]\mathrm{d}s$$

$$\leqslant \text{const} + (\check{\lambda} + \tau M\rho^\gamma)\int_0^t h(s)\mathrm{d}s - \eta_0^{-1}\hat{\mu}\pi_0^\gamma\int_0^{t-\tau} h(s)\mathrm{d}s,$$

估计 I_3 时用到条件(4.5.47b)与式(4.5.13). 由条件 $\eta_0^{-1}\hat{\mu} \leqslant \| \check{Q} \|^{p/2}$ 及 $\pi_0 \leqslant \rho$ 推出式(4.5.49b)左端对 γ 严格单调减,因而不妨以 > 代替其中的等号(否则稍缩小 γ,然后用一极限程序),从而可在其两端之间插入一非负数 ω. 于是综合对 $I_1 \sim I_3$ 的估计得

$$h(t) \leqslant \text{const} + \omega\int_{t-\tau}^{t} h(s)\mathrm{d}s \leqslant \text{const} + \omega\tau H(t),$$

然后由 $\omega\tau < 1$ 得 $H(t) \leqslant$ const.

对于情况(iv)有

$$I_1 \leqslant -\gamma\phi\int_0^t h(s)\mathrm{d}s,$$

$$I_2 \leqslant -\hat{q}^{p/2}(1 - \rho_0^\gamma)\int_0^{t-\tau} h(s)\mathrm{d}s,$$

$$I_3 \leqslant \text{const} + (\tau M + \check{\lambda})\int_0^t h(s)\mathrm{d}s - \eta_0^{-1}\hat{\mu}\pi^\gamma\int_0^{t-\tau} h(s)\mathrm{d}s.$$

综合 $I_1 \sim I_3$ 并在式(4.5.50b)的两端之间插入一个非负数 ω 得

$$h(t) \leqslant \text{const} + \omega\tau H(t).$$

由此有 $h(t) \leqslant$ const. □

定理4.5.17涵盖了许多特殊结果. 首先取 $Q_i \equiv Q, \lambda_i \equiv \lambda, \mu_i \equiv \mu$, 将定理4.5.17用于方程(4.1.44)(但取 $U(y) \equiv 0$),恰得出定理4.1.22与定理4.2.24. 其次,若取 $p = 2$,则得到更便于应用的结果,其具体表述是自明的,无需写出. 此外还可指出,如同在4.2.3节中所作的,只要仔细地估计定理证明中的 const,就能得出方程

的适当矩估计. 例如在定理 4.5.17 的情况(iii)之下,设 $p=2,\eta^{-1}\check{\mu}\leqslant\hat{\lambda},\zeta_i(t)\in L^1(\mathbf{R}_+)$, 则对方程(4.5.3)的解 $x(t,\xi)$ 有估计:

$$\mathrm{E}|x(t,\xi)|^2\leqslant\|\xi\|_0^2(1+\tau\eta^{-1}\check{\mu})+\max_i\|\zeta_i\|_1,\quad t\geqslant 0.\qquad(4.5.51)$$

如同在 4.1.3 节与 4.2.3 节中一样,对于定理 4.5.17 的应用,如何选择 Q_i 是一关键问题. 试探讨选取 $Q_i=q_iI$ 的情形,这相当于使用如下的 Liapunov 函数(只考虑 $p=2$):

$$V(t,x,i)=|x|^2+q_i\int_{t-\delta(t)}^t|x(s)|^2\mathrm{d}s.\qquad(4.5.52)$$

从式(4.5.9)看出,使用如上的函数 V 导致处理和式 $\sum_s\gamma_{is}q_s$. 这就自然想到采用业已熟知的方法:选择 $a_i>0$,使 $A\triangleq\mathrm{diag}(a_i)-\Gamma$ 为 M 矩阵,令 $(q_i)=A^{-1}e$,则 $\sum_s\gamma_{is}q_s=a_iq_i-1$. 于是在条件(4.5.47b)(取 $p=2$) 及 $\psi'(t)<0$ 之下有

$$\begin{aligned}h(t)&\leqslant\mathrm{const}+\mathrm{E}\int_0^t\psi^{-\gamma}(s)[LV(s,x(s),r(s))+\gamma\phi V(s,x(s),r(s))]\mathrm{d}s\\&\leqslant\mathrm{const}+\mathrm{E}\int_0^t\psi^{-\gamma}(s)\Big[\zeta_r(s)+\lambda_r|x(s)|^2-\mu_r|y(s)|^2\\&\quad+(a_rq_r-1)\int_{s-\delta(s)}^s|x(\theta)|^2\mathrm{d}\theta+\gamma\phi|x(s)|^2+\gamma\phi q_r\int_{s-\delta(s)}^s|x(\theta)|^2\mathrm{d}\theta\Big]\mathrm{d}s\\&\leqslant\mathrm{const}+(\check{\lambda}+\gamma\phi)\int_0^t h(s)\mathrm{d}s-\eta_0^{-1}\hat{\mu}\pi_0^\gamma\int_0^{t-\tau}h(s)\mathrm{d}s\\&\quad+\max_i(a_iq_i-1+\gamma\phi q_i)^+\tau\rho^\gamma\int_0^t h(s)\mathrm{d}s.\end{aligned}$$

对于其他情况亦可作类似估计. 这就得到与定理 4.5.17 相对应的以下结果:

定理 4.5.18 设存在常数 $\lambda_i\in\mathbf{R},\mu_i\geqslant 0,a_i>0,\gamma>0$(若 $\psi'<0$) 或 $\gamma\geqslant 0$(若 $\psi'>0$) 与可测函数 $\zeta_i(t)$,使得 $\zeta_i(t)\psi^{-\gamma}(t)\in L^1(\mathbf{R}_+)$,$A\triangleq\mathrm{diag}(a_i)-\Gamma$ 为 M 矩阵, $(q_i)=A^{-1}e$, 且以下条件满足:

$$\begin{aligned}\Phi_i&\triangleq 2x^{\mathrm{T}}F(t,x,y,i)+|G(t,x,y,i)|^2\\&\leqslant\zeta_i(t)-\lambda_i|x|^2+\mu_i|y|^2\end{aligned}\qquad(4.5.53\mathrm{a})$$

或

$$\Phi_i+q_i|x|^2-\eta q_i|y|^2\leqslant\zeta_i(t)+\lambda_i|x|^2-\mu_i|y|^2,\qquad(4.5.53\mathrm{b})$$

其中 $t\geqslant 0,x,y\in\mathbf{R}^d$. 若 $\psi'(t)<0,\rho,\phi$ 依(4.1.4),η,η_0,π_0 依(4.1.46),

$$N=\max_i(a_iq_i+\gamma\phi q_i-1)^+,\quad N_0=\max_i(a_iq_i-1)^+,\qquad(4.5.54)$$

则在以下两种情况下方程(4.5.3)的零解(若其存在)均方 ψ^γ 稳定:

(i) 条件(4.5.53a)满足,且

$$\hat{\lambda}>\eta^{-1}\check{\mu},\qquad(4.5.55\mathrm{a})$$

$\gamma \in (0,(\hat{\lambda} - \eta^{-1}\check{\mu})/\phi]$ 是以下方程的唯一正解：

$$\eta^{-1}\check{\mu}\rho^{\gamma} + \gamma\phi = \hat{\lambda}. \tag{4.5.56a}$$

(ii) 条件(4.5.53b)满足，且

$$\check{\lambda} + \tau N_0 < \tau^{-1} \wedge (\eta_0^{-1}\hat{\mu}), \tag{4.5.55b}$$

γ 是以下方程的最大正解：

$$\check{\lambda} + \gamma\phi + N\tau\rho^{\gamma} = \tau^{-1} \wedge (\eta_0^{-1}\hat{\mu}\pi_0^{\gamma}). \tag{4.5.56b}$$

若 $\psi'(t) > 0,\phi,\ \pi$ 依(4.2.4)，η,η_0,ρ_0 依(4.2.44)，

$$N = \max_i(a_i q_i - \gamma\phi q_i - 1)^+, \quad N_0 = \max_i(a_i q_i - 1)^+, \tag{4.5.57}$$

则在以下两种情况下方程(4.5.3)的解均方 ψ^{γ} 有界：

(iii) 条件(4.5.53a)满足，且

$$\hat{\lambda} + \gamma\phi \geqslant \eta^{-1}\check{\mu}\rho_0^{\gamma}. \tag{4.5.58a}$$

(iv) 条件(4.5.53b)满足，且

$$\check{\lambda} + \tau N - \gamma\phi < \tau^{-1} \wedge (\eta_0^{-1}\hat{\mu}\pi^{\gamma}). \tag{4.5.58b}$$

若 $\zeta_i(t) \in L^1(\mathbf{R}_+)$，$\hat{\lambda} \geqslant \eta^{-1}\check{\mu}$（对情况(iii)）或 $\check{\lambda} + \tau N_0 < \tau^{-1} \wedge (\eta_0^{-1}\hat{\mu})$（对情况(iv)），则方程(4.5.3)的解均方有界；当 $\hat{\lambda} \geqslant \eta^{-1}\check{\mu}$ 时有

$$\mathrm{E}|x(t,\xi)|^2 \leqslant \|\xi\|_0^2[1 + \tau(\check{q} + \eta^{-1}\check{\mu})] + \max_i\|\zeta\|_1, \quad t \geqslant 0. \tag{4.5.59}$$

为将定理4.5.17 用于方程(4.5.45)，依照4.1.3 节与4.2.3 节中的方法，设

$$|G(t,x,y,i)|^2 \leqslant \zeta_i(t) + \mu_i|x|^2 + \nu_i|y|^2, \quad t \geqslant 0, x,y \in \mathbf{R}^d. \tag{4.5.60}$$

令 $\sigma_i = \lambda_{\min}(A_i + A_i^{\mathrm{T}}),Q_i = q_i I$，

$$q_i = (1+\eta)^{-1}\sigma_i, \quad \lambda_i = \eta\, q_i - \|B_i\|, \quad i \in S \tag{4.5.61}$$

（参考(4.1.61)）. 然后分别以 $\mu_i - \lambda_i$ 与 $\lambda_i - \nu_i$ 取代 λ_i 与 μ_i，应用定理4.5.17（取 $p = 2$）得到（对照推论4.1.26 与定理4.2.27）：

定理 4.5.19 设 $\sigma_i = \lambda_{\min}(A_i + A_i^{\mathrm{T}}) \geqslant 0, q_i, \lambda_i (i \in S)$ 依式(4.5.61)；存在常数 $\mu_i,\nu_i \in \mathbf{R},\gamma > 0$（若 $\psi' < 0$）或 $\gamma \geqslant 0$（若 $\psi' > 0$）与可测函数 $\zeta_i(t)$，使得 $\zeta_i(t)\psi^{-\gamma}(t) \in L^1(\mathbf{R}_+)$，且条件(4.5.60)满足；$M = \max_i \sum_s \gamma_{is} q_s$. 若 $\psi'(t) < 0$，ρ,ϕ 依(4.1.4)，η_0,π_0 依(4.1.46)，则以下每组条件推出方程(4.5.45)的零解（若其存在）均方 ψ^{γ} 稳定：

$$\begin{cases} \lambda > \eta^{-1}\mu, \quad \eta^{-1}\mu\rho^{\gamma} + \gamma\phi = \lambda, \\ \lambda = \min_i(\sigma_i - \|B_i\| - \mu_i), \quad \mu = \max_i(\nu_i + \|B_i\|)^+, \end{cases} \tag{4.5.62a}$$

$$\begin{cases} \lambda + \tau M < \tau^{-1} \wedge (\eta_0^{-1}\mu), \quad \eta_0^{-1}\mu \leqslant \check{q}, \\ \lambda + \gamma\phi + \tau M\rho^{\gamma} + \check{q}(\rho^{\gamma} - 1) = \tau^{-1} \wedge (\eta_0^{-1}\mu\, \pi_0^{\gamma}), \\ \lambda = \max_i(\mu_i - \lambda_i), \quad 0 \leqslant \mu = \min_i(\lambda_i - \nu_i). \end{cases} \tag{4.5.62b}$$

若 $\psi'(t) > 0, \pi, \phi$ 依(4.2.4)，η, η_0, ρ_0 依(4.2.44)，则以下每组条件推出方程(4.5.45)的解均方 ψ^γ 有界：

$$\begin{cases}\lambda + \gamma\phi \geqslant \eta^{-1}\mu\rho_0^\gamma, \\ \lambda = \min\limits_i(\sigma_i - \| B_i \| - \mu_i), \quad \mu = \max\limits_i(\nu_i + \| B_i \|)^+,\end{cases} \tag{4.5.63a}$$

$$\begin{cases}\lambda + \tau M - \gamma\phi < \tau^{-1} \wedge [\eta_0^{-1}\mu\pi^\gamma + \hat{q}(1 - \rho_0^\gamma)], \\ \lambda = \max\limits_i(\mu_i - \lambda_i), \quad 0 \leqslant \mu = \min\limits_i(\lambda_i - \nu_i).\end{cases} \tag{4.5.63b}$$

若 $\zeta_i(t) \in L^1(\mathbf{R}_+)$，$\lambda \geqslant \eta^{-1}\mu$，$\lambda, \mu$ 依式(4.5.63a)，则成立(对照(4.5.51))

$$\mathrm{E} | x(t,\xi) |^2 \leqslant \| \xi \|_0^2(1 + \eta^{-1}\mu\tau) + \max_i \| \zeta_i \|_1, \quad t \geqslant 0. \tag{4.5.64}$$

对于无界性问题，亦可建立类似于定理 4.5.17 ~ 定理 4.5.19 的结果. 为简略起见，下面仅考虑一个类似于定理 4.5.18 的结果.

定理 4.5.20 设存在常数 $\lambda_i \in \mathbf{R}, \mu_i, \gamma \geqslant 0$ 与可测函数 $\zeta_i(t)$，使得 $\zeta_i(t)\psi^{-\gamma}(t) \in L^1(\mathbf{R}_+)$，且以下条件满足：

$$2x^{\mathrm{T}}F(t,x,y,i) + | G(t,x,y,i) |^2 \geqslant \lambda_i | x |^2 - \mu_i | y |^2 - \zeta_i(t), \tag{4.5.65}$$

其中 $t \geqslant 0, x, y \in \mathbf{R}^d$. 设 $\alpha \in [0, 1/\tau)$，$\beta \in (\alpha\tau, 1]$，$\xi \in S_\beta$ (依(4.3.6))，$x(t,\xi)$ 记方程(4.5.3)的解. 则在以下两种情况下成立

$$\mathrm{E} | x(t,\xi) |^2 \geqslant \psi^\gamma(t)[\| \xi \|_0^2(\beta - \alpha\tau) - \max_i \| \zeta_i\psi^{-\gamma} \|_1]. \tag{4.5.66}$$

(i) $\psi'(t) > 0, \phi_0$ 依(4.2.4)，ρ_0 依(4.2.44)，

$$\alpha = \eta^{-1}\check{\mu} < 1/\tau, \quad \eta^{-1}\check{\mu}\rho_0^\gamma + \gamma\phi_0 \leqslant \hat{\lambda}. \tag{4.5.67}$$

(ii) $\psi'(t) < 0, \rho, \phi_0$ 依(4.1.4)，

$$\alpha = \eta^{-1}\check{\mu}\psi^{-\gamma}(\tau) < 1/\tau, \quad \eta^{-1}\check{\mu}\rho^\gamma - \gamma\phi_0 \leqslant \hat{\lambda}. \tag{4.5.68}$$

若 $\psi'(t) < 0, \alpha = \eta^{-1}\check{\mu} < 1/\tau, \eta^{-1}\check{\mu} \leqslant \hat{\lambda}, \zeta_i(t) \in L^1(\mathbf{R}_+)$，则式(4.5.66)可加强为

$$\mathrm{E} | x(t,\xi) |^2 \geqslant \| \xi \|_0^2(\beta - \alpha\tau) - \max_i \| \xi_i \|_1. \tag{4.5.69}$$

证 令 $x(t) = x(t,\xi)$，$Z = \max_i \| \zeta_i\psi^{-\gamma} \|_1$，只要证

$$h(t) \triangleq \psi^{-\gamma}(t)\mathrm{E} | x(t) |^2 \geqslant \| \xi \|_0^2(\beta - \alpha\tau) - Z.$$

不妨只考虑情况(i). 估计

$$\begin{aligned} h(t) &= \mathrm{E} | x(0) |^2 + \mathrm{E}\int_0^t L[\psi^{-\gamma}(s) | x(s) |^2]\mathrm{d}s \\ &= \mathrm{E} | \xi(0) |^2 + \mathrm{E}\int_0^t \psi^{-\gamma}(s)[L | x(s) |^2 - \gamma\psi_1(s) | x(s) |^2]\mathrm{d}s \\ &\geqslant \beta \| \xi \|_0^2 + \mathrm{E}\int_0^t \psi^{-\gamma}(s)[(\lambda_r - \gamma\phi_0) | x(s) |^2 - \mu_r | y(s) |^2 - \zeta_r(s)]\mathrm{d}s \end{aligned}$$

$$\geqslant \beta \|\xi\|_0^2 + (\hat{\lambda} - \gamma\phi_0)\int_0^t h(s)\mathrm{d}s - Z$$

$$- \eta^{-1}\check{\mu}\rho_0^\gamma\int_0^t h(s)\mathrm{d}s - \eta^{-1}\check{\mu}\tau\|\xi\|_0^2$$

$$\geqslant \|\xi\|_0^2(\beta - \alpha\tau) - Z,$$

如所要证. □

关于轨道估计,取 $V = |x|^2$ 应用定理4.5.20于方程(4.5.3)得到

定理4.5.21 设 $x(t)$ 是方程(4.5.3)的解, $\forall t \geqslant 0, x(t) \neq 0$, a.s., 存在 $\zeta(t) \in L^1(\mathbf{R}_+)$, 在 $\delta = 1$ 邻近定义的连续函数 $\mu(\delta)$ 及正常数 α_i, 使得 $A \triangleq \mathrm{diag}(\alpha_i) - \Gamma$ 为 M 矩阵, $(q_i) = A^{-1}e$, 且以下条件满足:

$$|x|^{-2}[2x^{\mathrm{T}}F(t,x,y,i) + |G(t,x,y,i)|^2] - 2\delta|x|^{-4}|x^{\mathrm{T}}G(t,x,y,i)|^2$$
$$+ \alpha_i q_i - 1 \leqslant \zeta(t) + \mu(\delta)\psi_1(t), \quad t \geqslant 0, x,y \in \mathbf{R}^d, x \neq 0. \tag{4.5.70}$$

若 $\mu(1) \geqslant 0$(若 $\psi'(t) > 0$)或 $\mu(1) > 0$(若 $\psi'(t) < 0$),则估计式(4.5.43)成立.

今用一个简单例子来解释本小节结果的应用.

例4.5.22 考虑一维线性方程(参照(4.2.62))

$$\mathrm{d}x(t) = [-a_r x(t) + b_r y(t)]\mathrm{d}t + c_r x(t)\mathrm{d}w_1(t) + d_r y(t)\mathrm{d}w_2(t), \tag{4.5.71}$$

其中 a_i, b_i, c_i, d_i 为常数, $y(t) = x(t-\tau)$, $w = (w_1, w_2)^{\mathrm{T}}$ 是二维 Brown 运动. 设有 $\alpha_i > 0$ 使 $A \triangleq \mathrm{diag}(\alpha_i) - \Gamma$ 为 M 矩阵, $(q_i) = A^{-1}e$. 令

$$F(t,x,y,i) = -a_i x + b_i y, \quad G(t,x,y,i) = (c_i x, d_i y),$$

$$I_i = 2xF(t,x,y,i) + |G(t,x,y,i)|^2 + q_i(x^2 - y^2),$$

$$J_i = 2xF(t,x,y,i) + |G(t,x,y,i)|^2.$$

则

$$I_i \leqslant (q_i - 2a_i + |b_i| + c_i^2)x^2 - (q_i - |b_i| - d_i^2)y^2,$$
$$J_i \geqslant (c_i^2 - 2a_i - |b_i|)x^2 - (|b_i| - d_i^2)^+ y^2.$$

于是,在形式上条件(4.5.53b)与(4.5.65)已满足.

(i) 取 $\psi(t) = \mathrm{e}^{-t}$ 应用定理4.5.18(依情况(ii)). 此时有 $\rho = \mathrm{e}^{\tau}, \phi = 1$. 令

$$N = \max_i(\alpha_i q_i + \gamma q_i - 1)^+, \quad N_0 = \max_i(\alpha_i q_i - 1)^+, \tag{4.5.72}$$

$$\lambda = \max_i(q_i - 2a_i + |b_i| + c_i^2), \quad \mu = \min_i(q_i - |b_i| - d_i^2). \tag{4.5.73}$$

若 $\mu \geqslant 0, \lambda + \tau N_0 < \tau^{-1} \wedge \mu$, γ 是以下方程的最大正解:

$$\lambda + \gamma + \tau N \mathrm{e}^{\gamma\tau} = \tau^{-1} \wedge (\mu \mathrm{e}^{\gamma\tau}),$$

则方程(4.5.71)的零解均方指数稳定与 a.s. 指数稳定,且成立

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} t^{-1}\ln \mathrm{E}|x(t,\xi)|^2 \leqslant -\gamma.$$

(ii) 取 $\psi(t) = \mathrm{e}^{t}$ 应用定理4.5.18(依情况(iv)). 此时有 $\rho = \mathrm{e}^{-\tau}, \phi = 1$. 令

$$N = \max_i(\alpha_i q_i - \gamma q_i - 1)^+, \quad N_0 = \max_i(\alpha_i q_i - 1). \qquad (4.5.74)$$

λ,μ 依式(4.5.73), $\mu \geqslant 0$. 若 $\gamma \geqslant 0, \lambda - \gamma + \tau N < \tau^{-1} \wedge \mu e^{\gamma\tau}$, 则方程(4.5.71)的解 $x(t,\xi)$ 满足

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} t^{-1}\ln E|x(t,\xi)|^2 \leqslant \gamma.$$

若 $\lambda + \tau N_0 < \tau^{-1} \wedge \mu$, 则方程(4.5.71)的解均方有界.

(iii) 取 $\psi(t) = e^{-t}$ 应用定理4.5.20(依情况(ii)). 令

$$\lambda = \min_i(c_i^2 - 2a_i - |b_i|), \quad \mu = \max_i(|b_i| - d_i^2)^+.$$

若 $\gamma \geqslant 0$ 满足 $\alpha \triangleq \mu + e^{\gamma\tau} < 1/\tau, \mu e^{\gamma\tau} - \gamma \leqslant \lambda$, 则对任给 $\beta \in (\alpha\tau, 1], \xi \in S_\beta$, 方程(4.5.71)的解 $x(t,\xi)$ 满足

$$E|x(t,\xi)|^2 \geqslant (\beta - \alpha\tau)\|\xi\|_0^2 e^{-\gamma t}.$$

若 $\mu < 1/\tau, \mu \leqslant \lambda$, 则

$$E|x(t,\xi)|^2 \geqslant (\beta - \mu\tau)\|\xi\|_0^2.$$

(iv) 取 $\psi(t) = e^{-t}$ 应用定理4.5.21. 以 K_i 记式(4.5.70)之左端, 则

$$\begin{aligned} K_i &= x^{-2}[2x(-a_i x + b_i y) + c_i^2 x^2 + d_i^2 y^2] \\ &\quad - 2\delta x^{-4}(c_i^2 x^4 + d_i^2 x^2 y^2) + \alpha_i q_i - 1 \\ &= -2a_i - (2\delta - 1)(c_i^2 + d_i^2 x^{-2} y^2) + \alpha_i q_i - 1 + 2b_i x^{-1} y \\ &\leqslant -2a_i - c_i^2(2\delta - 1) + \alpha_i q_i - 1 + \varepsilon_i |b_i| \\ &\quad - x^{-2} y^2 [d_i^2(2\delta - 1) - \varepsilon_i^{-1}|b_i|], \end{aligned}$$

其中 $\varepsilon_i > 0$. 设 $d_i \neq 0$, 选取 $\varepsilon_i > |b_i| d_i^{-2} \approx \varepsilon_i$. 则当 $\delta \approx 1$ 时

$$\begin{aligned} K_i &\leqslant -2a_i - c_i^2(2\delta - 1) + \alpha_i q_i - 1 + \varepsilon_i |b_i| \\ &\leqslant -\min_i[2a_i + c_i^2(2\delta - 1) - \alpha_i q_i + 1 - \varepsilon_i |b_i|] \triangleq -\mu(\delta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu(1) &= \min_i(2a_i + c_i^2 - \alpha_i q_i + 1 - \varepsilon_i |b_i|, \\ &\approx \min_i(2a_i + c_i^2 - \alpha_i q_i + 1 - b_i^2 d_i^{-2}) \triangleq \gamma. \end{aligned}$$

因此, 若 $\gamma > 0$, 则必 $\mu(1) > 0$, 于是由定理4.5.21推出方程(4.5.71)的非零解满足

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} t^{-1}\ln|x(t)|^2 \leqslant -\mu(1), \text{a.s.}.$$

现在考虑一个类似于(4.1.76)的方程

$$dx(t) = [-A_r x(t) + B_r g_r(y(t))]dt + G(t, x(t), y(t), r(t))dw(t), \qquad (4.5.75)$$

其中 $g_i: \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$. 似乎可沿用定理4.1.30的方法. 不过下面还是换一个思路, 关键的变化是采用如下 Liapunov 函数:

$$V(t,x,i) = |x|^2 + \int_{t-\delta(t)}^{t} g_i^{\mathrm{T}}(x(s))Q_i g_i(x(s))\mathrm{d}s. \tag{4.5.76}$$

定理 4.5.23 设存在半正定矩阵 C_i,D_i,P_i,Q_i，常数 γ,λ_i 与可测函数 $\zeta_i(t)$，使得 $\zeta_i(t)\psi^{-\gamma}(t) \in L^1(\mathbf{R}_+)$，且以下条件满足

$$g_i^{\mathrm{T}}(x)Q_i g_i(x) \leqslant x^{\mathrm{T}}P_i x, \quad x \in \mathbf{R}^d, \tag{4.5.77}$$

$$|G(t,x,y,i)|^2 \leqslant x^{\mathrm{T}}C_i x + y^{\mathrm{T}}D_i y + \lambda_i |g_i(y)|^2 + \zeta_i(t),$$
$$t \geqslant 0, x,y \in \mathbf{R}^d, \tag{4.5.78}$$

$$\lambda_{\max}(H_i) \leqslant -\lambda_i, \quad H_i = \begin{bmatrix} P_i - A_i - A_i^{\mathrm{T}} & B_i \\ B_i^{\mathrm{T}} & -\eta Q_i \end{bmatrix}. \tag{4.5.79}$$

(i) 若 $\psi'(t) < 0,\rho,\phi$ 依(4.1.4)，$\gamma > 0$ 使得

$$M_i \triangleq \rho^{-\gamma}(C_i - \lambda_i I + \gamma\phi I) + \eta^{-1}D_i + \gamma\phi\tau P_i + \sum_{s\neq i}\gamma_{is}\tau P_s \text{ 半负定}, \tag{4.5.80a}$$

则方程(4.5.75)的零解(若其存在)均方 ψ^{γ} 稳定.

(ii) 若 $\psi'(t) > 0,\phi$ 依(4.2.4)，ρ_0 依(4.2.44)，$\gamma \geqslant 0$ 使得

$$N_i \triangleq C_i - \lambda_i I - \gamma\phi I + \eta^{-1}\rho_0^{\gamma}D + \sum_{s\neq i}\gamma_{is}\tau P_s \text{ 半负定}, \tag{4.5.80b}$$

则方程(4.5.75)的解均方 ψ^{γ} 有界；若

$$N_i^0 \triangleq C_i - \lambda_i I + \eta^{-1}D_i + \sum_{s\neq i}\gamma_{is}\tau P_s \text{ 半负定}, \tag{4.5.81}$$

则方程(4.5.75)的解均方有界.

证 (i) 取定方程(4.5.75)的一个解 $x(t) = x(t,\xi)$，如通常一样设定 $h(t)$，设 V 依式(4.5.76)，则

$$\begin{aligned}
h(t) &\leqslant \text{const} + \mathrm{E}\int_0^t \psi^{-\gamma}(t)[LV(s,x(s),r(s)) - \gamma\psi_1(s)V(s,x(s),r(s))]\mathrm{d}s \\
&\leqslant \text{const} + \mathrm{E}\int_0^t \psi^{-\gamma}(s)\Big\{2x^{\mathrm{T}}(s)[-A_r x(s) + B_r g_r(y(s))] \\
&\quad + |G(s,x(s),y(s),r(s))|^2 \\
&\quad + g_r^{\mathrm{T}}(x(s))Q_r g_r(x(s)) - \eta g_r^{\mathrm{T}}(y(s))Q_r g_r(y(s)) \\
&\quad + \sum_i \gamma_{ri}\int_{s-\delta(s)}^{s} g_i^{\mathrm{T}}(x(\theta))Q_i g_i(x(\theta))\mathrm{d}\theta \\
&\quad + \gamma\phi|x(s)|^2 + \gamma\phi\int_{s-\delta(s)}^{s} g_r^{\mathrm{T}}(x(\theta))Q_r g_r(x(\theta))d\theta\Big\}\mathrm{d}s \\
&\leqslant \text{const} + \mathrm{E}\int_0^t \psi^{-\gamma}(s)\Big\{[x^{\mathrm{T}}(s),g_r^{\mathrm{T}}(y(s))]H_r\begin{bmatrix} x(s) \\ g_r(y(s)) \end{bmatrix} \\
&\quad + |G(s,x(s),y(s),r(s))|^2 + \gamma\phi|x(s)|^2\Big\}\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

$$+ \mathrm{E}\int_0^t \psi^{-\gamma}(s)\mathrm{d}s\int_{s-\delta(s)}^s [\gamma\phi x^{\mathrm{T}}(\theta)P_r x(\theta) + \sum_{i\neq r}\gamma_{ri}x^{\mathrm{T}}(\theta)P_i x(\theta)]\mathrm{d}\theta$$

$$\leqslant \mathrm{const} + \mathrm{E}\int_0^t \psi^{-\gamma}(s)[(\gamma\phi - \lambda_r)|x(s)|^2 + x^{\mathrm{T}}(s)C_r x(s) + y^{\mathrm{T}}(s)D_r y(s)]\mathrm{d}s$$

$$+ \mathrm{E}\int_{-\tau}^t x^{\mathrm{T}}(\theta)(\gamma\phi P_r + \sum_{i\neq r}\gamma_{ri}P_i)x(\theta)\mathrm{d}\theta\int_\theta^{\theta+\tau}\psi^{-\gamma}(s)\mathrm{d}s$$

$$\leqslant \mathrm{const} + \mathrm{E}\int_0^t \psi^{-\gamma}(s)x^{\mathrm{T}}(s)(\gamma\phi I - \lambda_r I + C_r + \eta^{-1}\rho^{\gamma}D_r)x(s)\mathrm{d}s$$

$$+ \tau\rho^{\gamma}\mathrm{E}\int_0^t \psi^{-\gamma}(\theta)x^{\mathrm{T}}(\theta)(\gamma\phi P_r + \sum_{i\neq r}\gamma_{ri}P_i)x(\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$= \mathrm{const} + \rho^{\gamma}\mathrm{E}\int_0^t \psi^{-\gamma}(s)x^{\mathrm{T}}(s)M_r x(s)\mathrm{d}s \leqslant \mathrm{const},$$

最后一步用了条件(4.5.80a). 故如所要证.

(ii) 仍依上段的路线估计 $h(t)$，仅有少量改动：

$$h(t) \leqslant \mathrm{const} + \mathrm{E}\int_0^t \psi^{-\gamma}(t)\Big[(-\lambda_r - \gamma\phi)|x(s)|^2 + x^{\mathrm{T}}(s)C_r x(s) + y^{\mathrm{T}}(s)D_r y(s)$$

$$+ \sum_{i\neq r}\gamma_{ri}\int_{s-\delta(s)}^s x^{\mathrm{T}}(\theta)P_i x(\theta)\mathrm{d}\theta\Big]\mathrm{d}s$$

$$\leqslant \mathrm{const} + \mathrm{E}\int_0^t \psi^{-\gamma}(s)x^{\mathrm{T}}(s)N_r x(s)\mathrm{d}s \leqslant \mathrm{const},$$

故同样得出所要结论. □

当 $\gamma = 0$ 时记 M_i 为 M_i^0，则当

$$M_i^0 = C_i - \lambda_i I + \eta^{-1}D_i + \sum_{s\neq i}\gamma_{is}\tau P_s \text{ 负定} \tag{4.5.82}$$

时，条件(4.5.80a)必对充分小的 $\gamma > 0$ 满足. 注意 $M_i^0 = N_i^0$，因而条件(4.5.82)是(4.5.81)的一个加强. 若取 $\psi(t) = \mathrm{e}^{-t}$，则从定理4.5.23 与定理4.5.13 及以上说明得到

推论 4.5.24　设存在半正定矩阵 C_i, D_i, P_i，正定矩阵 Q_i，常数 $\alpha > 0, \lambda_i \in \mathbf{R}$ 与可测函数 $\zeta_i(t)$，使得 $\zeta_i(t)\mathrm{e}^{\alpha t} \in L^1(\mathbf{R}_+)$，且条件(4.5.77)～(4.5.79)与(4.5.82)满足，则方程(4.5.75)的零解(若其存在)均方指数稳定与 a. s. 指数稳定.

§4.6　正解及其渐近性质

在本章前面几节中，我们考虑了 SFDE 整体解的存在性及其渐近性质，包括稳定性、有界性与渐近估计. 在一般条件下，这些问题纵然还有发挥余地，但已不容易深入. 不过若限于考虑正整体解，则有新的思路与机会.

对于一些有明显实际背景的随机微分模型，考虑其正解是非常自然的，尤其是对于描述一定生物量或经济量的随机微分模型，正解几乎是其唯一考察对象. 因此，在随机微分方程理论中正解问题不能不受到特别关注. 关于正解可形成更丰富的理论. 其理由首先在于，被限制在正象限 $\mathbf{R}_+^d$ 中运行的正解，必然受到更强的约束，因而应当具有较好的渐近性质；另一方面，联系于正锥 $\mathbf{R}_+^d$ 已有一系列成熟的数学工具(例如非负矩阵理论)，它们在正解的研究中可发挥重要作用.

本节中，$\mathbf{R}_{++}^d$ 总记 $\mathbf{R}_+^d$ 之内部；约定 $C_{++} = C([-\tau,0],\mathbf{R}_{++}^d)$. 对于向量与矩阵使用由(4.5.14)所定义的序. 未加说明时，i,x,φ 的变域总假定为：$1 \leqslant i \leqslant d, x \in \mathbf{R}_{++}^d, \varphi \in C_{++}$. 本节中 $w(t)(t \geqslant 0)$ 是给定的一维 Brown 运动.

本节考虑如下 SFDE：

$$dx(t) = f(x(t),x_t)dt + g(x(t),x_t)dw(t), \tag{4.6.1}$$

其中 f 与 g 均为 $\mathbf{R}_{++}^d \times C_{++}$ 上的 $\mathbf{R}^d$ 值函数. 若分别令 $g(x,\varphi) \equiv g(x)$ 与 $f(x,\varphi) \equiv f(x)$，则得到方程(4.6.1)的如下特例：

$$dx(t) = f(x(t),x_t)dt + g(x(t))dw(t), \tag{4.6.2}$$

$$dx(t) = f(x(t))dt + g(x(t),x_t)dw(t). \tag{4.6.3}$$

我们将尽可能以互相对照的方式平行地考察方程(4.6.2)与(4.6.3)，尽管二者并不完全对等. 若置 $\tau = 0$，则方程(4.6.1) ~ (4.6.3)均退化为无时滞的 SDE：

$$dx(t) = f(x(t))dt + g(x(t))dw(t). \tag{4.6.4}$$

总假定方程(4.6.1) ~ (4.6.4)中的函数 f 与 g 均满足局部 Lipschitz 条件. 任给 $V(x) \in C^2(\mathbf{R}_{++}^d)$，本节以稍不同于(3.2.3)的方式定义算子 $\mathscr{L}V$：

$$\mathscr{L}V(x,\varphi) = V_x(x)f(x,\varphi) + (1/2)g^{\mathrm{T}}(x,\varphi)V_{xx}(x)g(x,\varphi), \tag{4.6.5}$$

其中 $x \in \mathbf{R}_{++}^d, \varphi \in C_{++}$. 若 $x(t)$ 是方程(4.6.1)的正解，则 $LV(x(t)) = \mathscr{L}V(x(t),x_t)$，这一事实证实了定义式(4.6.5)的合理性.

下面依次考虑方程(4.6.1)正整体解的存在性、矩有界性与渐近轨道估计，然后将所有结果转移至与(4.6.1)相对应的 SDDE.

4.6.1 存在定理

若方程(4.6.1)的解 $x(t)$ 定义于 $[-\tau,\infty)$ 上，且 $x(t) \gg 0$, a. s. $(\forall t \geqslant -\tau)$，则称 $x(t)$ 为**正整体解**. 论证正整体解的存在性依赖于如下特别构成的函数：

$$V(x) = \sum_i c_i u(x_i), \quad u(t) = t^p - p\ln t, \qquad x \in \mathbf{R}_{++}^d, \tag{4.6.6}$$

其中 c_i, p 是适当的正参数. 用微分法易得

$$\min_{t>0} u(t) = u(1) = 1, \quad u(0^+) = \infty = u(\infty). \tag{4.6.7}$$

下面首先建立一个有点一般化的引理，然后将其条件具体化，以便直接应用. 这一标准思路将为以下几小节所沿用.

引理4.6.1　设 $V(x)$ 依式(4.6.6). 若存在正常数 K,K_j,α_j 与 $[-\tau,0]$ 上的概率测度 $\mu_j(1\leqslant j\leqslant m)$，使得

$$\mathscr{L}V(x,\varphi)\leqslant K+\sum_j K_j\left[\int_{-\tau}^0|\varphi(\theta)|^{\alpha_j}\mathrm{d}\mu_j-|x|^{\alpha_j}\right],\quad x\in\mathbf{R}_{++}^d,\varphi\in C_{++}. \tag{4.6.8}$$

则对任给 $\xi\in C_{++}$，方程(4.6.1)存在唯一正整体解 $x(t,\xi)$.

注　本节中总限定初值 $\xi\in C_{++}$. 这只是为了简便;扩充到 ξ 为有界 C_{++} 值随机变量的情况,问题并无实质改变.

证　取定 $\xi\in C_{++}$，方程(4.6.1)必有唯一极大局部解 $x(t)=x(t,\xi)(-\tau\leqslant t<\sigma)$，使得 $x(t)\gg 0$, a.s. ($\forall t\in[-\tau,\sigma)$). 以 I_k 记区间 $[k^{-1},k]$ 的 d 重积,定义停时

$$\sigma_k=\sigma\wedge\inf\{t\in[-\tau,\sigma):x(t)\overline{\in}I_k\},\quad k\in\mathbf{N}.$$

显然 σ_k 对 k 单调增,因此 $\sigma_k\to\sigma_\infty\leqslant\sigma(k\to\infty)$. 只要证 $\sigma_\infty=\infty$, a.s.; 为此又只要证 $P(\sigma_k\leqslant t)\to 0(k\to\infty,t>0)$.

取定 $t>0$，今证 $P(\sigma_k\leqslant t)\to 0(k\to\infty)$. 首先注意,若 $\sigma_k<\infty$，则由连续性有 $x(\sigma_k)\in\partial I_k$，因而

$$V(x(\sigma_k))\geqslant\hat{c}[u(k^{-1})\wedge u(k)]\triangleq U(k).$$

由性质(4.6.7)显然有 $U(k)\to\infty(k\to\infty)$. 于是

$$\begin{aligned}
&P(\sigma_k\leqslant t)U(k)\\
&\leqslant P(\sigma_k\leqslant t)V(x(\sigma_k))\leqslant \mathrm{E}V(x(t\wedge\sigma_k))\\
&=\mathrm{E}V(x(0))+\mathrm{E}\int_0^{t\wedge\sigma_k}LV(x(s))\mathrm{d}s\\
&\leqslant V(\xi(0))+\mathrm{E}\int_0^{t\wedge\sigma_k}\left\{K+\sum_j\left[\int_{-\tau}^0|x(s+\theta)|^{\alpha_j}\mathrm{d}\mu_j(\theta)-|x(s)|^{\alpha_j}\right]\right\}\mathrm{d}s\\
&\leqslant V(\xi(0))+Kt\\
&\quad+\sum_j K_j\mathrm{E}\left[\int_{-\tau}^0\mathrm{d}\mu_j(\theta)\int_\theta^{t\wedge\sigma_k}|x(s)|^{\alpha_j}\mathrm{d}s-\int_0^{t\wedge\sigma_k}|x(s)|^{\alpha_j}\mathrm{d}s\right]\\
&\leqslant V(\xi(0))+Kt+\sum_j K_j\int_{-\tau}^0|\xi(\theta)|^{\alpha_j}\mathrm{d}\theta\triangleq K_t,
\end{aligned}$$

其中用了条件(4.6.8)，K_t 是与 k 无关的正实数. 由以上不等式立得

$$P(\sigma_k\leqslant t)\leqslant K_t/U(k)\to 0,\quad k\to\infty.$$

如所要证. □

在应用引理4.6.1时我们采用如下策略:建立不等式

$$\mathscr{L}V(x,\varphi)\leqslant\sum_j\mathrm{const}\left[\int_{-\tau}^0|\varphi(\theta)|^{\alpha_j}\mathrm{d}\mu_j-|x|^{\alpha_j}\right]+I, \tag{4.6.9}$$

$$I=I(x)\leqslant -b|x|^\alpha+h(x), \tag{4.6.10}$$

其中 $b,\alpha>0,h(x)\in C(\mathbf{R}_+^d)$，当 $|x|\to\infty$ 时 $h(x)=o(|x|^\alpha)$；其中的 $|x|^\alpha$ 显然可代以 $V_\alpha(x)$（依(1.3.50)）. 本节中 const 总表示某个正常数. 由不等式(4.6.10)显然可推出 $I\leqslant$ const（这意味着 $I(x)$ 上有界），因此结合(4.6.9)与(4.6.10)推出条件(4.6.8)满足，从而可用引理4.6.1. 为简便起见，下面将不等式(4.6.10)缩写成

$$I\leqslant -b|x|^\alpha+o(|x|^\alpha),$$

但 $h(x)\in C(\mathbf{R}_+^d)$ 这一条件是重要的，只是约定它已隐含在记号 $o(|x|^\alpha)$ 中了. 本节使用 $o(|x|^\alpha)$ 这一记号时，总是相对于 $|x|\to\infty$ 的. 以上解释，下面一概认可而不再重复.

对表为式(4.6.6)的 $V(x)$ 求导得

$$V_x=(c_ip(x_i^p-1)x_i^{-1}),$$
$$V_{xx}=\operatorname{diag}(c_ip(p-1)x_i^{p-2}+c_ipx_i^{-2}).$$

代入式(4.6.5)得

$$\begin{aligned}\mathscr{L}V(x,\varphi)&=p\sum_i c_ix_i^{p-1}f_i(x,\varphi)+\frac{p(p-1)}{2}\sum_i c_ix_i^{p-2}g_i^2(x,\varphi)\\&\quad+\frac{p}{2}\sum_i c_i[-2x_i^{-1}f_i(x,\varphi)+x_i^{-2}g_i^2(x,\varphi)]\\&\triangleq I_1+I_2+I_3,\quad x\in\mathbf{R}_{++}^d,\varphi\in C_{++}.\end{aligned}\tag{4.6.11}$$

为估计 $I_1\sim I_3$，下面给出两组备择条件，其中一些条件后面还要用到（总设 $1\leqslant i\leqslant d,x\in\mathbf{R}_{++}^d,\varphi\in C_{++}$，本节中皆如此，不逐一注明）：

（H_1）存在常数 $\alpha>0,\kappa,\bar\kappa\in\mathbf{R}_+^d$ 与 $[-\tau,0]$ 上的概率测度 μ_i，使得

$$x_i^{-1}|f_i(x,\varphi)|\leqslant\kappa_i|x|^\alpha+\bar\kappa_i\int_{-\tau}^0|\varphi(\theta)|^\alpha\mathrm{d}\mu_i+o(|x|^\alpha).$$

（H_2）存在常数 $\beta>0,\lambda,\bar\lambda\in\mathbf{R}_+^d$ 与 $[-\tau,0]$ 上的概率测度 ν_i，使得

$$x_i^{-1}|g_i(x,\varphi)|\leqslant\lambda_i|x|^\beta+\bar\lambda_i\int_{-\tau}^0|\varphi(\theta)|^\beta\mathrm{d}\nu_i+o(|x|^\beta).$$

（H_3）存在常数 $\beta,b_i>0,\sigma\in\mathbf{R}_+^d$ 与 $[-\tau,0]$ 上的概率测度 $\bar\nu_i$，使得

$$x_i^{-2}g_i^2(x,\varphi)\geqslant b_ix_i^{2\beta}-\sigma_i\int_{-\tau}^0|\varphi(\theta)|^{2\beta}\mathrm{d}\bar\nu_i+o(|x|^{2\beta}).$$

（H_4）存在常数 $\alpha,b,p>0,\sigma\geqslant0,c\in\mathbf{R}_{++}^d$ 与 $[-\tau,0]$ 上的概率测度 $\bar\mu$，使得

$$\sum_i c_ix_i^{p-1}f_i(x,\varphi)\leqslant -b|x|^{\alpha+p}+\sigma\int_{-\tau}^0|\varphi(\theta)|^{\alpha+p}\mathrm{d}\bar\mu+o(|x|^{\alpha+p}).$$

（F_1）存在常数 $\alpha>0,\kappa,\bar\kappa\geqslant0$ 与 $[-\tau,0]$ 上的概率测度 μ，使得

$$x_i^{-1}|f_i(x,\varphi)|\leqslant\kappa|x|^\alpha+\bar\kappa\int_{-\tau}^0|\varphi(\theta)|^\alpha\mathrm{d}\mu+o(|x|^\alpha).$$

（F_2）存在常数 $\beta>0,\lambda,\bar\lambda\geqslant0$ 与 $[-\tau,0]$ 上的概率测度 ν，使得

$$x_i^{-1}|g_i(x,\varphi)|\leqslant\lambda|x|^\beta+\bar\lambda\int_{-\tau}^0|\varphi(\theta)|^\beta\mathrm{d}\nu+o(|x|^\beta).$$

(F_3) 存在常数 $b,\beta > 0,\sigma \geqslant 0,c \in \mathbf{R}^d_{++}$ 与 $[-\tau,0]$ 上的概率测度 $\bar{\nu}$, 使得

$$|x|^{-2}[c^{\mathrm{T}}g(x,\varphi)]^2 \geqslant b|x|^{2\beta} - \sigma\int_{-\tau}^{0}|\varphi(\theta)|^{2\beta}\mathrm{d}\bar{\nu} + o(|x|^{2\beta}).$$

(F_4) 存在常数 $\alpha,b > 0,\sigma \geqslant 0,c \in \mathbf{R}^d_{++}$ 与 $[-\tau,0]$ 上的概率测度 $\bar{\mu}$, 使得

$$|x|^{-1}c^{\mathrm{T}}f(x,\varphi) \leqslant -b|x|^{\alpha} + \sigma\int_{-\tau}^{0}|\varphi(\theta)|^{\alpha}\mathrm{d}\bar{\mu} + o(|x|^{\alpha}).$$

对以上条件需要作一些说明:

(i) 条件(H_1)中的项 $o(|x|^{\alpha})$ 应理解为某个 $h(x) \in C(\mathbf{R}^d_{+}),h(x) = o(|x|^{\alpha})$. 对其他条件亦作类似理解.

(ii) 若某个字母(如 α)出现在同时用到的多个条件中,则应认定表示同一参数.

(iii) 直接看出(F_1)$\Rightarrow$(H_1),(F_2)$\Rightarrow$(H_2);当 $b > \sigma$ 时(F_4)$\Rightarrow$(H_4)(取 $p = 1$).

(iv) 若以 $f(x)$ 取代 $f(x,\varphi)$,则条件(H_1)简化为(H_1'):存在 $\alpha > 0$ 与 $\kappa \in \mathbf{R}^d_{+}$, 使得

$$x_i^{-1}|f_i(x)| \leqslant \kappa_i|x|^{\alpha} + o(|x|^{\alpha}).$$

条件(H_i')与(F_i')($1 \leqslant i \leqslant 4$)均作类似理解,不一一写出.

作了以上准备之后,现在来建立本小节的主要结果.

定理 4.6.2　设条件(H_1)~(H_3)及以下两条件之一满足(对某个 $c \in \mathbf{R}^d_{++}$):

$$\alpha < 2\beta,\quad \min b_ic_i > |c||\sigma|d^{(\beta-1)\vee 0}, \tag{4.6.12a}$$

$$\alpha = 2\beta,\quad \min b_ic_i > |c||2\kappa + 2\bar{\kappa} + \sigma|d^{(\beta-1)\vee 0}, \tag{4.6.12b}$$

则对任给 $\xi \in C_{++}$, 方程(4.6.1)存在唯一正整体解 $x(t,\xi)$.

注　定理表述中未加说明的参数 α,β 等自然依条件(H_1)~(H_3). 下文中在类似情况下均作此理解,不另作说明.

证　如在引理 4.6.1 之后所说明的,只要验证形如(4.6.9)与(4.6.10)的不等式,其中 V 依式(4.6.6),参数 c_i 依定理条件,假定 $p > 0$ 充分小.

今用条件(H_1)~(H_3)来估计 I_1 ~ I_3(依式(4.6.11)). 首先由条件(H_1)有

$$\begin{aligned}
I_1 &\leqslant \sum_i pc_ix_i^p\left[\kappa_i|x|^{\alpha} + \bar{\kappa}_i\int_{-\tau}^{0}|\varphi(\theta)|^{\alpha}\mathrm{d}\mu_i + o(|x|^{\alpha})\right] \\
&= p\sum_i c_i\left[\kappa_ix_i^p|x|^{\alpha} + \bar{\kappa}_i\int_{-\tau}^{0}x_i^p|\varphi(\theta)|^{\alpha}\mathrm{d}\mu_i\right] + o(|x|^{\alpha+p}) \\
&\leqslant \frac{p}{\alpha+p}\sum_i c_i\Big[p(\kappa_i + \bar{\kappa}_i)x_i^{\alpha+p} + \alpha\kappa_i|x|^{\alpha+p} \\
&\qquad + \alpha\bar{\kappa}_i\int_{-\tau}^{0}|\varphi(\theta)|^{\alpha+p}\mathrm{d}\mu_i\Big] + o(|x|^{\alpha+p}),
\end{aligned} \tag{4.6.13}$$

其中用了(1.3.55)(下面将多次用到该不等式,不再注明).其次,由条件(H_3)有

$$I_2 \leqslant \frac{p(p-1)}{2}\sum_i c_i x_i^p\left[b_i x_i^{2\beta} - \sigma_i\int_{-\tau}^0 |\varphi(\theta)|^{2\beta}\mathrm{d}\bar{\nu}_i + o(|x|^{2\beta})\right]$$

$$\leqslant \frac{p(p-1)}{2}\sum_i c_i\left[\left(b_i - \frac{p\sigma_i}{2\beta+p}\right)x_i^{2\beta+p}\right.$$

$$\left. - \frac{2\beta\sigma_i}{2\beta+p}\int_{-\tau}^0 |\varphi(\theta)|^{2\beta+p}\mathrm{d}\bar{\nu}_i\right] + o(|x|^{2\beta+p}). \tag{4.6.14}$$

再用条件(H_1)与(H_2)得(注意这一步不必太精细!)

$$I_3 \leqslant \mathrm{const}\sum_i\left[\int_{-\tau}^0 |\varphi(\theta)|^\alpha\mathrm{d}\mu_i + \int_{-\tau}^0 |\varphi(\theta)|^{2\beta}\mathrm{d}\nu_i\right] + o(|x|^{(\alpha\vee 2\beta)+p}). \tag{4.6.15}$$

将式(4.6.13)~(4.6.15)代入式(4.6.11)得

$$\mathscr{L}V(x,\varphi) \leqslant \sum_i \frac{\alpha p c_i\bar{\kappa}_i}{\alpha+p}\left[\int_{-\tau}^0 |\varphi(\theta)|^{\alpha+p}\mathrm{d}\mu_i - |x|^{\alpha+p}\right]$$

$$+ \sum_i \frac{\beta p(1-p)c_i\sigma_i}{2\beta+p}\left[\int_{-\tau}^0 |\varphi(\theta)|^{2\beta+p}\mathrm{d}\bar{\nu}_i - |x|^{2\beta+p}\right]$$

$$+ \mathrm{const}\sum_i\left[\int_{-\tau}^0 |\varphi(\theta)|^\alpha\mathrm{d}\mu_i - |x|^\alpha\right.$$

$$\left. + \int_{-\tau}^0 |\varphi(\theta)|^{2\beta}\mathrm{d}\nu_i - |x|^{2\beta}\right] + I,$$

这正是一个形如(4.6.9)的不等式,其中

$$I = \sum_i \frac{pc_i}{\alpha+p}(\kappa_i + \bar{\kappa}_i)(px_i^{\alpha+p} + \alpha|x|^{\alpha+p}) + o(|x|^{(\alpha\vee 2\beta)+p})$$

$$+ \sum_i \frac{c_i p(p-1)}{2}\left[\left(b_i - \frac{p\sigma_i}{2\beta+p}\right)x_i^{2\beta+p} - \frac{2\beta\sigma_i}{2\beta+p}|x|^{2\beta+p}\right]. \tag{4.6.16}$$

若条件(4.6.12a)满足,则由(4.6.16)有

$$I = \sum_i \frac{c_i p(p-1)}{2}\left(b_i - \frac{p\sigma_i}{2\beta+p}\right)x_i^{2\beta+p} + I' + o(|x|^{2\beta+p}),$$

其中

$$I' = \frac{\beta p(1-p)}{2\beta+p}|x|^{2\beta+p}\sum_i c_i\sigma_i$$

$$\leqslant \frac{\beta p(1-p)|c||\sigma|}{2\beta+p}d^{(\beta-1+p/2)\vee 0}V_{2\beta+p}(x),$$

其中用了(1.3.50),(1.3.52).综合以上两式得

$$I \leqslant \sum_i \frac{c_i p(p-1)}{2}\bar{b}_i x_i^{2\beta+p} + o(|x|^{2\beta+p}),$$

这可当作一个形如(4.6.10)的不等式,其中

$$\bar{b}_i = b_i - \frac{p\sigma_i}{2\beta + p} - \frac{2\beta |c| |\sigma|}{c_i(2\beta + p)} d^{(\beta - 1 + p/2) \vee 0} > 0,$$

此处用了条件(4.6.12a),注意已设 p 充分小. 因此有 $I \leqslant \text{const}$.

若条件(4.6.12b)满足,则由式(4.6.16)有

$$I = \sum_i \left[\frac{c_i p(p-1)}{2}\left(b_i - \frac{p\sigma_i}{\alpha + p}\right) + \frac{c_i p^2(\kappa_i + \bar{\kappa}_i)}{\alpha + p}\right] x_i^{\alpha + p} + I' + o(|x|^{\alpha + p}),$$

其中

$$\begin{aligned} I' &= |x|^{\alpha + p} \frac{\alpha p}{2(\alpha + p)} \sum_i c_i [2\kappa_i + 2\bar{\kappa}_i + \sigma_i(1 - p)] \\ &\leqslant d^{(\beta - 1 + p/2) \vee 0} V_{\alpha + p}(x) \frac{\alpha p |c| |2\kappa + 2\bar{\kappa} + (1 - p)\sigma|}{2(\alpha + p)}. \end{aligned}$$

故得

$$I \leqslant \sum_i \frac{c_i p(p-1)}{2} \tilde{b}_i x_i^{\alpha + p} + o(|x|^{\alpha + p}),$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{b}_i &= b_i - \frac{p\sigma_i}{\alpha + p} - \frac{2p(\kappa_i + \bar{\kappa}_i)}{(\alpha + p)(1 - p)} \\ &\quad - \frac{\alpha |c| |2\kappa + 2\bar{\kappa} + (1 - p)\sigma|}{c_i(\alpha + p)(1 - p)} d^{(\beta - 1 + p/2) \vee 0} > 0, \end{aligned}$$

此处也用到 p 充分小,于是同样有 $I \leqslant \text{const}$.

综上所证,在定理条件下总可用引理 4.6.1 得出所要结论. □

将定理 4.6.2 用于方程(4.6.2)与(4.6.3)分别得到

推论 4.6.3　设条件(H_1),(H_2')与(H_3')满足,$\alpha \leqslant 2\beta$,且当 $\alpha = 2\beta$ 时存在 $c \in \mathbf{R}_{++}^d$,使得

$$\min_i b_i c_i > 2 |c| |\kappa + \bar{\kappa}| d^{(\beta - 1) \vee 0}, \tag{4.6.17}$$

则对任给 $\xi \in C_{++}$,方程(4.6.2)存在唯一正整体解 $x(t, \xi)$.

推论 4.6.4　设条件(H_1'),(H_2)与(H_3)满足. 若存在 $c \in \mathbf{R}_{++}^d$,使得条件(4.6.12a)或以下条件满足:

$$\alpha = 2\beta, \quad \min_i b_i c_i > |c| |2\kappa + \sigma| d^{(\beta - 1) \vee 0}, \tag{4.6.18}$$

则对任给 $\xi \in C_{++}$,方程(4.6.3)存在唯正整体解 $x(t, \xi)$.

观察定理 4.6.2 的证明看出,关键的步骤是推断 $I \leqslant \text{const}$,I 依式(4.6.16). 做到这一点主要有赖于式(4.6.16)中的负项

$$-\frac{c_i p(1 - p)}{2} b_i x_i^{2\beta + p},$$

而这一项的出现源于条件(H_3). 由此可见,在定理 4.6.2 中,满足条件(H_3)的函数 g 起了决定性作用. 有趣的是,条件(H_4)能使函数 f 起类似作用. 基于这一思路的以下结果,可看作定理 4.6.2 的一个对偶定理.

定理 4.6.5　设条件(H_1),(H_2),(H_4)及以下三条件之一满足:

$$2\beta - \alpha \leqslant p \leqslant 1, \quad b > \sigma, \tag{4.6.19a}$$

$$\alpha > 2\beta, \quad b > \sigma, \tag{4.6.19b}$$

$$\begin{cases} \alpha = 2\beta, \quad b > \sigma + \dfrac{m(p-1)^+[\alpha d + pd^{(1-\beta-p/2)\vee 0}]}{2(\alpha+p)}, \\ m = \max\limits_i [c_i(\lambda_i + \bar{\lambda}_i)^2], \end{cases} \tag{4.6.19c}$$

则定理 4.6.2 的结论成立.

证　类似于定理 4.6.2 之证,只要验证形如(4.6.9)与(4.6.10)的不等式,其中 $V(x)$ 依式(4.6.6),参数 c_i,p 依条件(H_4)(与定理 4.6.2 不同,现在不能假定 p 充分小). 主要的事情仍然是估计 $I_1 \sim I_3$(依(4.6.11)). 首先由条件(H_4)有

$$I_1 \leqslant -bp|x|^{\alpha+p} + p\sigma\int_{-\tau}^{0}|\varphi(\theta)|^{\alpha+p}\mathrm{d}\bar{\mu} + o(|x|^{\alpha+p}). \tag{4.6.20}$$

其次,由条件(H_2)及(1.3.57)有

$$\begin{aligned} I_2 &\leqslant \frac{p(p-1)^+}{2}\sum_i c_i x_i^p\Big[\lambda_i|x|^\beta + \bar{\lambda}_i\int_{-\tau}^{0}|\varphi(\theta)|^\beta \mathrm{d}\nu_i + o(|x|^\beta)\Big]^2 \\ &\leqslant \frac{p(p-1)^+}{2\varepsilon}\sum_i c_i x_i^p\Big[\lambda_i|x|^\beta + \bar{\lambda}_i\int_{-\tau}^{0}|\varphi(\theta)|^\beta \mathrm{d}\nu_i\Big]^2 + o(|x|^{2\beta+p}) \\ &\leqslant \frac{p(p-1)^+}{2\varepsilon}\sum_i c_i\Big[\frac{\lambda_i^2 x_i^p|x|^{2\beta}}{\delta_i} + \frac{\bar{\lambda}_i^2}{1-\delta_i}\int_{-\tau}^{0}x_i^p|\varphi(\theta)|^{2\beta}\mathrm{d}\nu_i\Big] + o(|x|^{2\beta+p}) \\ &\leqslant \frac{p(p-1)^+}{2\varepsilon(2\beta+p)}\sum_i c_i\Big[px_i^{2\beta+p}\Big(\frac{\lambda_i^2}{\delta_i} + \frac{\bar{\lambda}_i^2}{1-\delta_i}\Big) + \frac{2\beta\lambda_i^2}{\delta_i}|x|^{2\beta+p} \\ &\quad + \frac{2\beta\bar{\lambda}_i^2}{1-\delta_i}\int_{-\tau}^{0}|\varphi(\theta)|^{2\beta+p}\mathrm{d}\nu_i\Big] + o(|x|^{2\beta+p}), \end{aligned} \tag{4.6.21}$$

其中用了关于积分的 Hölder 不等式,$\varepsilon,\delta_i \in (0,1)$. 基于条件($H_1$)与($H_2$)的式(4.6.15)保持有效. 将式(4.6.20),(4.6.21)与(4.6.15)代入(4.6.11)得

$$\begin{aligned} \mathscr{L}V(x,\varphi) &\leqslant p\sigma\Big[\int_{-\tau}^{0}|\varphi(\theta)|^{\alpha+p}\mathrm{d}\bar{\mu} - |x|^{\alpha+p}\Big] \\ &\quad + \sum_i \frac{\beta p(p-1)^+ c_i\lambda_i^2}{\varepsilon(2\beta+p)(1-\delta_i)}\Big[\int_{-\tau}^{0}|\varphi(\theta)|^{2\beta+p}\mathrm{d}\nu_i - |x|^{2\beta+p}\Big] \\ &\quad + \mathrm{const}\sum_i\Big[\int_{-\tau}^{0}|\varphi(\theta)|^{\alpha}\mathrm{d}\mu_i - |x|^\alpha + \int_{-\tau}^{0}|\varphi(\theta)|^{2\beta}\mathrm{d}\nu_i - |x|^{2\beta}\Big] + I, \\ I &= -p(b-\sigma)|x|^{\alpha+p} + o(|x|^{(\alpha\vee 2\beta)+p}) \end{aligned}$$

$$+\frac{p(p-1)^{+}}{2\varepsilon(2\beta+p)}\sum_{i}c_{i}\left(\frac{\lambda_{i}^{2}}{\delta_{i}}+\frac{\bar{\lambda}_{i}^{2}}{1-\delta_{i}}\right)(px_{i}^{2\beta+p}+2\beta|x|^{2\beta+p})$$

$$=-p(b-\sigma)|x|^{\alpha+p}+o(|x|^{(\alpha\vee 2\beta)+p})$$

$$+\frac{p(p-1)^{+}}{2\varepsilon(2\beta+p)}\sum_{i}c_{i}(\lambda_{i}+\bar{\lambda}_{i})^{2}(px_{i}^{2\beta+p}+2\beta|x|^{2\beta+p}),\qquad(4.6.22)$$

最后一步取了 $\delta_i=\lambda_i/(\lambda_i+\bar{\lambda}_i)$（可设 $\lambda_i,\lambda_i>0$，否则更易处理）.

若条件(4.6.19a)满足（不妨设 $2\beta-\alpha<p$，$2\beta-\alpha=p$ 的情况证明只需稍作修改），则由式(4.6.22)有

$$I=-p(b-\sigma)|x|^{\alpha+p}+o(|x|^{\alpha+p})\leqslant\text{const}.$$

当条件(4.6.19b)满足时有同样的结果. 若条件(4.6.19c)满足，则由式(4.6.22)有

$$I=-p|x|^{\alpha+p}\left[b-\sigma-\frac{\alpha(p-1)^{+}}{2\varepsilon(\alpha+p)}\sum_{i}c_{i}(\lambda_{i}+\bar{\lambda}_{i})^{2}\right]+I'+o(|x|^{\alpha+p}),$$

$$I'=\frac{p^{2}(p-1)^{+}}{2\varepsilon(\alpha+p)}\sum_{i}c_{i}(\lambda_{i}+\bar{\lambda}_{i})^{2}x_{i}^{\alpha+p}$$

$$\leqslant\frac{mp^{2}(p-1)^{+}}{2\varepsilon(\alpha+p)}V_{\alpha+p}(x)$$

$$\leqslant\frac{mp^{2}(p-1)^{+}}{2\varepsilon(\alpha+p)}d^{(1-\beta-p/2)\vee 0}|x|^{\alpha+p},$$

其中用了(1.3.52)，m 依(4.6.19c). 综合以上两式得

$$I\leqslant-p\bar{b}|x|^{\alpha+p}+o(|x|^{\alpha+p}),$$

其中

$$\bar{b}=b-\sigma-\frac{(p-1)^{+}}{2\varepsilon(\alpha+p)}\left[\alpha\sum_{i}c_{i}(\lambda_{i}+\bar{\lambda}_{i})^{2}+mpd^{(1-\beta-p/2)\vee 0}\right].$$

因 ε 可充分接近于1，故可由条件(4.6.19c)推出 $\bar{b}>0$，因而亦有 $I\leqslant\text{const}$.

综上所证，知在定理条件下总可应用引理4.6.1得所要证. □

将定理4.6.5用于方程(4.6.2)与(4.6.3)分别得到

推论4.6.6 设条件(H_1)，(H_2')，(H_4)满足且条件(4.6.19a)，(4.6.19b)与以下条件之一满足：

$$\alpha=2\beta,\quad b>\sigma+\frac{(p-1)^{+}\left[\alpha d+pd^{(1-\beta-p/2)\vee 0}\right]}{2(\alpha+p)}\max_{i}(c_{i}\lambda_{i}^{2}),\qquad(4.6.23)$$

则推论4.6.3的结论成立.

推论4.6.7 设条件(H_1')，(H_2)与(H_4')满足，$2\beta-\alpha\leqslant p\leqslant 1$ 或 $\alpha\geqslant\beta$，且当 $\alpha=2\beta$ 时，

$$2b(\alpha+p)>m(p-1)^{+}\left[\alpha d+pd^{(1-\beta-p/2)\vee 0}\right],\qquad(4.6.24)$$

其中 m 依条件(4.6.19c)，则推论4.6.4之结论成立.

将定理4.6.2与定理4.6.5应用于方程(4.6.4)得到

推论4.6.8 在以下两种情况下,对每个 $x_0 \in \mathbf{R}^d_{++}$, 方程(4.6.4)存在唯一正整体解 $x(t,x_0)$:

(i) 条件(H_1') ~ (H_3')满足, $\alpha \leqslant 2\beta$, 且当 $\alpha = 2\beta$ 时存在 $c \in \mathbf{R}^d_{++}$, 使得

$$\min_i b_i c_i > 2 | c | | \kappa | d^{(\beta-1)\vee 0}.$$

(ii) 条件(H_1'),(H_2')与(H_4')满足, $2\beta - \alpha \leqslant p \leqslant 1$ 或 $\alpha \geqslant 2\beta$,且当 $\alpha = 2\beta$ 时

$$2b(\alpha + p) > (p-1)^+ [\alpha d + p d^{(1-\beta-p/2)\vee 0}] \max_i (c_i \lambda_i^2).$$

现在对定理4.6.2与定理4.6.5作点评述. 二者有明显的类似性,但亦有显著差异:前者以(H_3)为关键条件,参数 c_i, p 均不出现于条件(H_1) ~ (H_3)中,且可取充分小的 p, 后者以(H_4)为关键条件,该条件包含了参数 c_i, p, p 不再能任意选择且可能 $p > 1$;前者 $\alpha \leqslant 2\beta$, 后者一般要求 $\alpha \geqslant 2\beta$, 这意味着起主导作用的函数(g 或 f) 应有较高阶的增长.

条件(H_1) ~ (H_4)都可能适当放宽. 条件(H_1)意味着函数 $f(x,\varphi)$ 在 $x = 0$ 至少为一阶零点,这就不能令人满意. 在定理4.6.2与定理4.6.5中,条件(H_1)可分别代以如下条件:

(H_1^*) $f \geqslant 0$;存在 $\alpha > 0, \kappa, \bar{\kappa} \in \mathbf{R}^d_+$ 与 $[-\tau, 0]$ 上的概率测度 μ_i,使得

$$x_i^{-1} f_i(x,\varphi) \leqslant \kappa_i | x |^{\alpha} + \bar{\kappa}_i \int_{-\tau}^0 | \varphi(\theta) |^{\alpha} \mathrm{d}\mu_i + o(| x |^{\alpha}), \quad x_i \geqslant 1.$$

(H_1^{**}) 存在 $\alpha > 0, \kappa, \bar{\kappa} \in \mathbf{R}^d_+$ 与 $[-\tau, 0]$ 上的概率测度 μ_i, 使得

$$-x_i^{-1} f_i(x,\varphi) \leqslant \kappa_i | x |^{\alpha} + \bar{\kappa}_i \int_{-\tau}^0 | \varphi(\theta) |^{\alpha} \mathrm{d}\mu_i + o(| x |^{\alpha}).$$

以上两条件都可避开 $f(x,\varphi)$ 在 $x = 0$ 至少为一阶零点.

4.6.2 矩有界性

本小节的问题是:设 $p > 0$, 给出关于函数 f 与 g 的一定条件,使得对于方程(4.6.1)的正整体解 $x(t,\xi)$, 成立不等式

$$\varlimsup_{t\to\infty} \mathrm{E} | x(t,\xi) |^p \leqslant K, \tag{4.6.25}$$

其中 K 是与 ξ 无关的正常数. 当不等式(4.6.25)成立时,解 $x(t,\xi)$ 为 p 阶矩有界; p 越大,结论就越强. 此问题当然不同于正整体解的存在性,但仍然可充分借鉴上小节的经验,采用非常类似的思路与实际步骤.

首先采用一个可用来替换 $| x |^p$ 的函数 $V(x)$:

$$V(x) = \sum_i c_i x_i^p, \quad x \in \mathbf{R}^d_{++}, \tag{4.6.26}$$

其中 $p > 0$ 与 $c \in \mathbf{R}^d_{++}$ 依情况择定. 易见(参照(1.3.52))

$$k_1|x|^p \le V(x) \le k_2|x|^p, \quad x \in \mathbf{R}_{++}^d,$$

其中 k_1, k_2 为正常数. 因此, 不等式(4.6.25)等价于

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \mathrm{E}V(x(t,\xi)) \le \bar{K}, \tag{4.6.27}$$

其中 $\bar{K}$ 为与 ξ 无关的正常数. $V(x)$ 的另一优点是其导数很简单(与 $|x|^p$ 比较):

$$V_x = (c_i p x_i^{p-1}), \quad V_{xx} = \mathrm{diag}(c_i p(p-1)x_i^{p-2}).$$

以此代入式(4.6.5)得

$$\mathscr{L}V(x,\varphi) = p\sum_i c_i x_i^{p-1} f_i(x,\varphi) + \frac{p(p-1)}{2}\sum_i c_i x_i^{p-2} g_i^2(x,\varphi). \tag{4.6.28}$$

以下结果可与引理4.6.1相对照.

引理4.6.9 设 $V(x)$ 依式(4.6.26); $x(t) = x(t,\xi)$ 是方程(4.6.1)的一个正整体解. 若存在正常数 $\varepsilon, K_0, K_j, \alpha_j$ 与 $[-\tau,0]$ 上的概率测度 $\mu_j (1\le j\le m)$, 使得

$$\Phi_\varepsilon \triangleq \mathscr{L}V(x,\varphi) + \varepsilon V(x) \le K_0 + \sum_j K_j\left[\int_{-\tau}^0 |\varphi(\alpha)|^{\alpha_j}\mathrm{d}\mu_j - \mathrm{e}^{\varepsilon\tau}|x|^{\alpha_j}\right],$$

$$x \in \mathbf{R}_{++}^d, \varphi \in C_{++}. \tag{4.6.29}$$

则不等式(4.6.25)成立, 且正常数 K 与 ξ 无关(后一要求下面不再处处注明).

证 只要证不等式(4.6.27), 由以下估计得到

$$\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{\varepsilon t}\mathrm{E}V(x(t)) \\
&= V(\xi(0)) + \mathrm{E}\int_0^t \mathrm{e}^{\varepsilon s}[LV(x(s)) + \varepsilon V(x(s))]\mathrm{d}s \\
&\le V(\xi(0)) + \mathrm{E}\int_0^t \mathrm{e}^{\varepsilon s}\left\{K_0 + \sum_j K_j\left[\int_{-\tau}^0 |x(s+\theta)|^{\alpha_j}\mathrm{d}\mu_j(\theta) - \mathrm{e}^{\varepsilon\tau}|x(s)|^{\alpha_j}\right]\right\}\mathrm{d}s \\
&\le V(\xi(0)) + \bar{K}\mathrm{e}^{\varepsilon t} + \sum_j K_j\int_{-\tau}^0 \mathrm{e}^{\varepsilon(\theta+\tau)}|\xi(\theta)|^{\alpha_j}\mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

(参照引理4.6.1之证), 其中 $\bar{K} = \varepsilon^{-1}K_0$. 由此立得不等式(4.6.27). □

下面采用的策略几乎与4.6.1节中一样: 建立不等式

$$\Phi_\varepsilon \le \sum_j \mathrm{const}\left[\int_{-\tau}^0 |\varphi(\theta)|^{\alpha_j}\mathrm{d}\mu_j - \mathrm{e}^{\varepsilon\tau}|x|^{\alpha_j}\right] + I, \tag{4.6.30}$$

$$I = I(x) \le -b|x|^\alpha + o(|x|^\alpha), \tag{4.6.31}$$

其中 α, b 为适当正常数. 式(4.6.30)与式(4.6.31)一起推出条件(4.6.29)满足, 因而可用引理4.6.9. 以下总设 Φ_ε 表示(4.6.29)之左端, 且设 ε 充分小. 对照式(4.6.28)与(4.6.11)看出

$$\Phi_\varepsilon = I_1 + I_2 + \varepsilon V(x), \tag{4.6.32}$$

其中 I_1 与 I_2 依式(4.6.11), 因而可沿用4.6.1节中对 I_1, I_2 的一些现成估计.

定理4.6.10 设 $x(t,\xi)$ 是方程(4.6.1)的一个正整体解, $0 < p < 1$. 若条件

(H_1),(H_3)及以下两条件之一满足(对某个 $c \in \mathbf{R}^d_{++}$):

$$\alpha < 2\beta,\quad b_i > \frac{p\sigma_i}{2\beta + p} + \frac{2\beta\,|c||\sigma|}{c_i(2\beta + p)} d^{(\beta-1+p/2)\vee 0}, \tag{4.6.33a}$$

$$\alpha = 2\beta,\quad b_i > \frac{p\sigma_i}{\alpha + p} + \frac{2p(\kappa_i + \bar{\kappa}_i)}{(\alpha + p)(1 - p)} + \frac{\alpha\,|c||2\kappa + 2\bar{\kappa} + (1 - p)\sigma|}{c_i(\alpha + p)(1 - p)} d^{(\beta-1+p/2)\vee 0}, \tag{4.6.33b}$$

其中 $1 \leqslant i \leqslant d$, 则不等式(4.6.25)成立.

证 如已指出的,只要验证形如(4.6.30)与(4.6.31)的不等式. 因定理4.6.2证明中得到的式(4.6.13)与(4.6.14)依然可用,而 $\varepsilon V(x) = o(|x|^{\alpha+p})$, 故由式(4.6.32)得

$$\Phi_\varepsilon \leqslant \sum_i \frac{apc_i\bar{\kappa}_i}{\alpha + p}\Big[\int_{-\tau}^0 |\varphi(\theta)|^{\alpha+p}\mathrm{d}\mu_i - \mathrm{e}^{\varepsilon\tau}|x|^{\alpha+p}\Big] + \sum_i \frac{\beta p(1 - p)c_i\sigma_i}{2\beta + p}\Big[\int_{-\tau}^0 |\varphi(\theta)|^{2\beta+p}\mathrm{d}\bar{\nu}_i - \mathrm{e}^{\varepsilon\tau}|x|^{2\beta+p}\Big] + I,$$

这就是一个形如(4.6.30)的不等式,其中

$$I = \sum_i \frac{pc_i}{\alpha + p}[p(\kappa_i + \bar{\kappa}_i)x_i^{\alpha+p} + \alpha(\kappa_i + \bar{\kappa}_i\mathrm{e}^{\varepsilon\tau})|x|^{\alpha+p}] + \sum_i \frac{c_ip(p - 1)}{2}\Big[\Big(b_i - \frac{p\sigma_i}{2\beta + p}\Big)x_i^{2\beta+p} - \frac{2\beta\,\sigma_i\mathrm{e}^{\varepsilon\tau}}{2\beta + p}|x|^{2\beta+p}\Big] + o(|x|^{(\alpha\vee 2\beta)+p}). \tag{4.6.34}$$

若条件(4.6.33a)满足,则由(4.6.34)有

$$I = \sum_i \frac{c_ip(p - 1)}{2}\Big(b_i - \frac{p\sigma_i}{2\beta + p}\Big)x_i^{2\beta+p} + I' + o(|x|^{2\beta+p}),$$

$$I' = \frac{\beta p(1 - p)}{2\beta + p}\mathrm{e}^{\varepsilon\tau}|x|^{2\beta+p}\sum_i c_i\sigma_i \leqslant \frac{\beta p(1 - p)\,|c||\sigma|}{2\beta + p}\mathrm{e}^{\varepsilon\tau}d^{(\beta-1+p/2)\vee 0}V_{2\beta+p}(x)$$

(参考定理4.6.2之证). 结合以上两式得到一个类似于(4.6.31)的不等式

$$I \leqslant -\frac{p(1 - p)}{2}\sum_i c_i\bar{b}_ix_i^{2\beta+p} + o(|x|^{2\beta+p}),$$

其中

$$\bar{b}_i = b_i - \frac{p\sigma_i}{2\beta + p} - \frac{2\beta\,|c||\sigma|}{c_i(2\beta + p)}\mathrm{e}^{\varepsilon\tau}d^{(\beta-1+p/2)\vee 0}.$$

因由条件(4.6.32a)推出 $\bar{b}_i > 0$(注意 ε 充分小),故有 $I \leqslant \mathrm{const.}$

若条件(4.6.33b)满足,则由(4.6.34)有

$$I=\sum_i c_i x_i^{\alpha+p}\Big[\frac{p(p-1)}{2}\Big(b_i-\frac{p\sigma_i}{\alpha+p}\Big)+\frac{p^2(\kappa_i+\bar{\kappa}_i)}{\alpha+p)}\Big]+I'+o(|x|^{\alpha+p}),$$

$$I'=\frac{\alpha p}{\alpha+p}|x|^{\alpha+p}\sum_i c_i\Big[\kappa_i+\bar{\kappa}_i e^{\varepsilon\tau}+\frac{1-p}{2}\sigma_i e^{\varepsilon\tau}\Big]$$

$$\leqslant\frac{\alpha p|c|}{\alpha+p}\Big|\kappa+\bar{\kappa}e^{\varepsilon\tau}+\frac{1-p}{2}\sigma e^{\varepsilon\tau}\Big|d^{(\beta-1+p/2)\vee 0}V_{\alpha+p}(x).$$

于是

$$I\leqslant-\frac{p(1-p)}{2}\sum_i c_i\tilde{b}_i x_i^{\alpha+p}+p(|x|^{\alpha+p}).$$

类似地由条件(4.6.33b)推出 $\tilde{b}_i>0$, 因而同样得 $I\leqslant$ const.

综上所证,由引理4.6.9推出不等式(4.6.25)成立. □

将定理4.6.10用于方程(4.6.2)与(4.6.3)分别得到

推论4.6.11　设 $x(t,\xi)$ 是方程(4.6.2)的一个正整体解, $0<p<1$. 若条件(H_1)与(H_3')满足, $\alpha\leqslant 2\beta$,且当 $\alpha=2\beta$ 时有 $c\in\mathbf{R}_{++}^d$, 使得

$$b_ic_i(\alpha+p)(1-p)$$
$$>2pc_i(\kappa_i+\bar{\kappa}_i)+2\alpha|c||\kappa+\bar{\kappa}|d^{(\beta-1+p/2)\vee 0},\quad 1\leqslant i\leqslant d,\quad(4.6.35)$$

则不等式(4.6.25)成立.

推论4.6.12　设 $x(t,\xi)$ 是方程(4.6.3)的一个正整体解, $0<p<1$. 若条件(H_1')与(H_3)满足,且存在 $c\in\mathbf{R}_{++}^d$ 使得条件(4.6.33a)或以下条件满足:

$$\alpha=2\beta,\quad b_i>\frac{p\sigma_i}{\alpha+p}+\frac{2p\kappa_i}{(\alpha+p)(1-p)}$$
$$+\frac{\alpha|c||2\kappa+(1-p)\sigma|}{c_i(\alpha+p)(1-p)}d^{(\beta-1+p/2)\vee 0},\quad 1\leqslant i\leqslant d,\quad(4.6.36)$$

则不等式(4.6.25)成立.

现在转向使用条件(H_2)与(H_4).

定理4.6.13　设 $x(t,\xi)$ 是方程(4.6.1)的一个正整体解;条件(H_2)与(H_4)满足. 若 $p\leqslant 1, b>\sigma$, 或条件(4.6.19b)与(4.6.19c)之一满足,则不等式(4.6.25)成立.

证　沿用定理4.6.5与定理4.6.10之证的思路与某些现成结论. 因由条件(H_2)与(H_4)推出的估计(4.6.20)与(4.6.21)均可用,故由式(4.6.32)有

$$\Phi_\varepsilon\leqslant p\sigma\Big[\int_{-\tau}^0|\varphi(\theta)|^{\alpha+p}d\bar{\mu}-e^{\varepsilon\tau}|x|^{\alpha+p}\Big]$$
$$+\sum_i\frac{\beta p(p-1)^+c_i\lambda_i^2}{\varepsilon(2\beta+p)(1-\delta_i)}$$
$$\times\Big[\int_{-\tau}^0|\varphi(\theta)|^{2\beta+p}d\nu_i-e^{\varepsilon\tau}|x|^{2\beta+p}\Big]+I,\qquad(4.6.37)$$

$$I = -p(b-\sigma e^{\varepsilon\tau})|x|^{\alpha+p} + o(|x|^{(\alpha\vee 2\beta)+p})$$

$$+ \sum_i \frac{p(p-1)c_i}{2\varepsilon(2\beta+p)}\left[2\beta|x|^{2\beta+p}\left(\frac{\lambda_i^2}{\delta_i}+\frac{\bar{\lambda}_i^2 e^{\varepsilon\tau}}{1-\delta_i}\right)+px_i^{2\beta+p}\left(\frac{\lambda_i^2}{\delta_i}+\frac{\bar{\lambda}_i^2}{1-\delta_i}\right)\right], \quad (4.6.38)$$

其中 $\varepsilon \in (0,1)$ 充分接近于 1,$\delta_i = \lambda_i/(\lambda_i+\bar{\lambda}_i)$(参考定理 4.6.5 之证).

若 $p \leqslant 1, b > \sigma$, 或条件(4.6.19b)满足,则由(4.6.38)易见 $I \leqslant$ const. 若条件(4.6.19c)满足,则由式(4.6.38)有

$$I = -p|x|^{\alpha+p}\left[b-\sigma e^{\varepsilon\tau}-\frac{\alpha(p-1)^+}{2\varepsilon(\alpha+p)}\sum_i c_i(\lambda_i+\bar{\lambda}_i)(\lambda_i+\bar{\lambda}_i e^{\varepsilon\tau})\right]$$

$$+ I' + o(|x|^{\alpha+p}),$$

$$I' = \frac{p^2(p-1)^+}{2\varepsilon(\alpha+p)}\sum_i c_i(\lambda_i+\bar{\lambda}_i)^2 x_i^{\alpha+p}$$

$$\leqslant \frac{mp^2(p-1)^+}{2\varepsilon(\alpha+p)} d^{(1-\beta-p/2)\vee 0}|x|^{\alpha+p},$$

其中 m 依条件(4.6.19c)(参考定理 4.6.5 之证). 于是

$$I \leqslant -p\bar{b}|x|^{\alpha+p} + o(|x|^{\alpha+p}),$$

其中

$$\bar{b} = b-\sigma e^{\varepsilon\tau}-\frac{(p-1)^+}{2\varepsilon(\alpha+p)}\left[\alpha\sum c_i(\lambda_i+\bar{\lambda}_i)(\lambda_i+\bar{\lambda}_i e^{\varepsilon\tau})+mpd^{(1-\beta-p/2)\vee 0}\right] > 0,$$

因而 $I \leqslant$ const. 这就可用引理 4.6.9 得所要证. □

将定理 4.6.13 用于方程(4.6.2)与(4.6.3)分别得到

推论 4.6.14 设 $x(t,\xi)$ 是方程(4.6.2)的一个正整体解;条件(H_2')与(H_4)满足. 若 $p \geqslant 1, b > \sigma$, 或者 $\alpha > 2\beta, b > \sigma$, 或者

$$\alpha = 2\beta,\ 2(\alpha+p)(b-\sigma) > (p-1)^+[\alpha d + p d^{(1-\beta-p/2)\vee 0}]\max_i(c_i\lambda_i^2), \quad (4.6.39)$$

则不等式(4.6.25)成立.

推论 4.6.15 设 $x(t,\xi)$ 是方程(4.6.3)的一个正整体解;条件(H_2)与(H_4')满足. 若 $p \leqslant 1$, 或者 $\alpha \geqslant 2\beta$, 且当 $\alpha = 2\beta$ 时

$$2b(\alpha+p) > (p-1)^+[\alpha d + pd^{(1-\beta-p/2)\vee 0}]\max_i[c_i(\lambda_i+\bar{\lambda}_i)^2], \quad (4.6.40)$$

则不等式(4.6.25)成立.

将定理 4.6.10 与定理 4.6.13 用于方程(4.6.4)得到

推论4.6.16　设 $x(t,x_0)$ 是方程(4.6.4)的一个正整体解,则在下述两种情况下有与 $x_0 \in \mathbf{R}_{++}^d$ 无关的正常数 K,使得

$$\lim_{t\to\infty} \mathrm{E} | x(t,x_0) |^p \leqslant K. \qquad (4.6.41)$$

(i) 条件(H_1')与(H_3')满足,$0 < p < 1$,$\alpha \leqslant 2\beta$,且当 $\alpha = 2\beta$ 时,有 $c \in \mathbf{R}_{++}^d$,使得

$$b_i c_i(\alpha + p)(1-p) > 2pc_i\kappa_i + 2\alpha |c||\kappa| d^{(\beta-1+p/2)\vee 0},\quad 1 \leqslant i \leqslant d. \qquad (4.6.42)$$

(ii) 条件(H_2')与(H_4')满足;$p \leqslant 1$,或者 $\alpha \geqslant 2\beta$,且当 $\alpha = 2\beta$ 时,

$$2b(\alpha + p) > (p-1)^+ [\alpha d + pd^{(1-\beta-p/2)\vee 0}] \max_i (c_i\lambda_i^2). \qquad (4.6.43)$$

定理4.6.10与定理4.6.13有一些值得注意的可对比之处:前者主要依赖于条件(H_3),要求 $\alpha \leqslant 2\beta$,$0 < p < 1$;而后者则主要依赖于条件(H_4),要求 $\alpha \geqslant 2\beta$(除非 $p \leqslant 1$),且容许 $p \geqslant 1$. 最后这一点表明条件(H_4)可导向更好的结果,这是条件(H_4)相对于(H_3)的优势.

其次,对比定理4.6.5与定理4.6.13看出,后者的条件全部包含在前者的条件中. 因此,在定理4.6.5的条件下,定理4.6.5与定理4.6.13的结论均成立. 至于定理4.6.2与定理4.6.10的关系,则并非如此简单,需依参数的变化范围进行讨论. 就此而言,条件(H_4)也比(H_3)要优越些.

4.6.3　渐近轨道估计

本小节的问题是给出关于函数 f 与 g 的一定条件,使对方程(4.6.1)的任给正整体解 $x(t)$ 有

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\ln |x(t)|^p}{\ln t} \leqslant 1, \text{a.s.}, \qquad (4.6.44)$$

p 是某个正常数. $p = 1$ 是特别值得关注的情况:

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\ln |x(t)|}{\ln t} \leqslant 1, \text{a.s.}. \qquad (4.6.45)$$

若令 $q = 1/p$,则不等式(4.6.44)相当于:$\forall \varepsilon > 0$,当 t 充分大时有

$$|x(t)| \leqslant t^{q+\varepsilon}, \text{a.s.}.$$

粗略地说,(4.6.44)意味着 $|x(t)|$ 接近于 a.s."$1/p$ 阶增长",这当然是对于 $x(t)$ 轨道增长的一个颇强的限制,p 愈大,限制就愈强. 若不等式(4.6.44)对任给 $p > 0$ 成立,则令 $p \to \infty$ 得到

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\ln |x(t)|}{\ln t} \leqslant 0, \text{a.s.}. \qquad (4.6.46)$$

不等式(4.6.46)意味着 $|x(t)|$ 的增长慢于任何幂函数 $t^q(q > 0)$. 这虽然尚不足以推出 $x(t)$ 为 a.s. 有界,但可以说已接近于有界了. 这当然是一种极特殊的渐近

轨道性质，值得专门探讨.

为估计 $\ln|x(t)|$，我们借助于函数 $V(x)=c^{\mathrm{T}}x$，此处 $c\in\mathbf{R}_{++}^d$ 适当选定. 这样的 $V(x)$ 有特别令人满意的性质. 首先，直接看出

$$\hat{c}|x|\leqslant V(x)=c^{\mathrm{T}}x\leqslant|c||x|,\quad x\in\mathbf{R}_{++}^d. \tag{4.6.47}$$

因此，不等式(4.6.44)等价于

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\ln V(x(t))}{\ln t}\leqslant\frac{1}{p},\text{a.s.}. \tag{4.6.48}$$

其次，由 $V_x=c^{\mathrm{T}},V_{xx}=0$ 得(用(1.3.37))

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\ln V(x(t))&=\Big[\frac{LV(x(t))}{V(x(t))}-\frac{1}{2}Z^2(t)\Big]\mathrm{d}t+Z(t)\mathrm{d}w(t)\\&=\Big[\frac{c^{\mathrm{T}}f(x(t),x_t)}{c^{\mathrm{T}}x(t)}-\frac{1}{2}Z^2(t)\Big]\mathrm{d}t+Z(t)\mathrm{d}w(t),\end{aligned} \tag{4.6.49}$$

$$Z(t)=c^{\mathrm{T}}g(x(t),x_t)/c^{\mathrm{T}}x(t). \tag{4.6.50}$$

下面仍采用类似于前两小节的步骤，首先建立如下基本引理.

引理4.6.17　设 $x(t)=x(t,\xi)$ 是方程(4.6.1)的一个正整体解，$p>0$. 若存在 $c\in\mathbf{R}_{++}^d$，对任给 $\varepsilon>0$，有正常数 $K_\varepsilon,K_{\varepsilon j},\alpha_j$ 与 $[-\tau,0]$ 上的概率测度 μ_j，使得

$$\begin{aligned}&\frac{c^{\mathrm{T}}f(x,\varphi)}{c^{\mathrm{T}}x}+\frac{p-1}{2}\Big[\frac{c^{\mathrm{T}}g(x,\varphi)}{c^{\mathrm{T}}x}\Big]^2+\varepsilon\ln(c^{\mathrm{T}}x)\\&\leqslant K_\varepsilon+\sum_j K_{\varepsilon j}\Big[\int_{-\tau}^0|\varphi(\theta)|^{\alpha_j}\mathrm{d}\mu_j-\mathrm{e}^{\varepsilon\tau}|x|^{\alpha_j}\Big],\quad x\in\mathbf{R}_{++}^d,\varphi\in C_{++},\end{aligned} \tag{4.6.51}$$

则不等式(4.6.44)成立.

证　只要证不等式(4.6.48)，其中 $V(x)=c^{\mathrm{T}}x$. 任给 $\varepsilon>0$，今估计

$$\begin{aligned}&\mathrm{e}^{\varepsilon\tau}\ln V(x(t))\\&=\ln V(x(0))+\int_0^t\mathrm{d}[\mathrm{e}^{\varepsilon s}\ln V(x(s))]\\&=\ln V(\xi(0))+\int_0^t\mathrm{e}^{\varepsilon s}[\mathrm{d}\ln V(x(s))+\varepsilon\ln V(x(s))\mathrm{d}s]\\&=\ln V(\xi(0))+\int_0^t\mathrm{e}^{\varepsilon s}\Big[\frac{c^{\mathrm{T}}f(x(s),x_s)}{c^{\mathrm{T}}x(s)}\\&\quad-\frac{1}{2}Z^2(s)+\varepsilon\ln V(x(s))\Big]\mathrm{d}s+M(t),\end{aligned} \tag{4.6.52}$$

此处用了式(4.6.49)，$Z(t)$ 依式(4.6.50)，

$$M(t)=\int_0^t\mathrm{e}^{\varepsilon s}Z(s)\mathrm{d}w(s).$$

任给 $n\in\mathbf{N},\sigma>1$，由指数鞅不等式有

$$P\left(\sup_{0\leqslant t\leqslant n}\left[M(t)-\frac{p}{2\mathrm{e}^{\varepsilon n}}\int_0^t \mathrm{e}^{2\varepsilon s}Z^2(s)\,\mathrm{d}s\right]\geqslant \frac{\sigma \mathrm{e}^{\varepsilon n}\ln n}{p}\right)\leqslant \frac{1}{n^{\sigma}}.$$

因 $\sum n^{-\sigma}<\infty$，故由 Borel-Cantelli 引理推出：a. s. 地，当 n 充分大且 $n-1\leqslant t\leqslant n$ 时有

$$M(t)\leqslant \frac{p}{2\mathrm{e}^{\varepsilon n}}\int_0^t \mathrm{e}^{2\varepsilon s}Z^2(s)\,\mathrm{d}s+\frac{\sigma \mathrm{e}^{\varepsilon n}\ln n}{p}$$
$$\leqslant \frac{p}{2}\int_0^t \mathrm{e}^{\varepsilon s}Z^2(s)\,\mathrm{d}s+\frac{\sigma \mathrm{e}^{\varepsilon(t+1)}\ln (t+1)}{p}.$$

以此代入式(4.6.52)得：a. s. 地，当 t 充分大时有

$$\mathrm{e}^{\varepsilon t}\ln V(x(t))\leqslant \ln V(\xi(0))+p^{-1}\sigma \mathrm{e}^{\varepsilon(t+1)}\ln (t+1)+I,$$

其中

$$I=\int_0^t \mathrm{e}^{\varepsilon s}\left[\frac{c^{\mathrm{T}}f(x(s),x_s)}{c^{\mathrm{T}}x(s)}+\frac{p-1}{2}Z^2(s)+\varepsilon \ln (c^{\mathrm{T}}x(s))\right]\mathrm{d}s$$
$$\leqslant \int_0^t \mathrm{e}^{\varepsilon s}\left\{K_{\varepsilon}+\sum_j K_{\varepsilon j}\left[\int_{-\tau}^0 |x(s+\theta)|^{\alpha_j}\mathrm{d}\mu_j(\theta)-\mathrm{e}^{\varepsilon\tau}|x(s)|^{\alpha_j}\right]\right\}\mathrm{d}s$$
$$\leqslant \varepsilon^{-1}K_{\varepsilon}\mathrm{e}^{\varepsilon t}+\sum_j K_{\varepsilon j}\int_{-\tau}^0 \mathrm{e}^{\varepsilon(\theta+\tau)}|\xi(\theta)|^{\alpha_j}\mathrm{d}\theta.$$

因此，a. s. 地，当 t 充分大时有

$$\mathrm{e}^{\varepsilon t}\ln V(x(t))\leqslant c_{\varepsilon}+\varepsilon^{-1}K_{\varepsilon}\mathrm{e}^{\varepsilon t}+p^{-1}\sigma \mathrm{e}^{\varepsilon(t+1)}\ln (t+1),$$

其中 c_{ε} 是与 t 无关的正数. 上式两端同除以 $\mathrm{e}^{\varepsilon t}\ln t$ 后，令 $t\to\infty$ 得

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\ln V(x(t))}{\ln t}\leqslant \frac{\sigma \mathrm{e}^{\varepsilon}}{p},\text{a. s.}.$$

然后令 $\sigma\to 1,\varepsilon\to 0$，即得所要证. □

依已熟悉的思路，应用引理 4.6.17 时只需验证形如(4.6.30)与(4.6.31)的不等式，只是现在

$$\Phi_{\varepsilon}=\frac{c^{\mathrm{T}}f(x,\varphi)}{c^{\mathrm{T}}x}+\frac{p-1}{2}\left[\frac{c^{\mathrm{T}}g(x,\varphi)}{c^{\mathrm{T}}x}\right]^2+\varepsilon\ln (c^{\mathrm{T}}x)$$
$$\triangleq I_1+I_2+I_3,\quad x\in \mathbf{R}^d_{++},\varphi\in C_{++}.\tag{4.6.53}$$

显然 $I_3=o(|x|^{\alpha})(\forall \alpha>0)$，故仅需估计 I_1 与 I_2. 下面总设 ε 充分小.

定理 4.6.18　设 $x(t)$ 是方程(4.6.1)的一个正整体解；条件(F_1)与(F_3)满足. 若 $\alpha<2\beta,b>\sigma$，则不等式(4.6.45)成立；若

$$0<p<1,\quad \alpha=2\beta,\quad (b-\sigma)(1-p)>2|c|^2(\kappa+\bar{\kappa}),\tag{4.6.54}$$

则不等式(4.6.44)成立.

证　首先用条件(F_1)估计 I_1：

$$I_1=\sum_i \frac{c_i x_i}{c^{\mathrm{T}}x}x_i^{-1}f_i(x,\varphi)$$

$$\leqslant \max_i x_i^{-1} f_i(x,\varphi)$$

$$\leqslant \kappa |x|^\alpha + \bar{\kappa}\int_{-\tau}^0 |\varphi(\theta)|^\alpha \mathrm{d}\mu + o(|x|^\alpha). \tag{4.6.55}$$

设 $p \leqslant 1$，由 $c^{\mathrm{T}}x \leqslant |c||x|$ 与条件(F_3)有

$$I_2 \leqslant \frac{p-1}{2|c|^2|x|^2}[c^{\mathrm{T}}g(x,\varphi)]^2$$

$$\leqslant \frac{p-1}{2|c|^2}\left[b|x|^{2\beta} - \sigma\int_{-\tau}^0 |\varphi(\theta)|^{2\beta}\mathrm{d}\bar{\nu} + o(|x|^{2\beta})\right]. \tag{4.6.56}$$

将式(4.6.55)与(4.6.56)代入(4.6.53)得

$$\Phi_\varepsilon \leqslant \bar{\kappa}\left[\int_{-\tau}^0 |\varphi(\theta)|^\alpha \mathrm{d}\mu - \mathrm{e}^{\varepsilon\tau}|x|^\alpha\right]$$

$$+\frac{\sigma(1-p)}{2|c|^2}\left[\int_{-\tau}^0 |\varphi(\theta)|^{2\beta}\mathrm{d}\bar{\nu} - \mathrm{e}^{\varepsilon\tau}|x|^{2\beta}\right] + I,$$

$$I = (\kappa + \bar{\kappa}\mathrm{e}^{\varepsilon\tau})|x|^\alpha - \frac{1-p}{2|c|^2}(b-\sigma\mathrm{e}^{\varepsilon\tau})|x|^{2\beta} + o(|x|^{\alpha\vee 2\beta}). \tag{4.6.57}$$

若 $\alpha < 2\beta, b > \sigma$，则对任给 $p \in (0,1)$，由式(4.6.57)有

$$I = -\frac{1-p}{2|c|^2}(b-\sigma\mathrm{e}^{\varepsilon\tau})|x|^{2\beta} + o(|x|^{2\beta}) \leqslant \mathrm{const},$$

其中用到 $b > \sigma\mathrm{e}^{\varepsilon\tau}$（注意 ε 充分小）. 于是由引理4.6.17 推出，不等式(4.6.44)对任何 $p \in (0,1)$ 成立；令 $p \to 1$，得出不等式(4.6.45)成立.

若条件(4.6.54)满足，则由式(4.6.57)有

$$I = -\frac{1-p}{2|c|^2}\left[b - \sigma\mathrm{e}^{\varepsilon\tau} - \frac{2|c|^2(\kappa + \bar{\kappa}\mathrm{e}^{\varepsilon\tau})}{1-p}\right]|x|^\alpha + o(|x|^\alpha)$$

$$\triangleq -\frac{1-p}{2|c|^2}\bar{b}|x|^\alpha + o(|x|^\alpha).$$

由条件(4.6.54)推出 $\bar{b} > 0$，因而 $I \leqslant \mathrm{const}$，故同样由引理4.6.17 推出式(4.6.44)成立. □

推论 4.6.19 设 $x(t)$ 是方程(4.6.2)的一个正整体解；条件(F_1)与(F_3')满足. 若 $\sigma < 2\beta, b > \sigma$，则不等式(4.6.45)成立；若

$$0 < p < 1, \quad \alpha = 2\beta, \quad b(1-p) > 2|c|^2(\kappa + \bar{\kappa}), \tag{4.6.58}$$

则不等式(4.6.44)成立.

推论 4.6.20 设 $x(t)$ 是方程(4.6.3)的一个正整体解；条件(F_1')与(F_3)满足. 若 $\alpha < 2\beta, b > \sigma$，则不等式(4.6.45)成立；若

$$0 < p < 1, \quad \alpha = 2\beta, \quad (b-\sigma)(1-p) > 2\kappa|c|^2, \tag{4.6.59}$$

则不等式(4.6.44)成立.

定理 4.6.21　设 $x(t)$ 是方程(4.6.1)的一个正整体解;条件(F_2)与(F_4)满足. 若

$$\alpha > 2\beta, \quad b\hat{c} > |c|\sigma, \tag{4.6.60a}$$

则不等式(4.6.46)成立;若 $p > 0$,

$$\alpha = 2\beta, \quad b > \frac{|c|\sigma}{\hat{c}} + \frac{|c|(p-1)^+(\lambda+\bar{\lambda})^2}{2}, \tag{4.6.60b}$$

则不等式(4.6.44)成立.

证　任给 $p > 0$. 首先,由条件(F_4)有

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{|x|}{c^{\mathrm{T}}x}|x|^{-1}c^{\mathrm{T}}f(x,\varphi) \\ &\leqslant \frac{|x|}{c^{\mathrm{T}}x}\left[-b|x|^{\alpha} + \sigma\int_{-\tau}^{0}|\varphi(\theta)|^{\alpha}\mathrm{d}\bar{\mu} + o(|x|^{\alpha})\right] \\ &\leqslant -\frac{b}{|c|}|x|^{\alpha} + \frac{\sigma}{\hat{c}}\int_{-\tau}^{0}|\varphi(\theta)|^{\alpha}\mathrm{d}\bar{\mu} + o(|x|^{\alpha}), \end{aligned} \tag{4.6.61}$$

最后一步用了式(4.6.47). 其次,由条件(F_2)及(1.3.57)有

$$\begin{aligned} I_2 &\leqslant \frac{(p-1)^+}{2}\left[\sum_i \frac{c_i x_i}{c^{\mathrm{T}}x}x_i^{-1}|g_i(x,\varphi)|\right]^2 \\ &\leqslant \frac{(p-1)^+}{2}\left[\max_i x_i^{-1}|g_i(x,\varphi)|\right]^2 \\ &\leqslant \frac{(p-1)^+}{2}\left[\lambda|x|^{\beta} + \bar{\lambda}\int_{-\tau}^{0}|\varphi(\theta)|^{\beta}\mathrm{d}\nu + o(|x|^{\beta})\right]^2 \\ &\leqslant \frac{(p-1)^+}{2u}\left[\frac{\lambda^2|x|^{2\beta}}{v} + \frac{\bar{\lambda}^2}{1-v}\int_{-\tau}^{0}|\varphi(\theta)|^{2\beta}\mathrm{d}\nu\right] + o(|x|^{2\beta}), \end{aligned} \tag{4.6.62}$$

其中 $u, v \in (0,1)$, 可设 u 充分接近于 1. 结合(4.6.61)与(4.6.62)得

$$\begin{aligned} \Phi_{\varepsilon} \leqslant{}& \frac{\sigma}{\hat{c}}\left[\int_{-\tau}^{0}|\varphi(\theta)|^{\alpha}\mathrm{d}\bar{\mu} - \mathrm{e}^{\varepsilon\tau}|x|^{\alpha}\right] \\ &+ \frac{\bar{\lambda}^2(p-1)^+}{2u(1-v)}\left[\int_{-\tau}^{0}|\varphi(\theta)|^{2\beta}\mathrm{d}\nu - \mathrm{e}^{\varepsilon\tau}|x|^{2\beta}\right] + I, \\ I ={}& \left(-\frac{b}{|c|} + \frac{\sigma\mathrm{e}^{\varepsilon\tau}}{\hat{c}}\right)|x|^{\alpha} \\ &+ \frac{(p-1)^+}{2u}\left(\frac{\lambda^2}{v} + \frac{\bar{\lambda}^2\mathrm{e}^{\varepsilon\tau}}{1-v}\right)|x|^{2\beta} + o(|x|^{\alpha\vee 2\beta}). \end{aligned}$$

若条件(4.6.60a)满足,则由上式有

$$I = -\left(\frac{b}{|c|} - \frac{\sigma\mathrm{e}^{\varepsilon\tau}}{\hat{c}}\right)|x|^{\alpha} + o(|x|^{\alpha}) \leqslant \mathrm{const},$$

其中用到 $b\hat{c} > |c|\sigma$ 与 ε 充分小. 于是由引理 4.6.17 推出,对任给 $p > 0$, 不等式

(4.6.44)成立,而这就推出式(4.6.46)成立.

若条件(4.6.60b)满足,则

$$I = -|x|^{\alpha}\left[\frac{b}{|c|} - \frac{\sigma e^{\varepsilon\tau}}{\hat{c}} - \frac{(p-1)^+}{2u}\left(\frac{\lambda^2}{v} + \frac{\bar{\lambda}^2 e^{\varepsilon\tau}}{1-v}\right)\right] + o(|x|^{\alpha})$$

$$\triangleq -\bar{b}|x|^{\alpha} + o(|x|^{\alpha}).$$

取 $v = \lambda/(\lambda + \bar{\lambda})$ 得

$$\bar{b} = \frac{b}{|c|} - \frac{\sigma e^{\varepsilon\tau}}{\hat{c}} - \frac{(p-1)^+}{2u}(\lambda + \bar{\lambda})(\lambda + \bar{\lambda}e^{\varepsilon\tau}) > 0,$$

这用到条件(4.6.60b)、ε 充分小与 u 充分接近于1. 于是 $I \leqslant \text{const}$, 这就同样由引理4.6.17得出不等式(4.6.44)成立. □

推论4.6.22 设 $x(t)$ 是方程(4.6.2)的一个正整体解;条件(F_2')与(F_4)满足. 若条件(4.6.60a)满足,则不等式(4.6.46)成立;若 $p > 0$,

$$\alpha = 2\beta, \quad 2b\hat{c} > 2|c|\sigma + \hat{c}|c|\lambda^2(p-1)^+, \tag{4.6.63}$$

则不等式(4.6.44)成立.

推论4.6.23 设 $x(t)$ 是方程(4.6.3)的一个正整体解;条件(F_2)与(F_4')满足. 若 $\alpha > 2\beta$, 则不等式(4.6.46)成立;若 $p > 0$,

$$\alpha = 2\beta, \quad 2b > |c|(p-1)^+(\lambda + \bar{\lambda})^2, \tag{4.6.64}$$

则不等式(4.6.44)成立.

结合定理4.6.18与定理4.6.21,对方程(4.6.4)得到

推论4.6.24 设 $x(t)$ 是方程(4.6.4)的一个正整体解.

(i) 设条件(F_1')与(F_3')满足. 若 $\alpha < 2\beta$,则不等式(4.6.45)成立;若 $0 < p < 1, \alpha = 2\beta, b(1-p) > 2\kappa|c|^2$, 则不等式(4.6.44)成立.

(ii) 设条件(F_2')与(F_4')满足. 若 $\alpha > 2\beta$, 则不等式(4.6.46)成立;若 $p > 0$, $\alpha = 2\beta, 2b > |c|\lambda^2(p-1)^+$, 则不等式(4.6.44)成立.

如同定理4.6.10与定理4.6.13一样,定理4.6.18与定理4.6.21也有若干值得注意的可对比之处:前者以(F_3)为关键条件,要求 $\alpha \leqslant 2\beta, p \leqslant 1$; 而后者则以($F_4$)为关键条件,要求 $\alpha \geqslant 2\beta$,容许 $p \geqslant 1$, 且可得出不等式(4.6.46)这样强的结论. 这表明条件(F_4)导向更好的结果.

其次,可注意定理4.6.5与定理4.6.21的联系. 已指出(F_2)⇒(H_2),当 $b > \sigma$, $p = 1$ 时(F_4)⇒(H_4). 当 $p = 1$ 时条件(4.6.60a)与(4.6.60b)分别推出条件(4.6.19b)与(4.6.19c). 这就得出:若 $p = 1$, 定理4.6.21的条件满足,且加上条件(H_1)满足,则对任给 $\xi \in C_{++}$, 方程(4.6.1)存在唯一正整体解 $x(t,\xi)$,且满足不等式(4.6.45).

4.6.4 延迟微分方程

本节的上述内容可以自然地转移到SDDE:

$$dx(t) = f(x(t), y(t))dt + g(x(t), y(t))dw(t), \tag{4.6.65}$$

其中 $y(t) = x(t - \delta(t))$, $\delta(t) \in C^1(\mathbf{R}_+, [0,\tau])$; $f(x,y)$ 与 $g(x,y)$ 均为 $\mathbf{R}^d_{++} \times \mathbf{R}^d_{++}$ 上的 $\mathbf{R}^d$ 值函数,假定它们满足局部 Lipschitz 条件. 下面仅给出一个简略的勾画,所有证明都予省略. 首先是对应于引理 4.6.1 的如下结果:

引理 4.6.25　设 $V(x)$ 依式(4.6.6), $\mathscr{L}V(x,y)$ 依(3.3.45). 若存在正常数 $K, K_j, \alpha_j (1 \leqslant j \leqslant m)$, 使得

$$\mathscr{L}V(x,y) \leqslant K + \sum_j K_j(|y|^{\alpha_j} - \eta^{-1}|x|^{\alpha_j}), \quad x,y \in \mathbf{R}^d_{++}, \tag{4.6.66}$$

其中 η 依(4.1.46),则对任给 $\xi \in C_{++}$, 方程(4.6.65)存在唯一正整体解 $x(t,\xi)$.

下面陈述与条件(H_1) ~ (H_4), (F_1) ~ (F_4)相当的备择条件(总设 $x,y \in \mathbf{R}^d_{++}$, $1 \leqslant i \leqslant d$):

(h_1) 存在常数 $\alpha > 0$ 与 $\kappa, \bar{\kappa} \in \mathbf{R}^d_+$, 使得

$$x_i^{-1}|f_i(x,y)| \leqslant \kappa_i|x|^\alpha + \bar{\kappa}_i|y|^\alpha + o(|x|^\alpha).$$

(h_2) 存在常数 $\beta > 0$ 与 $\lambda, \bar{\lambda} \in \mathbf{R}^d_+$, 使得

$$x_i^{-1}|g_i(x,y)| \leqslant \lambda_i|x|^\beta + \bar{\lambda}_i|y|^\beta + o(|x|^\beta).$$

(h_3) 存在常数 $\beta, b_i > 0$ 与 $\sigma \in \mathbf{R}^d_+$, 使得

$$x_i^{-2}g_i^2(x,y) \geqslant b_i x_i^{2\beta} - \sigma_i|y|^{2\beta} + o(|x|^{2\beta}).$$

(h_4) 存在常数 $\alpha, b, p > 0, \sigma \geqslant 0$ 与 $c \in \mathbf{R}^d_{++}$, 使得

$$\sum_i c_i x_i^{p-1} f_i(x,y) \leqslant -b|x|^{\alpha+p} + \sigma|y|^{\alpha+p} + o(|x|^{\alpha+p}).$$

(f_1) 存在常数 $\alpha > 0$ 与 $\kappa, \bar{\kappa} \geqslant 0$, 使得

$$x_i^{-1}|f_i(x,y)| \leqslant \kappa|x|^\alpha + \bar{\kappa}|y|^\alpha + o(|x|^\alpha).$$

(f_2) 存在常数 $\beta > 0$ 与 $\lambda, \bar{\lambda} \geqslant 0$, 使得

$$x_i^{-1}|g_i(x,y)| \leqslant \lambda|x|^\beta + \bar{\lambda}|y|^\beta + o(|x|^\beta).$$

(f_3) 存在常数 $\beta, b > 0, \sigma \geqslant 0$ 与 $c \in \mathbf{R}^d_{++}$, 使得

$$|x|^{-2}[c^{\mathrm{T}}g(x,y)]^2 \geqslant b|x|^{2\beta} - \sigma|y|^{2\beta} + o(|x|^{2\beta}).$$

(f_4) 存在常数 $\alpha, b > 0, \sigma \geqslant 0$ 与 $c \in \mathbf{R}^d_{++}$, 使得

$$|x|^{-1}c^{\mathrm{T}}f(x,y) \leqslant -b|x|^\alpha + \sigma|y|^\alpha + o(|x|^\alpha).$$

对于条件(H_1) ~ (H_4)与(F_1) ~ (F_4)所作的说明均可用于条件(h_1) ~ (h_4)与(f_1) ~ (f_4);条件(h_1') ~ (h_4')与(f_1') ~ (f_4')的意义自明,这些都不必细述.

下面依次给出关于方程(4.6.65)的三方面的结果:正整体解的存在性、矩有界性与渐近轨道估计.

定理 4.6.26　设条件(h_1) ~ (h_3)及以下两条件之一满足(对某个 $c \in \mathbf{R}^d_{++}$):

$$\alpha < 2\beta, \quad \min_i b_i c_i \eta > |c||\sigma| d^{(\beta-1)\vee 0}, \tag{4.6.67a}$$

$$\alpha = 2\beta, \quad \min_i b_i c_i \eta > |c||2\kappa\eta + 2\bar{\kappa} + \sigma| d^{(\beta-1)\vee 0}, \tag{4.6.67b}$$

或者设条件(h_1),(h_2),(h_4)及以下三条件之一满足：

$$2\beta - \alpha \leqslant p \leqslant 1, \quad b > \sigma\eta^{-1}, \tag{4.6.68a}$$

$$\alpha > 2\beta, \quad b > \sigma\eta^{-1}, \tag{4.6.68b}$$

$$\begin{cases} \alpha = 2\beta, \quad b > \sigma\eta^{-1} + \dfrac{(p-1)^+\left[\alpha\bar{m} + mpd^{(1-\beta-p/2)\vee 0}\right]}{2(\alpha+p)}, \\ \bar{m} = \sum\limits_i c_i(\lambda_i + \bar{\lambda}_i)(\lambda_i + \bar{\lambda}_i\eta^{-1}), m \text{ 依(4.6.19c)}. \end{cases} \tag{4.6.68c}$$

则对任给 $\xi \in C_{++}$,方程(4.6.65)存在唯一正整体解 $x(t,\xi)$.

以下结果与引理4.6.9相当.

引理4.6.27 设 $V(x)$ 依式(4.6.26)；$x(t,\xi)$ 是方程(4.6.65)的一个正整体解.若存在正常数 $\varepsilon, K_0, K_j, \alpha_j (1 \leqslant j \leqslant m)$，使得

$$\mathscr{L}V(x,y) + \varepsilon V(x) \leqslant K_0 + \sum_j K_j(|y|^{\alpha_j} - \eta^{-1}e^{\varepsilon\tau}|x|^{\alpha_j}), \tag{4.6.69}$$

其中 $x,y \in \mathbf{R}^d_{++}$，则不等式(4.6.25)成立.

定理4.6.28 设 $x(t,\xi)$ 是方程(4.6.65)的一个正整体解.若 $0 < p < 1$，条件(h_1),(h_3)及以下两条件之一满足(对某个 $c \in \mathbf{R}^d_{++}$)：

$$\alpha < 2\beta, \quad b_i > \frac{p\sigma_i}{2\beta + p} + \frac{2\beta|c||\sigma|}{c_i\eta(2\beta+p)}d^{(\beta-1+p/2)\vee 0} (1 \leqslant i \leqslant d), \tag{4.6.70a}$$

$$\alpha = 2\beta, \quad b_i > \frac{p\sigma_i}{\alpha+p} + \frac{2p(\kappa_i + \bar{\kappa}_i)}{(\alpha+p)(1-p)} + \frac{\alpha|c||2\kappa\eta + 2\bar{\kappa} + (1-p)\sigma|}{c_i\eta(\alpha+p)(1-p)}d^{(\beta-1+p/2)\vee 0}(1 \leqslant i \leqslant d), \tag{4.6.70b}$$

或者 $p > 0$，条件(h_2)与(h_4)满足,且条件(4.6.68b),(4.6.68c)及

$$p \leqslant 1, \quad b > \sigma\eta^{-1} \tag{4.6.71}$$

三者之一满足,则不等式(4.6.25)成立.

以下结果与引理4.6.17相当.

引理4.6.29 设 $x(t)$ 是方程(4.6.65)的一个正整体解，$p > 0$. 若存在 $c \in \mathbf{R}^d_{++}$，对任给 $\varepsilon > 0$，有正常数 $K_\varepsilon, K_{\varepsilon j}, \alpha_j (1 \leqslant j \leqslant m)$，使得

$$\frac{c^{\mathrm{T}}f(x,y)}{c^{\mathrm{T}}x} + \frac{p-1}{2}\left[\frac{c^{\mathrm{T}}g(x,y)}{c^{\mathrm{T}}x}\right]^2 + \varepsilon\ln(c^{\mathrm{T}}x)$$
$$\leqslant K_\varepsilon + \sum_j K_{\varepsilon j}(|y|^{\alpha_j} - \eta^{-1}e^{\varepsilon\tau}|x|^{\alpha_j}), \quad x,y \in \mathbf{R}^d_{++}. \tag{4.6.72}$$

则不等式(4.6.44)成立.

定理4.6.30 设 $x(t)$ 是方程(4.6.65)的一个正整体解.

(i) 设条件(f_1)与(f_3)满足.若 $\alpha < 2\beta, b > \sigma\eta^{-1}$，则不等式(4.6.45)成立；若

$$0 < p < 1, \quad \alpha = 2\beta, \quad (b\eta - \sigma)(1-p) > 2|c|^2(\kappa\eta + \bar{\kappa}), \tag{4.6.73}$$

则不等式(4.6.44)成立.

(ii) 设条件(f_2)与(f_4)满足. 若$\alpha > 2\beta, b\hat{c}\eta > |c|\sigma$, 则不等式(4.6.46)成立;若

$$p>0,\quad \alpha=2\beta,\quad b>\frac{|c|\sigma}{\hat{c}\eta}+\frac{|c|(p-1)^+(\lambda+\bar{\lambda})(\lambda+\bar{\lambda}\eta^{-1})}{2}, \tag{4.6.74}$$

则不等式(4.6.44)成立.

4.6.5　特例

为解释本节结果的应用,考虑如下特殊例子:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}x(t)&=\mathrm{diag}(x_i^{\alpha}(t))\left[a+Ax(t)+\int_{-\tau}^{0}B(\theta)x(t+\theta)\mathrm{d}\mu(\theta)\right]\mathrm{d}t\\&\quad+g(x(t))\mathrm{d}w(t),\end{aligned} \tag{4.6.75}$$

其中$\alpha\geqslant 1, a\in\mathbf{R}^d, A=[a_{ij}]\in\mathbf{R}^{d\times d}, B(\theta)\in C([-\tau,0],\mathbf{R}^{d\times d})$, μ是$[-\tau,0]$上的一个概率测度, $g(x):\mathbf{R}^d_{++}\to\mathbf{R}^d$满足局部 Lipschitz 条件. 令

$$\begin{cases}h(x,\varphi)=a+Ax+\int_{-\tau}^{0}B(\theta)\varphi(\theta)\mathrm{d}\mu,\\ f(x,\varphi)=\mathrm{diag}(x_i^{\alpha})h(x,\varphi),\quad x\in\mathbf{R}^d_{++},\varphi\in C_{++}.\end{cases}$$

今对f检验条件(F_1), (H_4)等. 设$c\in\mathbf{R}^d_{++}$, 约定$\bar{C}=\mathrm{ding}(c)$,

$$\begin{cases}m_1=\sup\limits_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0}\|B(\theta)\|, m_2=\min\limits_i(c_i|a_{ii}|),\\ R=[r_{ij}], r_{ii}=0, r_{ij}=a_{ij}^+(1\leqslant i,j\leqslant d, i\neq j),\\ 2m_3=\lambda^+_{\max}(\bar{C}A+A^{\mathrm{T}}\bar{C}),\ 2m_4=\lambda^+_{\max}(\bar{C}R+R^{\mathrm{T}}\bar{C}).\end{cases} \tag{4.6.76}$$

此处用了记号

$$\lambda^+_{\max}(M)=\sup_{x\in\mathbf{R}^d_+,|x|=1}x^{\mathrm{T}}Mx,\quad M=M^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^{d\times d}.$$

1° 检验条件(F_1):

$$\begin{aligned}x_i^{-1}|f_i(x,\varphi)|&=x_i^{\alpha-1}|h_i(x,\varphi)|\leqslant|x|^{\alpha-1}|h(x,\varphi)|\\&\leqslant\|A\||x|^{\alpha}+\int_{-\tau}^{0}\|B(\theta)\||x|^{\alpha-1}|\varphi(\theta)|\mathrm{d}\mu+o(|x|^{\alpha})\\&\leqslant\left(\|A\|+m_1\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)|x|^{\alpha}+\frac{m_1}{\alpha}\int_{-\tau}^{0}|\varphi(\theta)|^{\alpha}\mathrm{d}\mu+o(|x|^{\alpha})\\&\triangleq\kappa|x|^{\alpha}+\bar{\kappa}\int_{-\tau}^{0}|\varphi(\theta)|^{\alpha}\mathrm{d}\mu+o(|x|^{\alpha}),\end{aligned}$$

这表明f满足条件(F_1)(因而亦满足(H_1)),只是以上估计过粗,系数$\kappa,\bar{\kappa}$偏大.

2° 取$p=2-\alpha$检验条件(H_4):设$1\leqslant\alpha<2, c\in\mathbf{R}^n_{++}$, 则

$$\begin{aligned}
&\sum_i c_i x_i^{p-1} f_i(x,\varphi) \\
&= \sum_i c_i x_i h_i(x,\varphi) = x^{\mathrm{T}}\bar{C}h(x,\varphi) \\
&= x^{\mathrm{T}}\bar{C}Ax + x^{\mathrm{T}}\bar{C}\int_{-\tau}^{0} B(\theta)\varphi(\theta)\,\mathrm{d}\mu + o(|x|^2) \\
&\leqslant m_3|x|^2 + \check{c}m_1\int_{-\tau}^{0}|x||\varphi(\theta)|\,\mathrm{d}\mu + o(|x|^2) \\
&\leqslant -b|x|^2 + \sigma\int_{-\tau}^{0}|\varphi(\theta)|^2\mathrm{d}\mu + o(|x|^2),
\end{aligned}$$

其中 $b = -m_3 - \check{c}m_1/2, \sigma = \check{c}m_1/2$. 不等式 $b > \sigma$ 相当于

$$\lambda_{\max}^{+}(\bar{C}A + A^{\mathrm{T}}\bar{C}) < -2\check{c}\sup_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0}\|B(\theta)\|. \tag{4.6.77}$$

当条件(4.6.77)满足时必 $b > 0$, 因而 f 满足条件(H_4).

3° 设 $a_{ii} < 0(1 \leqslant i \leqslant d)$ 检验条件(H_4). 取 $p > 0$ 使 $\alpha + p \geqslant 2$, 则

$$\begin{aligned}
J &\triangleq \sum_i c_i x_i^{p-1} f_i(x,\varphi) = \sum_i c_i x_i^{\alpha+p-1} h_i(x,\varphi) \\
&\leqslant \sum_i c_i a_{ii} x_i^{\alpha+p} + \sum_{i,j} c_i r_{ij} x_i^{\alpha+p-1} x_j \\
&\quad + \sum_i c_i x_i^{\alpha+p-1}\left[\int_{-\tau}^{0} B(\theta)\varphi(\theta)\,\mathrm{d}\mu\right]_i + o(|x|^{\alpha+p}) \\
&\triangleq J_1 + J_2 + J_3 + o(|x|^{\alpha+p}),
\end{aligned}$$

$$J_1 \leqslant -m_2 V_{\alpha+p}(x) \leqslant -m_2|x|^{\alpha+p}(\sqrt{d})^{2-\alpha-p},$$

$$J_2 \leqslant |x|^{\alpha+p-2}x^{\mathrm{T}}\bar{C}Rx \leqslant m_3|x|^{\alpha+p},$$

$$\begin{aligned}
J_3 &\leqslant \check{c}V_{2\alpha+2p-2}^{1/2}(x)\left|\int_{-\tau}^{0} B(\theta)\varphi(\theta)\,\mathrm{d}\mu\right| \\
&\leqslant \check{c}m_1\int_{-\tau}^{0}|x|^{\alpha+p-1}|\varphi(\theta)|\,\mathrm{d}\mu \\
&\leqslant \frac{\check{c}m_1}{\alpha+p}\left[(\alpha+p-1)|x|^{\alpha+p} + \int_{-\tau}^{0}|\varphi(\theta)|^{\alpha+p}\mathrm{d}\mu\right],
\end{aligned}$$

以上用了(1.3.50),(1.3.52),(1.3.55)及 $\alpha + p \geqslant 2, m_1 \sim m_3$ 依(4.6.76). 综上得

$$J \leqslant -b|x|^{\alpha+p} + \sigma\int_{-\tau}^{0}|\varphi(\theta)|^{\alpha+p}\mathrm{d}\mu + o(|x|^{\alpha+p}),$$

其中

$$b = m_2(\sqrt{d})^{2-\alpha-p} - m_3 - \frac{\check{c}m_1(\alpha+p-1)}{\alpha+p}, \quad \sigma = \frac{\check{c}m_1}{\alpha+p}.$$

可见, 当 $b > 0$ 时 f 满足条件(H_4); 不等式 $b > \sigma$ 相当于

$$\min_i(c_i|a_{ii}|) > (\sqrt{d})^{\alpha+p-2}\left[\frac{1}{2}\lambda_{\max}^{+}(\bar{C}R+R^{\mathrm{T}}\bar{C})+\check{c}\sup_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0}\|B(\theta)\|\right]. \quad (4.6.78)$$

4° 检验条件(F_4). 设 $a_{ii}<0(1\leqslant i\leqslant d)$, 则类似于上面的估计可得

$$|x|^{-1}c^{\mathrm{T}}f(x,\varphi)\leqslant -b|x|^{\alpha}+\sigma\int_{-\tau}^{0}|\varphi(\theta)|^{\alpha}\mathrm{d}\mu+o(|x|^{\alpha}),$$

但现在 b,σ 已有所不同:

$$b=m_2(\sqrt{d})^{1-\alpha}-m_3-\alpha^{-1}\check{c}m_1\varepsilon^{\alpha}(\alpha-1),\quad \sigma=\alpha^{-1}\check{c}m_1\varepsilon^{\alpha(1-\alpha)},$$

其中 $\varepsilon>0$ 待定. 可见, 当 $b>0$ 时 f 满足条件(F_4); 不等式 $b\hat{c}>|c|\sigma$ 相当于

$$\min_i(c_i|a_{ii}|) > d^{(\alpha-1)/2}\left[\frac{1}{2}\lambda_{\max}^{+}(\bar{C}R+R^{\mathrm{T}}\bar{C})+\check{c}\left(\frac{|c|}{\hat{c}}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\sup_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0}\|B(\theta)\|\right]. \quad (4.6.79)$$

作了以上准备之后, 现在将推论 4.6.3, 推论 4.6.11 与推论 4.6.19 用于方程(4.6.75)得到

命题 4.6.31　设函数 $g(x)$ 满足条件(H_2')与(H_3'), $1\leqslant\alpha<2\beta$. 则以下结论成立:

(i) 对任给 $\xi\in C_{++}$, 方程(4.6.75)存在唯一正整体解 $x(t,\xi)$.

(ii) 对任给 $p\in(0,1)$, 上述的解 $x(t,\xi)$ 满足不等式(4.6.25).

(iii) 若加上 $g(x)$ 满足条件(F_3'), 则解 $x(t,\xi)$ 还满足不等式(4.6.45).

类似地, 将推论 4.6.6, 推论 4.6.16 与推论 4.6.22 用于方程(4.6.75)得到

命题 4.6.32　设函数 $g(x)$ 满足条件(H_2'), $\alpha\geqslant 1,\alpha>2\beta,a_{ii}<0(1\leqslant i\leqslant d)$, 则以下结论成立:

(i) 若存在 $c\in\mathbf{R}_{++}^d$, 使得条件(4.6.77)满足且 $\alpha<2$, 或者有 $p>0$, 使得 $\alpha+p\geqslant 2$ 且条件(4.6.78)满足, 则对任给 $\xi\in C_{++}$, 方程(4.6.75)存在唯一正整体解 $x(t,\xi)$, 且不等式(4.6.25)成立.

(ii) 若 $g(x)$ 满足条件(F_2'); 存在 $c\in\mathbf{R}_{++}^d$ 使条件(4.6.79)满足, 则方程(4.6.75)的任何正整体解满足式(4.6.46); 若加上(i)中的条件满足, 则方程(4.6.75)的每个解 $x(t,\xi)(\xi\in C_{++})$ 满足式(4.6.46).

注意, 与命题 4.6.31 比较, 命题 4.6.32 的结论更强, 当然这有赖于对 $A,B(\theta)$ 等的较强的限制, $a_{ii}<0(1\leqslant i\leqslant d)$ 无疑是最关键的条件.

现在转向对应于方程(4.6.75)的 SDDE:

$$\mathrm{d}x(t)=\mathrm{diag}(x_i^{\alpha}(t))[a+Ax(t)+By(t)]\mathrm{d}t+g(x(t))\mathrm{d}w(t), \quad (4.6.80)$$

其中 $\alpha,a,A,g(x)$ 仍如方程(4.6.75); $B\in\mathbf{R}^{d\times d},y(t)=x(t-\delta(t)),\delta(t)\in C^1(\mathbf{R}_+,[0,\tau])$. 现在与(4.6.77)~(4.6.79)相当的条件分别为

$$\lambda_{\max}^{+}(\bar{C}A + A^{\mathrm{T}}\bar{C}) < -2\check{c}\,\|B\|/\sqrt{\eta}, \tag{4.6.81}$$

$$\min_i(c_i|a_{ii}|) > (\sqrt{d})^{\alpha+p-2}\left[\frac{1}{2}\lambda_{\max}^{+}(\bar{C}R + R^{\mathrm{T}}\bar{C}) + \frac{\check{c}\,\|B\|}{\eta^{1/(\alpha+p)}}\right], \tag{4.6.82}$$

$$\min_i(c_i|a_{ii}|) > d^{(\alpha-1)/2}\left[\frac{1}{2}\lambda_{\max}^{+}(\bar{C}R + R^{\mathrm{T}}\bar{C}) + \check{c}\,\|B\|\left(\frac{|c|}{\hat{c}\,\eta}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right], \tag{4.6.83}$$

其中 R 仍依(4.6.76). 于是有对应于命题4.6.31 与命题4.6.32 的以下结果.

命题4.6.33 设函数 $g(x)$ 满足条件(H_2')与(H_3'), $1 \leqslant \alpha < 2\beta$. 则以下结论成立:

(i) 对任给 $\xi \in C_{++}$, 方程(4.6.80)存在唯一正整体解 $x(t,\xi)$.

(ii) 对任给 $p \in (0,1)$, 上述的解 $x(t,\xi)$ 满足不等式(4.6.25).

(iii) 若加上 $g(x)$ 满足条件(F_3'),则解 $x(t,\xi)$ 还满足不等式(4.6.45).

命题4.6.34 设函数 $g(x)$ 满足条件(H_2'), $\alpha \geqslant 1, \alpha > 2\beta, a_{ii} < 0(1 \leqslant i \leqslant d)$. 则以下结论成立:

(i) 若存在 $c \in \mathbf{R}_{++}^d$,使得条件(4.6.81) 满足且 $\alpha < 2$,或者有 $p > 0$, 使得 $\alpha + p \geqslant 2$ 且条件(4.6.82)满足,则对任给 $\xi \in C_{++}$, 方程(4.6.80)存在唯一正整体解 $x(t,\xi)$,且不等式(4.6.25)成立.

(ii) 若 $g(x)$ 满足条件(F_2'),存在 $c \in \mathbf{R}_{++}^d$ 使条件(4.6.83)满足,则方程(4.6.80)的任何正整体解满足不等式(4.6.46);若加上(i)中的条件满足,则方程(4.6.80)的每个解 $x(t,\xi)$ $(\xi \in C_{++})$ 满足式(4.6.46).

满足条件(H_2')与(H_3')的函数 $g(x)$ 甚多. 一个较简单的选择是取

$$g(x) = \mathrm{diag}(x_i^{\beta})Qx, \quad x \in \mathbf{R}_{++}^d, \tag{4.6.84}$$

其中 $\beta \geqslant 1, Q = [q_{ij}] \in \mathbf{R}^{d\times d}$. 若假定 Q 满足条件:

$$Q \geqslant 0, \quad q_{ii} > 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant d, \tag{4.6.85}$$

则对任给 $x \in \mathbf{R}_{++}^d$ 有

$$x_i^{-1}|g_i(x)| = x_i^{\beta-1}(Qx)_i \leqslant \|Q\|\,|x|^{\beta},$$

$$x_i^{-2}g_i^2(x) = x_i^{2\beta-2}\Big(\sum_i q_{ij}x_j\Big)^2 \geqslant q_{ii}x_i^{2\beta}.$$

可见 $g(x)$ 满足条件(F_2')与(H_3'),自然也满足条件(H_2').

第 5 章　特殊类型的 SDE

本章讨论若干特殊类型的 SDE,它们在应用上的特殊价值使其在近年来获得愈来愈引人注目的重要性,其中一些方程已成为研究热点. 本章所考虑的方程实际上涉及两个颇不相同的类型:其一是已考察过的 SDE 的特例,其典型代表是随机神经网络方程, 对这类方程当然可应用前几章的一般结论,只是因其特殊结构而需要发展一些特殊的研究方法; 另一类方程则已不能完全归结于已讨论过的方程类型之内,例如倒向随机微分方程就属此类, 对于这类方程,前面几章的方法固然仍可借鉴,但原则上必须重新考虑解的存在唯一性、解的估计等基本问题,且所用方法与结论都有所不同.

§5.1　随机神经网络

本节讨论一类特殊的 SDE,它与人工神经网络有关, 近年来成为一个十分热门的研究课题. 本节集中考虑稳定性问题,主要思路依据 Liao 与 Mao 的工作,只是依本书的总体安排对记号作了适当调整,以便更好地与前面的章节相衔接.

Hopfield 于 1982 年开创了神经网络动力系统的研究, 他最初所考虑的方程可表为

$$\dot{u}(t) = -Bu(t) + Ag(u(t)), \quad t \geqslant 0, \tag{5.1.1}$$

其中

$$A = [a_{ij}] \in \mathbf{R}^{d\times d}, \quad B = \mathrm{diag}(b_1, b_2, \cdots, b_d), \quad b_i > 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant d,$$
$$g(u) = [g_1(u_1), g_2(u_2), \cdots, g_d(u_d)]^{\mathrm{T}}.$$

假定 $g_i(\cdot)(1 \leqslant i \leqslant d)$ 均为 Lipschitz 连续的增函数,且满足条件

$$ug_i(u) \geqslant 0, |g_i(u)| \leqslant 1 \wedge (\beta_i |u|), \quad u \in \mathbf{R}, 1 \leqslant i \leqslant d, \tag{5.1.2}$$

其中 $\beta_i(1 \leqslant i \leqslant d)$ 为正常数. 由条件(5.1.2)推出 $g_i(0) = 0$, 且 $g_i(u)$ 的图形必介于

$$h_i(u) = (1 \wedge \beta_i u) \vee (-1)$$

的图形与 u 轴之间. 这样的函数固然很特殊,但并不少见,例如,函数

$$(1 \wedge u) \vee (-1), \quad \arctan u, \quad \tanh u \text{ 等}.$$

物理上, $u_i(t)$ 表示第 i 个神经元的输入电压, $g_i(\cdot)$ 是所谓转移函数; b_i 与 $a_{ij}(1 \leqslant i,j \leqslant d)$ 亦各有其物理涵义,不一一解释,可参考有关文献.

在 Hopfield 的开创性工作出现之后,神经网络问题得到多方面的研究,且已积

累了可观的文献,以致形成了一个很有前景的独立研究领域. 如同经典微分方程理论的许多其他领域一样,向某种"随机形式"过渡似乎是必然的. 可以想见,在 SDE 理论中,随机神经网络自然应占有它的位置. 而这方面的开拓性步骤,则是由 Liao 与 Mao 做出的.

1996 年,Liao 与 Mao 首先考虑了方程(5.1.1)的随机扰动系统:

$$dx(t) = [-Bx(t) + Ag(x(t))]dt + \sigma(x(t))dw(t), \qquad (5.1.3)$$

其中 A,B 与 $g(\cdot)$ 如前所述; $w(t)$ 是一个 m 维 Brown 运动, $\sigma(\cdot):\mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^{d\times m}$ 满足局部 Lipschitz 条件与线性增长条件,且 $\sigma(0)=0$. 方程(5.1.3)是一个自治的 SDE. 在上面所作的假定下,由定理 2.1.3,方程(5.1.3)的初值问题必存在唯一整体解 $x(t,x_0)$, 使得 $x(0,x_0)=x_0\in\mathbf{R}^d$, 且 $x(t,x_0)\in\mathscr{M}^2(\mathbf{R}_+,\mathbf{R}^d)$, $x(t,0)=0$, a. s. .

5.1.1 指数稳定性

关于方程(5.1.3)的中心问题是稳定性,相关的两个主要问题是:

(i) 对 $A,B,g(\cdot)$ 与 $\sigma(\cdot)$ 应加什么条件,才能使方程(5.1.3)的零解是 a. s. 指数稳定(或不稳定)的?

(ii) 应如何限定函数 $\sigma(\cdot)$, 才能使方程(5.1.3)成为方程(5.1.1)的稳定化方程(或不稳定化方程)?

为解决以上问题,原则上仍可用 §2.3 中的方法. 鉴于方程(5.1.3)是自治的且关联着矩阵 A,B, 采用 Liapunov 函数 $V=x^{\mathrm{T}}Qx$ 似乎是最可取的,此处 Q 是某个正定矩阵. 利用 $V_x=2x^{\mathrm{T}}Q$, $V_{xx}=2Q$ 及(2.3.31)(依那里的记号),容易求得

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{2x^{\mathrm{T}}QAg(x) - 2x^{\mathrm{T}}QBx}{x^{\mathrm{T}}Qx} + \dfrac{\mathrm{tr}[\sigma^{\mathrm{T}}(x)Q\,\sigma(x)]}{x^{\mathrm{T}}Qx}, & (5.1.4a) \\ \beta = 2\left|\dfrac{x^{\mathrm{T}}Q\,\sigma(x)}{x^{\mathrm{T}}Qx}\right|^2. & (5.1.4b) \end{cases}$$

本节的稳定性结论首先基于对如上的 α 与 β 所作的适当估计. 此种估计所具有的形式既依赖于对 $A,B,g(\cdot),\sigma(\cdot)$ 的假设,也依赖于对 Q 的选定. 作为最初的考虑,我们选取对角形

$$Q=\mathrm{diag}(q_1,q_2,\cdots,q_d), \quad q_i>0, 1\leqslant i\leqslant d. \qquad (5.1.5)$$

这样的 Q 未必能适用于各种情况,但导致较简单的条件. 注意式(5.1.4b)及(5.1.4a)的第二项涉及扰动,对它们的估计自然要用到对函数 $\sigma(\cdot)$ 的假设. 至于式(5.1.4a)中的第一项,则只与 $A,B,g(\cdot)$ 有关,且对于 $g(\cdot)$ 已有条件(5.1.2)可用. 估计这一项的基本策略是,构造一个与 A,B,Q,β_i 有关的对称矩阵 H, 使得

$$2x^{\mathrm{T}}QAg(x) - 2x^{\mathrm{T}}QBx \leqslant |x|^2\lambda_{\max}(H) \qquad (5.1.6a)$$

或

$$2x^{\mathrm{T}}QAg(x) - 2x^{\mathrm{T}}QBx \geqslant |x|^2\lambda_{\min}(H). \tag{5.1.6b}$$

定理 5.1.1　(i) 设存在形如(5.1.5)的正定矩阵 Q 与常数 $\mu,\nu \geqslant 0$，使得

$$\mathrm{tr}[\sigma^{\mathrm{T}}(x)Q\,\sigma(x)] \leqslant \mu x^{\mathrm{T}}Qx, \quad |x^{\mathrm{T}}Q\,\sigma(x)|^2 \geqslant \nu(x^{\mathrm{T}}Qx)^2. \tag{5.1.7}$$

定义 $H = [h_{ij}] \in \mathbf{R}^{d\times d}$ 为

$$h_{ij} = \begin{cases} 2q_i(\beta_i a_{ii}^+ - b_i), & i = j, \\ \beta_j q_i|a_{ij}| + \beta_i q_j|a_{ji}|, & i \neq j. \end{cases} \tag{5.1.8}$$

则对任何 $0 \neq x_0 \in \mathbf{R}^d, x(t) = x(t,x_0)$，有

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{2}{t}\ln|x(t)| \leqslant \begin{cases} \mu - 2\nu + \hat{q}^{-1}\lambda_{\max}(H), \text{a.s.}, & \lambda_{\max}(H) \geqslant 0, \\ \mu - 2\nu + \check{q}^{-1}\lambda_{\max}(H), \text{a.s.}, & \lambda_{\max}(H) < 0. \end{cases} \tag{5.1.9}$$

(ii) 设存在形如(5.1.5)的正定矩阵 Q 与常数 $\mu,\nu \geqslant 0$，使得以下条件满足：

$$\mathrm{tr}[\sigma^{\mathrm{T}}(x)Q\,\sigma(x)] \geqslant \mu x^{\mathrm{T}}Qx, \quad |x^{\mathrm{T}}Q\,\sigma(x)|^2 \leqslant \nu(x^{\mathrm{T}}Qx)^2. \tag{5.1.10}$$

定义 $H = [h_{ij}] \in \mathbf{R}^{d\times d}$ 为

$$h_{ij} = \begin{cases} -2q_i(\beta_i a_{ii}^- + b_i), & i = j, \\ -\beta_i q_j|a_{ji}| - \beta_j q_i|a_{ij}|, & i \neq j. \end{cases} \tag{5.1.11}$$

则对任何 $0 \neq x_0 \in \mathbf{R}^d$ 有

$$\underline{\lim_{t\to\infty}}\, t^{-1}\ln|x(t,x_0)|^2 \geqslant \mu - 2\nu + \hat{q}^{-1}\lambda_{\min}(H), \text{a.s.}. \tag{5.1.12}$$

证　(i) 直接由条件(5.1.7)得

$$\frac{\mathrm{tr}[\sigma^{\mathrm{T}}(x)Q\,\sigma(x)]}{x^{\mathrm{T}}Qx} \leqslant \mu, \quad 2\nu \leqslant \beta \leqslant \text{const}.$$

于是对照(5.1.9)与(2.3.35a)(取 $p = 2$)看出，为证式(5.1.9)，只需判明：

$$\frac{2x^{\mathrm{T}}QAg(x) - 2x^{\mathrm{T}}QBx}{x^{\mathrm{T}}Qx} \leqslant \begin{cases} \hat{q}^{-1}\lambda_{\max}(H), & \lambda_{\max}(H) \geqslant 0, \\ \check{q}^{-1}\lambda_{\max}(H), & \lambda_{\max}(H) < 0. \end{cases} \tag{5.1.13}$$

注意到 $\hat{q}|x|^2 \leqslant x^{\mathrm{T}}Qx \leqslant \check{q}|x|^2$，为证(5.1.13)，只要证(5.1.6a)，这由以下估计得到：

$$\begin{aligned} 2x^{\mathrm{T}}QAg(x) &= \sum_{i,j} 2q_i a_{ij} x_i g_j(x_j) \\ &= \sum_i 2q_i a_{ii} x_i g_i(x_i) + \sum_{i\neq j} 2q_i a_{ij} x_i g_j(x_j) \\ &\leqslant \sum_i 2q_i a_{ii}^+ \beta_i x_i^2 + \sum_{i\neq j} 2q_i|a_{ij}|\beta_j|x_i x_j| \quad (\text{用(5.1.2)}) \\ &= \sum_i (h_{ii} + 2b_i q_i)x_i^2 + \sum_{i\neq j} h_{ij}|x_i x_j| \quad (\text{用(5.1.8)}) \\ &= \sum_{i,j} h_{ij}|x_i x_j| + 2x^{\mathrm{T}}QBx \\ &\leqslant |x|^2\lambda_{\max}(H) + 2x^{\mathrm{T}}QBx. \end{aligned}$$

(ii) 类似于(i)之证,只需判明

$$\frac{2x^{\mathrm{T}}QAg(x)-2x^{\mathrm{T}}QBx}{x^{\mathrm{T}}Qx}\geqslant\frac{\lambda_{\min}(H)}{\hat{q}}. \tag{5.1.14}$$

与(i)不同的是,由式(5.1.11)有 $h_{ii}<0$,因此 $\mathrm{tr}H<0$,这就推出 $\lambda_{\min}(H)<0$,因而无需讨论 $\lambda_{\min}(H)$ 的符号. 为证式(5.1.14),又只需证式(5.1.6b),这由以下估计得到:

$$\begin{aligned}2x^{\mathrm{T}}QAg(x) &= \sum_i 2q_ia_{ii}x_ig_i(x)+\sum_{i\neq j}2q_ia_{ij}x_ig_j(x_j)\\ &\geqslant -\sum_i 2q_ia_{ii}^-\beta_ix_i^2-\sum_{i\neq j}2q_i|a_{ij}|\beta_j|x_ix_j| \qquad (\text{用}(5.1.2))\\ &= \sum_i(h_{ii}+2b_iq_i)x_i^2+\sum_{i\neq j}h_{ij}|x_ix_j| \qquad (\text{用}(5.1.11))\\ &= \sum_{i,j}h_{ij}|x_ix_j|+2x^{\mathrm{T}}QBx\\ &\geqslant |x|^2\lambda_{\min}(H)+2x^{\mathrm{T}}QBx.\end{aligned}$$

□

尽管原则上已可用式(5.1.9)与(5.1.12)来决定方程(5.1.3)的零解的稳定性与不稳定性,但因 $\lambda_{\max}(H)$ 与 $\lambda_{\min}(H)$ 尚待确定,最终结论并不明显. 这可以说是定理5.1.1的缺陷. 如果注意到在定理5.1.1中并未用到涉及 A,B 的条件,矩阵 H 有很大的不确定性是很自然的. 因此,对于定理5.1.1的改进依赖于附加给 A,B 的假设. 下面就是一个这样的结果.

定理5.1.2 设 $b_i=\sum_j|a_{ij}|$.

(i) 设存在形如(5.1.5)的正定矩阵 Q 及常数 $\mu,\nu\geqslant 0$,使得条件(5.1.7)满足,且

$$\sum_i q_i|a_{ij}|(\mathrm{sgn}^+a_{ii})^{\delta_{ij}}\leqslant b_jq_j\beta_j^{-2},\quad 1\leqslant j\leqslant d, \tag{5.1.15}$$

其中 $\mathrm{sgn}^+a=(\mathrm{sgn}\,a)^+$. 则对任何 $0\neq x_0\in\mathbf{R}^d$ 有

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\,t^{-1}\ln|x(t,x_0)|^2\leqslant\mu-2\nu,\text{a.s.}. \tag{5.1.16}$$

(ii) 设 $|a_{ij}|=|a_{ji}|$,且存在常数 $\mu,\nu\geqslant 0$,使得以下条件满足:

$$|\sigma(x)|^2\leqslant\mu|x|^2,\quad |x^{\mathrm{T}}\sigma(x)|^2\geqslant\nu|x|^4. \tag{5.1.17}$$

则对任何 $0\neq x_0\in\mathbf{R}^d$ 有

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{2}{t}\ln|x(t,x_0)|\leqslant\begin{cases}\mu-2\nu+2\check{b}(\check{\beta}-1), & \check{\beta}\leqslant 1,\\ \mu-2\nu+2\hat{b}(\check{\beta}-1), & \check{\beta}>1.\end{cases} \tag{5.1.18}$$

证 (i) 类似于定理5.1.1之证,对比(5.1.16)与(2.3.35a)可以看出,为证(5.1.16),只需判明 $2x^{\mathrm{T}}QAg(x)\leqslant 2x^{\mathrm{T}}QBx$. 这由以下推演得到:

$$2x^{\mathrm{T}}QAg(x)=2\sum_{i,j}q_ia_{ij}x_ig_j(x_j)$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\sum_{i,j} q_i |a_{ij}| (\operatorname{sgn} a_{ij}) x_i g_j(x_j) \\
&\leqslant 2\sum_{i,j} q_i |a_{ij}| (\operatorname{sgn}^+ a_{ij})^{\delta_{ij}} \beta_j |x_i x_j| \qquad (\text{用}(5.1.2)) \\
&\leqslant \sum_{i,j} q_i |a_{ij}| (\operatorname{sgn}^+ a_{ii})^{\delta_{ij}} (x_i^2 + \beta_j^2 x_j^2) \\
&\leqslant \sum_i b_i q_i x_i^2 + \sum_j b_j q_j x_j^2 = 2x^{\mathrm{T}} QBx. \qquad (\text{用}(5.1.15))
\end{aligned}
$$

(ii) 取 $Q = I$. 则由式(5.1.4)有

$$
\alpha = \frac{2x^{\mathrm{T}}Ag(x) - 2x^{\mathrm{T}}Bx}{|x|^2} + \frac{|\sigma(x)|^2}{|x|^2}, \quad \beta = \frac{2|x^{\mathrm{T}}\sigma(x)|^2}{|x|^4}.
$$

由条件(5.1.17)直接得到 $|\sigma(x)|^2 |x|^{-2} \leqslant \mu, \beta \geqslant 2\nu$. 于是对照(5.1.18)与(2.3.35a)看出,只需证

$$
\frac{x^{\mathrm{T}}Ag(x) - x^{\mathrm{T}}Bx}{|x|^2} \leqslant \begin{cases} \hat{b}(\check{\beta} - 1), & \check{\beta} \leqslant 1, \\ \check{b}(\check{\beta} - 1), & \check{\beta} > 1. \end{cases} \tag{5.1.19}
$$

为此估计

$$
\begin{aligned}
x^{\mathrm{T}}Ag(x) &= \sum_{i,j} a_{ij} x_i g_j(x_j) \leqslant \sum_{i,j} |a_{ij}| \beta_j |x_i x_j| \\
&\leqslant \frac{1}{2} \sum_{i,j} |a_{ij}| \beta_j (x_i^2 + x_j^2) \\
&\leqslant \check{\beta} \sum_i b_i x_i^2 = \check{\beta} x^{\mathrm{T}} Bx,
\end{aligned}
$$

最后一步用到 $|a_{ij}| = |a_{ji}|$ 与 $b_i = \sum_j |a_{ij}|$. 于是

$$
x^{\mathrm{T}}Ag(x) - x^{\mathrm{T}}Bx \leqslant (\check{\beta} - 1) x^{\mathrm{T}} Bx,
$$

由此显然推出式(5.1.19). 因此定理得证. □

5.1.2　随机稳定化

从应用的观点看来,很重要的问题是方程(5.1.1)是否有形如

$$
\mathrm{d}x(t) = [-Bx(t) + Ag(x(t))]\mathrm{d}t + \sum_k G_k x(t) \mathrm{d}w_k(t) \tag{5.1.20}
$$

的稳定化或不稳定化方程,其中 $G_k \in \mathbf{R}^{d \times d} (1 \leqslant k \leqslant m)$. 注意到

$$
|x^{\mathrm{T}}Ag(x)| \leqslant \|A\| |x| |g(x)| \leqslant \check{\beta} \|A\| |x|^2, \tag{5.1.21}
$$

对 $f(x) \triangleq -Bx + Ag(x)$ 必有

$$
|x^{\mathrm{T}} f(x)| \leqslant (\|B\| + \check{\beta} \|A\|) |x|^2.
$$

可见, $f(\cdot)$ 满足条件(2.3.48),而方程(5.1.20)则相当于扰动方程(2.3.47). 因此,由 2.3.4 节中的一般结论,关于方程(5.1.1)的随机稳定化的问题原则上已经解决,其结论就是:

(i) 方程(5.1.1)必有形如(5.1.20)的稳定化方程,且可用最简单的如下形式:

$$\mathrm{d}x(t) = [-Bx(t) + Ag(x(t))]\mathrm{d}t + \theta x(t)\mathrm{d}w(t), \tag{5.1.22}$$

其中 $\theta > 0$ 适当大, $w(t)$ 是一维 Brown 运动.

(ii) 若 $d \geqslant 2$, 则方程(5.1.1)必有形如(5.1.20)的不稳定化方程,这种方程具有方程(2.3.54a)或(2.3.54b)的形式.

但我们希望进一步知道,给定一个形如(5.1.20)的扰动方程, $G_k(1 \leqslant k \leqslant m)$ 要满足什么条件,方程(5.1.20)才是方程(5.1.1)的稳定化(或不稳定化)方程?这一问题当然不无意义.注意到 $f(x) = -Bx + Ag(x)$ 具有很特别的结构,而 $g(\cdot)$ 满足式(5.1.2)这样强的条件,我们应能得到比§2.3中更好的结果(例如与定理2.3.13比较).

取定正定矩阵 Q(暂不限定其为对角形),令 $\sigma(x) = [G_1x, G_2x, \cdots, G_mx]$, 则

$$|x^{\mathrm{T}}Q\sigma(x)|^2 = \sum_k (x^{\mathrm{T}}QG_kx)^2, \quad \mathrm{tr}[\sigma^{\mathrm{T}}(x)Q\sigma(x)] = x^{\mathrm{T}}Sx,$$

其中 $S = \sum G_k^{\mathrm{T}}QG_k$. 以此代入式(5.1.4)得

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{2x^{\mathrm{T}}QAg(x) + x^{\mathrm{T}}(S - QB - BQ)x}{x^{\mathrm{T}}Qx}, & (5.1.23\mathrm{a}) \\ \beta = 2(x^{\mathrm{T}}Qx)^{-2}\sum\limits_k (x^{\mathrm{T}}QG_kx)^2. & (5.1.23\mathrm{b}) \end{cases}$$

类似于(2.3.37)有

$$\frac{2}{\lambda_{\max}(Q^2)}\sum_k \lambda_{\min}^2(QG_k) \leqslant \beta \leqslant \frac{2\lambda_{\max}(N)}{\lambda_{\min}(Q^2)}, \quad N = \sum_k G_k^{\mathrm{T}}Q^2G_k, \tag{5.1.24}$$

但其中第一个不等号要求 QG_k 为半正定矩阵.此外,注意如下简单的代数结论:若 $M = M^{\mathrm{T}} \in \mathbf{R}^{d\times d}$, $\mu \in \mathbf{R}$, 则

$$x^{\mathrm{T}}Mx \leqslant \mu x^{\mathrm{T}}Qx (\forall x \in \mathbf{R}^d) \Leftrightarrow \mu Q - M \text{ 半正定}.$$

综合以上事实并用定理2.3.9,已不难得出以下结果.

定理 5.1.3 (i) 若存在正定矩阵 Q 与常数 μ_1, μ_2, 使得以下条件满足:

$$2x^{\mathrm{T}}QAg(x) \leqslant \mu_1 x^{\mathrm{T}}Qx, \quad \forall x \in \mathbf{R}^d, \tag{5.1.25}$$

$$\mu_2 Q + QB + BQ - S \text{ 半正定}, \quad S = \sum_k G_k^{\mathrm{T}}QG_k, \tag{5.1.26}$$

QG_k 均半正定,则对任给 $0 \neq x_0 \in \mathbf{R}^d$, 方程(5.1.20)的解 $x(t) = x(t, x_0)$ 满足

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{2}{t}\ln|x(t)| \leqslant \mu_1 + \mu_2 - \sum_k \frac{2\lambda_{\min}^2(QG_k)}{\lambda_{\max}(Q^2)}, \text{a. s.}. \tag{5.1.27}$$

(ii) 若存在正定矩阵 Q 与常数 λ_1, λ_2, 使得以下条件满足:

$$2x^{\mathrm{T}}QAg(x) \geqslant \lambda_1 x^{\mathrm{T}}Qx, \quad \forall x \in \mathbf{R}^d, \tag{5.1.28}$$

$$\lambda_2 Q + QB + BQ - S \text{ 半负定}, \tag{5.1.29}$$

则对任给 $0 \neq x_0 \in \mathbf{R}^d$, 方程(5.1.20)的解 $x(t) = x(t,x_0)$ 满足:

$$\underline{\lim}_{t\to\infty} \frac{2}{t}\ln|x(t)| \geqslant \lambda_1 + \lambda_2 - \frac{\lambda_{\max}(2N)}{\lambda_{\min}(Q^2)}, \text{a. s.}, \tag{5.1.30}$$

其中 $N = \sum G_k^{\mathrm{T}} Q^2 G_k$. 当 $Q\ G_k(1 \leqslant k \leqslant m)$ 反对称时

$$\underline{\lim}_{t\to\infty} t^{-1}\ln|x(t)|^2 \geqslant \lambda_1 + \lambda_2, \text{a. s.}. \tag{5.1.30$'$}$$

证 由条件(5.1.26)推出 $x^{\mathrm{T}}(S - BQ - QB)x \leqslant \mu_2 x^{\mathrm{T}} Qx(\forall x \in \mathbf{R}^d)$, 这与条件(5.1.25)及式(5.1.23a)一起推出 $\alpha \leqslant \mu_1 + \mu_2$. 然后结合式(5.1.24)得

$$\alpha - \beta \leqslant \mu_1 + \mu_2 - \sum_k \frac{2\lambda_{\min}^2(QG_k)}{\lambda_{\max}(Q^2)}.$$

于是,应用(2.3.35a)立得不等式(5.1.27).

类似可证不等式(5.1.30). 当 $Q\ G_k$ 反对称时, 有 $\beta = 0$, 因而易得式(5.1.30)$'$. □

为能应用式(5.1.27)或(5.1.30)得出稳定性或不稳定性结论,首先要确定其中的 $\mu_1, \mu_2, \lambda_1, \lambda_2$. 参照式(5.1.21)的推导可得

$$|2x^{\mathrm{T}} QAg(x)| \leqslant (2\check{\beta}\|QA\|/\lambda_{\min}(Q))x^{\mathrm{T}}Qx,$$

因此可取 $\mu_1 = 2\check{\beta}\|QA\|\lambda_{\min}(Q), \lambda_1 = -2\check{\beta}\|QA\|/\lambda_{\min}(Q)$. 至于 μ_2 与 λ_2, 其最佳选择是

$$\mu_2 = \min\{\mu \in \mathbf{R}: \mu Q + QB + BQ - S \text{ 半正定}\},$$
$$\lambda_2 = \max\{\lambda \in \mathbf{R}: \lambda Q + QB + BQ - S \text{ 半负定}\}.$$

在矩阵 B,Q,S 较简单的情况下,二者可通过计算 $\mu Q + QB + BQ - S$ 的特征值确定. 当然,亦可用其他更简单的方法求得可能稍大的 μ_2(或稍小的 λ_2).

例 5.1.4 (i) 取 $G_k = \theta_k I(1 \leqslant k \leqslant m)$, 则方程(5.1.20)可写成

$$\mathrm{d}x(t) = [-Bx(t) + Ag(x(t))]\mathrm{d}t + \sum_k \theta_k x(t)\mathrm{d}w_k(t). \tag{5.1.31}$$

若取 $Q = I$, 则依定理 5.1.3 中的记号依次有 $N = S = \sum \theta_k^2 I$,

$$\mu_1 = 2\check{\beta}\|A\|, \qquad \lambda_1 = -2\check{\beta}\|A\|,$$

$$\mu_2 = \sum_k \theta_k^2 - 2\hat{b}, \quad \lambda_2 = \sum_k \theta_k^2 - 2\check{b}.$$

设 $0 \neq x_0 \in \mathbf{R}^d, x(t) = x(t,x_0)$ 是方程(5.1.31)的解,则由式(5.1.27)与(5.1.30)分别得

$$\overline{\lim}_{t\to\infty} \frac{2}{t}\ln|x(t)| \leqslant 2\check{\beta}\|A\| - 2\hat{b} - \sum_k \theta_k^2, \text{a. s.}, \tag{5.1.32a}$$

$$\underline{\lim}_{t\to\infty} \frac{2}{t}\ln|x(t)| \geqslant -2\check{\beta}\|A\| - 2\check{b} - \sum_k \theta_k^2, \text{a. s.}. \tag{5.1.32b}$$

因(5.1.32b)右端为负,得不出什么不稳定结论. 另一方面,式(5.1.32a)表明,当

$$\sum_k \theta_k^2 > 2\check{\beta}\|A\| - 2\hat{b} \tag{5.1.33}$$

时,(5.1.31)是(5.1.1)的稳定化方程. 式(5.1.33)给出了为使方程(5.1.31)稳定而所需干扰的强度.

(ii) 仍取 $Q = I$; 但设 G_k 为正定矩阵,且

$$1/\sqrt{2} < r \leqslant \lambda_{\min}(G_k)/\lambda_{\max}(G_k), \quad 1 \leqslant k \leqslant m. \tag{5.1.34}$$

则 $S = \sum G_k^2$, $\mu_1 = 2\check{\beta}\|A\|$,

$$x^{\mathrm{T}}(\mu I + 2B - S)x \geqslant (\mu + 2\hat{b} - \sum_k \|G_k\|^2)|x|^2,$$

故取 $\mu_2 = \sum \|G_k\|^2 - 2\hat{b}$ 能使 $\mu_2 I + 2B - S$ 半正定. 其次,

$$\lambda_{\min}^2(G_k) \geqslant r^2\lambda_{\max}^2(G_k) = r^2\|G_k\|^2. \qquad (\text{用}(5.1.34))$$

设 $0 \neq x_0 \in \mathbf{R}^d$, $x(t) = x(t,x_0)$ 是方程(5.1.20)的解,则由式(5.1.27)有

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{2}{t}\ln|x(t)| \leqslant 2\check{\beta}\|A\| - 2\hat{b} - (2r^2 - 1)\sum_k \|G_k\|^2. \tag{5.1.35}$$

因由式(5.1.34)有 $2r^2 > 1$, 必要时以 θG_k 取代 G_k, $\theta > 0$ 适当大,就可使式(5.1.35)之右端为负,从而使方程(5.1.20)成为(5.1.1)的稳定化方程.

(iii) 设 d 为偶数. 取 $G_1 \in \mathbf{R}^{d\times d}$, 使得 $G_1^{\mathrm{T}} = -G_1$, $G_1^2 = -I$(参看2.3.4节). 设 $w(t)$ 是一维 Brown 运动,考虑方程

$$\mathrm{d}x(t) = [-Bx(t) + Ag(x(t))]\mathrm{d}t + \theta G_1 x(t)\mathrm{d}w(t). \tag{5.1.36}$$

仍取 $Q = I$, 并以 θG_1 代 G_1, $m = 1$ 用公式(5.1.30),注意 $\lambda_1 = -2\check{\beta}\|A\|$,

$$\lambda_2 = \max\{\lambda : (\lambda - \theta^2)I + 2B \text{ 半负定}\} = \theta^2 - 2\check{b},$$

于是由式(5.1.30)′得到:当 $0 \neq x_0 \in \mathbf{R}^d$ 时,方程(5.1.36)的解 $x(t,x_0)$ 满足:

$$\underline{\lim_{t\to\infty}} t^{-1}\ln|x(t,x_0)|^2 \geqslant -2\check{\beta}\|A\| + \theta^2 - 2\check{b}, \text{a.s.}.$$

因此,只要 $\theta^2 > 2\check{\beta}\|A\| + 2\check{b}$, 方程(5.1.36)就是(5.1.1)的不稳定化方程.

5.1.3 延迟神经网络

Hopfield(1982)首先考虑了带时滞的神经网络模型:

$$\dot{u}(t) = -Bu(t) + Ag(u_\tau(t)), \tag{5.1.37}$$

其中 $A, B, g(\cdot)$ 仍如方程(5.1.1),而

$$u_\tau(t) = (u_1(t-\tau_1), \cdots, u_d(t-\tau_d))^{\mathrm{T}},$$

$\tau_i \geqslant 0 (1 \leqslant i \leqslant d)$, $\tau = \max \tau_i > 0$. 由(5.1.37)自然地过渡到它的随机扰动系统:

$$\mathrm{d}x(t) = [-Bx(t) + Ag(y(t))]\mathrm{d}t + \sigma(x(t), y(t))\mathrm{d}w(t), \tag{5.1.38}$$

其中 $\sigma: \mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^{d\times m}$ 满足局部 Lipschitz 条件与线性增长条件, $\sigma(0,0) = 0$,

$$y(t) = (x_1(t-\tau_1), \cdots, x_d(t-\tau_d))^{\mathrm{T}}. \tag{5.1.39}$$

由存在定理(如定理 3.1.3),对每个 $\xi \in L^2_{\mathcal{F}_0}(\Omega, C)$, $C = C([-\tau, 0], \mathbf{R}^d)$, 方程(5.1.38)有唯一解 $x(t) = x(t,\xi)\,(t \geqslant -\tau)$, 使得 $x_0 = \xi$.

关于方程(5.1.38)的中心问题仍然是稳定性. 下面的结果颇为典型.

定理 5.1.5　设存在常数 $\lambda, \mu_i \in \mathbf{R}, \nu_i, q_i \geqslant 0$, 使 $\mu_i + \nu_i < \lambda\,(1 \leqslant i \leqslant d)$, $\lambda_{\max}(H) \leqslant -\lambda$, 其中

$$H = \begin{bmatrix} M - 2B & A \\ A^{\mathrm{T}} & -Q \end{bmatrix},$$

$$M = \operatorname{diag}(q_1\beta_1^2, q_2\beta_2^2, \cdots, q_d\beta_d^2), \quad Q = \operatorname{diag}(q_1, q_2, \cdots, q_d),$$

$$|\sigma(x,y)|^2 \leqslant \sum_i (\mu_i x_i^2 + \nu_i y_i^2) + \lambda |g(y)|^2, \quad x, y \in \mathbf{R}^d. \tag{5.1.40}$$

则对任何有界的初值 ξ, 方程(5.1.38)的解 $x(t,\xi)$ 满足:

$$\varlimsup_{t\to\infty} t^{-1}\ln \mathrm{E}|x(t,\xi)|^2 \leqslant -\gamma, \tag{5.1.41}$$

其中 $\gamma \leqslant \min(\lambda - \mu_i - \nu_i)$ 是以下方程的唯一正解:

$$\max_i [\gamma + \mu_i + \mathrm{e}^{\gamma\tau_i}(\nu_i + \gamma\beta_i^2 q_i \tau_i)] = \lambda. \tag{5.1.42}$$

因此,方程(5.1.38)的零解是均方指数稳定的.

定理 5.1.5 与 4.1.3 节中的定理的类似性是明显的,因此自然要采用 4.1.3 节中的证法,当然在具体步骤上还是有一些明显差异.

证　首先,容易确定定理所述的 γ 唯一存在. 取定有界的初值 ξ, 令 $x(t) = x(t,\xi)$, 只需证 $h(t) \triangleq \mathrm{e}^{\gamma t}\mathrm{E}|x(t)|^2$ 对 $t \geqslant 0$ 有界. 为此,用一个类似于(4.1.50)的 Liapunov 函数:

$$V(t,x) = |x|^2 + \sum_i q_i \int_{t-\tau_i}^t g_i^2(x_i(s))\,\mathrm{d}s.$$

类似于定理 4.1.22 之证,由定理 1.2.11 有

$$\begin{aligned} h(t) \leqslant{} & \mathrm{E}V(0, x(0)) + \mathrm{E}\int_0^t \gamma \mathrm{e}^{\gamma s}|x(s)|^2\mathrm{d}s \\ & + \sum_i \gamma q_i \mathrm{E}\int_0^t \mathrm{e}^{\gamma s}\mathrm{d}s \int_{s-\tau_i}^s g_i^2(x_i(\theta))\,\mathrm{d}\theta + \mathrm{E}\int_0^t \mathrm{e}^{\gamma s} LV(s, x(s))\,\mathrm{d}s \\ \triangleq{} & \text{const} + I_1 + I_2 + I_3. \end{aligned}$$

分别估计 $I_1 \sim I_3$ 如下:

$$I_1 = \gamma\int_0^t h(s)\,\mathrm{d}s,$$

$$\begin{aligned} I_2 & \leqslant \sum_i \gamma q_i \mathrm{E}\int_{-\tau_i}^t g_i^2(x_i(\theta))\,\mathrm{d}\theta \int_\theta^{\theta+\tau} \mathrm{e}^{\gamma s}\mathrm{d}s \\ & \leqslant \text{const} + \sum_i \gamma\beta_i^2 q_i \tau_i \mathrm{e}^{\gamma\tau_i}\int_0^t \mathrm{e}^{\gamma s}\mathrm{E}|x_i(s)|^2\mathrm{d}s, \qquad (\text{用}(5.1.2)) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
I_3 &= \mathrm{E}\int_0^t e^{\gamma s}\Big\{\sum_i q_i[g_i^2(x_i(s))-g_i^2(x_i(s-\tau_i)))]\\
&\quad +2x^{\mathrm{T}}(s)[-Bx(s)+Ag(y(s))]+|\sigma(x(s),y(s))|^2\Big\}\mathrm{d}s\\
&\leqslant \mathrm{E}\int_0^t e^{\gamma s}\Big[\sum_i(q_i\beta_i^2-2b_i)x_i^2(s)-g^{\mathrm{T}}(y(s))Qg(y(s))\\
&\quad +2x^{\mathrm{T}}(s)Ag(y(s))+|\sigma(x(s),y(s))|^2\Big]\mathrm{d}s\\
&= \mathrm{E}\int_0^t e^{\gamma s}\left\{(x^{\mathrm{T}}(s),g^{\mathrm{T}}(y(s)))H\begin{bmatrix}x(s)\\ g(y(x))\end{bmatrix}+|\sigma(x(s),y(s))|^2\right\}\mathrm{d}s\\
&\leqslant \mathrm{E}\int_0^t e^{\gamma s}\Big\{-\lambda|x(s)|^2+\sum_i[\mu_i|x_i(s)|^2+\nu_i|x_i(s-\tau_i)|^2]\Big\}\mathrm{d}s\\
&\leqslant \mathrm{const}-\lambda\int_0^t h(s)\mathrm{d}s+\sum_i(\mu_i+\nu_i e^{\gamma\tau_i})\int_0^t e^{\gamma s}\mathrm{E}|x_i(s)|^2\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

综上得到

$$
\begin{aligned}
h(t) &\leqslant \mathrm{const}+\sum_i[\gamma-\lambda+\mu_i+e^{\gamma\tau_i}(\nu_i+\gamma\beta_i^2q_i\tau_i)]\int_0^t e^{\gamma s}\mathrm{E}|x_i(s)|^2\mathrm{d}s\\
&\leqslant \mathrm{const}+c\int_0^t h(s)\mathrm{d}s,
\end{aligned}
$$

其中

$$
c=\gamma-\lambda+\max_i[\mu_i+e^{\gamma\tau_i}(\nu_i+\gamma\beta_i^2q_i\tau_i)]=0,\quad (\text{用}(5.1.42))
$$

这表明 $h(t)\leqslant \mathrm{const}$, 如所要证. □

条件(5.1.40)可代以如下两个较简单的条件之一:

$$
|\sigma(x,y)|^2\leqslant\mu|x|^2+\nu|y|^2+\lambda|g(y)|^2,\quad x,y\in\mathbf{R}^d, \tag{5.1.43}
$$

其中 $\mu\in\mathbf{R},\nu\geqslant 0$ 满足 $\mu+\nu<\lambda$; 或者

$$
|\sigma(x,y)|^2\leqslant\mu|x|^2+\lambda|g(y)|^2,\quad x,y\in\mathbf{R}^d, \tag{5.1.44}
$$

其中 $\mu<\lambda$. 在以上条件下, γ 所满足的条件自然应分别修改为

$$
\max_i[\gamma+e^{\gamma\tau_i}(\nu+\gamma\beta_i^2q_i\tau_i)]=\lambda-\mu,\quad 0<\gamma\leqslant\lambda-\mu-\nu \tag{5.1.42$'$}
$$

与

$$
\max_i(\gamma+\gamma\beta_i^2q_i\tau_ie^{\gamma\tau_i})=\lambda-\mu,\quad 0<\gamma\leqslant\lambda-\mu. \tag{5.1.42$''$}
$$

应用定理5.1.5的关键在于选择适当的正数组 $q_i(1\leqslant i\leqslant d)$ 使矩阵 H 负定. 设 $0\neq z=(x,y)\in\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d$, 今考察 $z^{\mathrm{T}}Hz<0$ 之条件. 算出

$$
z^{\mathrm{T}}Hz=2x^{\mathrm{T}}Ay-\sum_i[(2b_i-q_i\beta_i^2)x_i^2+q_iy_i^2],
$$

以下的分析依赖于估计 $x^{\mathrm{T}}Ay$, 下面分两种情况考虑.

首先,若完全不考虑矩阵 A 的结构,则只能用如下较粗的估计:

$$2x^{\mathrm{T}}Ay \leqslant 2\|A\| \, |x||y| \leqslant \|A\|(|x|^2 + |y|^2),$$

因而

$$z^{\mathrm{T}}Hz \leqslant (\|A\| - \min_i(2b_i - q_i\beta_i^2))|x|^2 + (\|A\| - \hat{q})|y|^2.$$

今取 q_i 使 $2b_i - q_i\beta_i^2 = q_i$，即

$$q_i = 2b_i/(1+\beta_i^2), \quad 1 \leqslant i \leqslant d, \quad \lambda = \hat{q} - \|A\|, \tag{5.1.45}$$

就有 $z^{\mathrm{T}}Hz \leqslant -\lambda|z|^2$，从而 $\lambda_{\max}(H) \leqslant -\lambda$.

其次，依据 A 的一定结构作更精细的估计. 设 $b_i = \sum_j |a_{ij}|$，则

$$2x^{\mathrm{T}}Ay \leqslant \sum_{i,j} |a_{ij}|(x_i^2 + y_j^2) = \sum_i b_i x_i^2 + \sum_{i,j} |a_{ij}| y_j^2.$$

于是

$$z^{\mathrm{T}}Hz \leqslant -\sum_i (b_i - q_i\beta_i^2)x_i^2 - \sum_i \left(q_i - \sum_j |a_{ji}|\right)y_i^2.$$

今取 q_i 使 $b_i - q_i\beta_i^2 = q_i - \sum_j |a_{ji}|$，即

$$q_i = (1+\beta_i^2)^{-1}\left(b_i + \sum_j |a_{ji}|\right)(1 \leqslant i \leqslant d), \quad \lambda \triangleq \min_i(b_i - \beta_i^2 q_i), \tag{5.1.46}$$

就有 $z^{\mathrm{T}}Hz \leqslant -\lambda|z|^2$，从而同样得出 $\lambda_{\max}(H) \leqslant -\lambda$. 若进而设 $|a_{ij}| = |a_{ji}|$，则式(5.1.46)简化为

$$q_i = 2b_i/(1+\beta_i^2)(1 \leqslant i \leqslant d), \quad \lambda = \min_i b_i(1-\beta_i^2)/(1+\beta_i^2). \tag{5.1.47}$$

注意此时 q_i 的表达式完全重合于式(5.1.45).

综合以上分析，从定理 5.1.5 得到

推论 5.1.6　设以下三条件之一满足：

(i) q_i，λ 依式(5.1.45)；

(ii) $b_i = \sum_j |a_{ij}|$，q_i，λ 依式(5.1.46)；

(iii) $|a_{ij}| = |a_{ji}|$，$b_i = \sum_j |a_{ij}|$，q_i，λ 依式(5.1.47).

若存在常数 $\mu_i \in \mathbf{R}$，$\nu_i \geqslant 0$，使得 $\mu_i + \nu_i < \lambda(1 \leqslant i \leqslant d)$，且条件(5.1.40)满足，则定理 5.1.5 的结论成立.

至于 a. s. 指数稳定性，则可直接利用定理 3.2.2，只要注意到，定理 3.2.2 中的条件(3.1.30a)可从关于函数 $\sigma(x,y)$ 的以下条件推出：

$$|\sigma(x,y)|^2 \leqslant K(|x|^2 + |y|^2), \quad x,y \in \mathbf{R}^d, \tag{5.1.48}$$

其中 K 是正常数. 因此，我们有以下结果：

定理 5.1.7　设条件(5.1.48)满足. 若方程(5.1.38)的零解是均方指数稳定的，则亦必是 a. s. 指数稳定的. 特别，在定理 5.1.5 或推论 5.1.6 的条件下，方程(5.1.38)的零解是 a. s. 指数稳定的.

对于方程(5.1.38)的稳定性，除了基于特殊 Liapunov 函数的以上方法之外，

还有基于 Razumikhin 型定理及指数鞅不等式的结果,今各举一例如下.

定理 5.1.8 设存在常数μ,ν,λ, 使得条件(5.1.43)及以下条件满足:

$$2\hat{b} > 2\check{\beta}\|A\| + \mu + \nu + \lambda\check{\beta}^2, \tag{5.1.49}$$

则方程(5.1.38)的零解均方指数稳定与 a.s. 指数稳定.

证 只需套用定理 3.2.4. 令 $F(x,y) = -Bx + Ag(y)$, 则可验证:

$$x^{\mathrm{T}}F(x,0) = -x^{\mathrm{T}}Bx \leqslant -\hat{b}|x|^2,$$

$$|F(x,0) - F(x,y)| = |Ag(y)| \leqslant \|A\|\check{\beta}|y|, \quad (\text{用}(5.1.2))$$

$$|\sigma(x,y)| \leqslant \mu|x|^2 + (\nu + \lambda\check{\beta}^2)|y|^2, \quad (\text{用}(5.1.43))$$

然后用式(5.1.49)验明(3.2.16d)(取 $p = 2$),就可用定理 3.2.4 得所要证. □

定理 5.1.9 设存在常数$\mu,\mu_1,\lambda,\lambda_1$, 使得条件(5.1.44)及以下条件满足:

$$|x^{\mathrm{T}}\sigma(x,y)|^2 \geqslant |x|^2[\mu_1|x|^2 + \lambda_1|g(y)|^2], \quad x,y \in \mathbf{R}^d, \tag{5.1.50}$$

$$2\hat{b} + 2\mu_1 - \mu > \|A\|^2/(2\lambda_1 - \lambda) > 0. \tag{5.1.51}$$

若 $x(t) = x(t,\xi)$ 是方程(5.1.38)的解, $x(t) \neq 0$, a.s. ($\forall t \geqslant 0$), 则

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} t^{-1}\ln|x(t)|^2 \leqslant -\gamma, \text{a.s.}, \tag{5.1.52}$$

其中 $\gamma = 2\hat{b} + 2\mu_1 - \mu - \|A\|^2/(2\lambda_1 - \lambda)$.

这是定理 4.2.30 的直接推论.

下面用若干例子来解释上面所得的结论.

例 5.1.10 考虑如下二维系统

$$\mathrm{d}x(t) = [-Bx(t) + Ag(y(t))]\mathrm{d}t + Gg(y(t))\mathrm{d}w(t), \tag{5.1.53}$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad G \in \mathbf{R}^{2\times 2},$$

$$g(y(t)) = [g_1(x_1(t-\tau_1)), g_2(x_2(t-\tau_2))]^{\mathrm{T}},$$

其中 $g_1(u) = g_2(u) = \tanh u$. 直接看出 $g(\cdot)$ 满足条件(5.1.2)(取$\beta_1 = \beta_2 = 1$).

(i) 应用定理 5.1.5. 取 $q_1 = 4, q_2 = 3$, 得到矩阵

$$H = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -4 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

不难算出

$$\det(\lambda I - H) = \lambda^4 + 14\lambda^3 + 63\lambda^2 + 101\lambda + 48,$$

$$\lambda_{\max}(H) = -\lambda = -0.8318.$$

取 $\mu = 0$, 则当 $\|G\|^2 \leqslant \lambda$ 时 $\sigma = Gg(y)$ 满足条件(5.1.44). 于是由定理 5.1.5 得出,当 $\|G\|^2 \leqslant 0.8318$ 时方程(5.1.53)的零解均方指数稳定且 a.s. 指数稳定.

(ii) 应用推论 5.1.6. 首先,由

$$A^{\mathrm{T}}A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}, \quad \sigma(A^{\mathrm{T}}A) = \{8,2\}$$

得 $\|A\| = \sqrt{8}$; 然后由式(5.1.45)算出 $\lambda = 3 - \|A\| = 0.1716$. 这就由推论 5.1.6 得出,当 $\|G\|^2 \leqslant 0.1716$ 时,方程(5.1.53)的零解均方指数稳定与 a.s. 指数稳定.

(iii) 应用定理 5.1.8. 取 $\mu = \nu = 0, \lambda = \|G\|^2$ 使 $\sigma = Gg(y)$ 满足条件(5.1.43). 注意 $\check{b} = 3, \check{\beta} = 1, \|A\| = \sqrt{8}$, 代入不等式(5.1.49)解出

$$\|G\|^2 = \lambda < 2(3 - \sqrt{8}) = 0.3431.$$

因此由定理5.1.8 得出,当 $\|G\|^2 < 0.3431$ 时, 方程(5.1.53)的零解均方指数稳定与 a.s. 指数稳定.

比较以上三种解法看出,第一种方法直接算出了 H 的特征值,结果最好;应用推论5.1.6 免去了计算特征值,比较简捷地求出了 λ, 但结果差了很多;应用定理 5.1.8 的效果则介于前两者之间.

例 5.1.11　考虑方程(5.1.53)的如下推广:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x(t) = {} & [-Bx(t) + Ag(y(t))]\mathrm{d}t + G_1x(t)\mathrm{d}w_1(t) \\ & + G_2y(t)\mathrm{d}w_2(t) + G_3g(y(t))\mathrm{d}w_3(t), \end{aligned} \tag{5.1.54}$$

其中 $A,B,g(y(t))$ 仍如方程(5.1.53),而 $G_i \in \mathbf{R}^{2\times2}(i = 1,2,3), w = (w_1,w_2,w_3)^{\mathrm{T}}$ 是三维 Brown 运动. 令 $\sigma(x,y) = (G_1x, G_2y, G_3g(y))(x,y \in \mathbf{R}^2)$, 则

$$|\sigma(x,y)|^2 \leqslant \|G_1\|^2|x|^2 + \|G_2\|^2|y|^2 + \|G_3\|^2|g(y)|^2.$$

(i) 应用定理 5.1.5. 若 $\|G_1\|^2 + \|G_2\|^2 < \lambda = 0.8318, \|G_3\|^2 \leqslant \lambda$, 则方程(5.1.54)的零解均方指数稳定且 a.s. 指数稳定.

(ii) 应用定理 5.1.8. 若 $\|G_1\|^2 + \|G_2\|^2 + \|G_3\|^2 < 0.3431$, 则方程(5.1.54)的零解均方指数稳定且 a.s. 指数稳定.

例 5.1.12　考虑三维系统

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x(t) = {} & [-Bx(t) + Ag(y(t))]\mathrm{d}t \\ & + G_1x(t)\mathrm{d}w_1(t) + G_2h(y(t))\mathrm{d}w_2(t), \end{aligned} \tag{5.1.55}$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 3 & \\ & & 4 \end{bmatrix}, \quad G_1, G_2 \in \mathbf{R}^{3\times3},$$

$$y(t) = (x_1(t-\tau_1), x_2(t-\tau_2), x_3(t-\tau_3))^{\mathrm{T}},$$

$$g_i(u) = (1 \wedge 0.5u) \vee (-1), \quad h_i(u) = \sin u, \quad 1 \leqslant i \leqslant 3.$$

取 $\beta_i = 0.5(1 \leqslant i \leqslant 3)$ 知 $g(\cdot)$ 满足条件(5.1.2). 若令 $\sigma(x,y) = (G_1x,$

$G_2h(y))$，则

$$|\sigma(x,y)|^2 \leqslant \|G_1\|^2|x|^2 + 4\|G_2\|^2|g(y)|^2,$$

其中用到不等式 $|h_i(u)| \leqslant 2|g_i(u)|$.

(i) 应用推论 5.1.6. 易看出推论 5.1.6 中的条件(iii)满足；依式(5.1.47)算出 $\lambda = 1.2$. 于是当 $\|G_1\|^2 < 1.2$, $\|G_2\|^2 \leqslant 0.3$ 时 $\sigma(x,y)$ 满足条件(5.1.44)，方程(5.1.55)的零解均方指数稳定且 a.s. 指数稳定.

(ii) 应用定理 5.1.8. 首先算出 $\|A\| = 3.214$；以此及 $\hat{b} = 2, \check{\beta} = 0.5, \mu = \|G_1\|^2, \nu = 0, \lambda = 4\|G_2\|^2$ 代入不等式(5.1.49)得

$$\|G_1\|^2 + \|G_2\|^2 < 0.786.$$

当以上条件满足时方程(5.1.55)的零解均方指数稳定且 a.s. 指数稳定.

注意以上两种结果互相不可比较.

5.1.4 Markov 调制的随机神经网络

方程(5.1.38)的 Markov 调制形式为

$$dx(t) = [-B_r x(t) + A_r g_r(y(t))]dt + \sigma(x(t),y(t),r(t))dw(t), \qquad (5.1.56)$$

其中 $r(t)$ 及与之有关的设定依 §4.5，r 作为下标时表示 $r(t)$；$A_i, B_i \in \mathbf{R}^{d\times d}$，$y(t)$ 仍依式(5.1.39)；$g_i(y) = (g_{i1}(y_1),\cdots,g_{id}(y_d))^{\mathrm{T}}(y = (y_j) \in \mathbf{R}^d)$. 总假定 $i \in S$，下面不另标注. 类似于条件(5.1.2)，假定存在正常数 β_{ij} 使得

$$|g_{ij}(u)| \leqslant \beta_{ij}|u|, \quad u \in \mathbf{R}, 1 \leqslant j \leqslant d. \qquad (5.1.57)$$

与 5.1.3 节中不同，在本小节中使用一个参照函数 $\psi(t)$. 依 $\psi' < 0$ 与 $\psi' > 0$，对 $\psi(t)$ 分别沿用 §4.1 与 §4.2 中的设定与记号. 此外假定

$$\rho_j \triangleq \sup_{t\geqslant 0} \psi(t-\tau_j)/\psi(t) < \infty, \quad 1 \leqslant j \leqslant d. \qquad (5.1.58)$$

注意当 $\psi' < 0$ 时 $\rho_j \geqslant 1$，当 $\psi' > 0$ 时 $0 < \rho_j \leqslant 1$.

首先推广定理 5.1.5，为此要用的方法与定理 5.1.5 实质上无异. 特别，要使用一个类似的 Liapunov 函数

$$V(t,x,i) = |x|^2 + \sum_j q_{ij}\int_{t-\tau_j}^t g_{ij}^2(x_j(s))ds, \qquad (5.1.59)$$

其中 $q_{ij} \geqslant 0$ 是待定参数，$x(t) = (x_j(t))$ 是方程(5.1.56)的某个给定的解. 尽管沿用老的思路，但因对 $i \in S$ 的依赖致使在记号上呈现出较大的复杂性.

定理 5.1.13 设存在常数 $\lambda_i, \mu_{ij} \in \mathbf{R}$ 与 $\nu_{ij}, q_{ij} \geqslant 0(1 \leqslant j \leqslant d)$，使得

$$\begin{cases} \lambda_{\max}(H_i) \leqslant -\lambda_i, \quad H_i = \begin{bmatrix} M_i - 2B_i & A_i \\ A_i^{\mathrm{T}} & -Q_i \end{bmatrix}, \\ M_i = \mathrm{diag}(\beta_{i1}^2 q_{i1},\cdots,\beta_{id}^2 q_{id}), \quad Q_i = \mathrm{diag}(q_{i1},\cdots,q_{id}), \end{cases} \qquad (5.1.60)$$

$$|\sigma(x,y,i)|^2 \leqslant \lambda_i|g_i(y)|^2 + \sum_j(\mu_{ij}x_j^2 + \nu_{ij}y_j^2), \quad x,y \in \mathbf{R}^d. \qquad (5.1.61)$$

(i) 若 $\psi'(t)<0$，且以下条件满足:

$$\alpha_{ij}\triangleq\mu_{ij}+\nu_{ij}+\sum_{k\neq i}\gamma_{ik}\beta_{ki}^2q_{kj}\tau_j<\lambda_i,\quad 1\leqslant j\leqslant d,\tag{5.1.62}$$

则方程(5.1.56)的零解均方 ψ^γ 稳定，γ 是以下方程的唯一正解:

$$\max_{i,j}\left[\mu_{ij}+\gamma\phi-\lambda_i+\rho_j^\gamma\left(\nu_{ij}+\gamma\phi\beta_{ij}^2q_{ij}\tau_j+\sum_{k\neq i}\gamma_{ik}\beta_{kj}^2q_{kj}\tau_j\right)\right]=0,\tag{5.1.63}$$

其中 ϕ 依(4.1.4)，ρ_j 依式(5.1.58)；必定 $\gamma\leqslant(\lambda_i-\alpha_{ij})/\phi(i\in S,1\leqslant j\leqslant d)$.

(ii) 若 $\psi'(t)>0$，ϕ 依(4.2.4)，ρ_j 依式(5.1.58)，常数 $\gamma\geqslant 0$ 满足

$$\mu_{ij}+\rho_j^\gamma\nu_{ij}-\gamma\phi+\sum_{k\neq i}\gamma_{ik}\beta_{kj}^2q_{kj}\tau_j\leqslant\lambda_i,\quad 1\leqslant j\leqslant d,\tag{5.1.64}$$

则方程(5.1.56)的解均方 ψ^γ 有界，当 $\alpha_{ij}\leqslant\lambda_i$（$\alpha_{ij}$ 依(5.1.62)）时方程(5.1.56)的解均方有界.

证　(i) 用通常的方法易验知方程(5.1.63)有唯一正解 γ，且 $\gamma\leqslant(\lambda_i-\alpha_{ij})/\phi(1\leqslant j\leqslant d)$. 取定方程(5.1.56)的一个解 $x(t)=x(t,\xi)$ ，只要证 $h(t)\triangleq\psi^{-\gamma}(t)\mathrm{E}|x(t)|^2$ 有界. 设 V 依式(5.1.59)，则

$$\begin{aligned}
h(t)\leqslant&\ \mathrm{const}+\mathrm{E}\int_0^t\psi^{-\gamma}(s)[LV(s,x(s),r(s))-\gamma\psi_1(s)V(s,x(s),r(s))]\mathrm{d}s\\
\leqslant&\ \mathrm{const}+\mathrm{E}\int_0^t\psi^{-\gamma}(s)\Big\{2x^{\mathrm{T}}(s)[-B_rx(s)+A_rg_r(y(s))]\\
&+|\sigma(x(s)),y(s),r(s))|^2+\sum_j q_{rj}[g_{rj}^2(x_j(s))-g_{rj}^2(y_j(s))]\\
&+\sum_k\gamma_{rk}\sum_j q_{kj}\int_{s-\tau_j}^s q_{kj}^2(x_j(\theta))\mathrm{d}\theta\\
&+\gamma\phi|x(s)|^2+\gamma\phi\sum_j q_{rj}\int_{s-\tau_j}^s g_{rj}^2(x_j(\theta))\mathrm{d}\theta\Big\}\mathrm{d}s\\
\leqslant&\ \mathrm{const}+\mathrm{E}\int_0^t\psi^{-\gamma}(s)\Big\{[x^{\mathrm{T}}(s),g_r^{\mathrm{T}}(y(s))]H_r\begin{bmatrix}x(s)\\ g_r(y(s))\end{bmatrix}\\
&+|\sigma(x(s),y(s),r(s))|^2+\gamma\phi|x(s)|^2\Big\}\mathrm{d}s\\
&+\mathrm{E}\sum_j\Big(\gamma\phi\beta_{rj}^2q_{rj}+\sum_{k\neq r}\gamma_{rk}\beta_{kj}^2q_{kj}\Big)\int_0^t\psi^{-\gamma}(s)\mathrm{d}s\int_{s-\tau_j}^s x_j^2(\theta)\mathrm{d}\theta\\
\leqslant&\ \mathrm{const}+\mathrm{E}\int_0^t\psi^{-\gamma}(s)\Big\{(\gamma\phi-\lambda_r)|x(s)|^2+\sum_j[\mu_{rj}x_j^2(s)+\nu_{rj}y_j^2(s)]\Big\}\mathrm{d}s\\
&+\mathrm{E}\sum_j\Big(\gamma\phi\beta_{rj}^2q_{rj}+\sum_{k\neq r}\gamma_{rk}\beta_{kj}^2q_{kj}\Big)\int_{-\tau_j}^t x_j^2(\theta)\mathrm{d}\theta\int_\theta^{\theta+\tau_j}\psi^{-\gamma}(s)\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

$$\leqslant \text{const} + \mathrm{E}\sum_j \left[\gamma\phi - \lambda_r + \sum_j (\mu_{rj} + \rho_j^\gamma \nu_{rj})\right]\int_0^t \psi^{-\gamma}(s)x_j^2(s)\mathrm{d}s$$

$$+ \mathrm{E}\sum_j \left(\gamma\phi\beta_{rj}^2 q_{rj} + \sum_{k\neq r}\gamma_{rk}\beta_{kj}^2 q_{kj}\right)\tau\rho_j^\gamma\int_0^t \psi^{-\gamma}(\theta)x_j^2(\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$\leqslant \text{const},$$

最后一步用了式(5.1.63). 故如所要证.

(ii) 设 $\gamma \geqslant 0$ 满足式(5.1.64),仍如上段一样估计 $h(t)$,仅有少量差异:

$$h(t) \leqslant \text{const} + \mathrm{E}\int_0^t \psi^{-\gamma}(s)\left\{-\lambda_r |x(s)|^2 + \sum_j [\mu_{rj}x_j^2(s) + \nu_{rj}y_j^2(s)]\right.$$

$$+ \sum_{k\neq r}\sum_j \gamma_{rk}\beta_{kj}^2 q_{kj}\int_{s-\tau_j}^s x_j^2(\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$\left. - \gamma\phi |x(s)|^2 - \gamma\phi\sum_j q_{rj}\int_{s-\tau_j}^s g_{rj}^2 x_j(\theta)\mathrm{d}\theta\right\}\mathrm{d}s$$

$$\leqslant \text{const} + \mathrm{E}\sum_j \left[(\mu_{rj} - \lambda_r - \gamma\phi)\int_0^t \psi^{-\gamma}(s)x_j^2(s)\mathrm{d}s + \nu_{rj}\int_0^t \psi^{-\gamma}(s)y_j^2(s)\mathrm{d}s\right.$$

$$\left. + \sum_{k\neq r}\gamma_{rk}\beta_{kj}^2 q_{kj}\int_0^t x_j^2(\theta)\mathrm{d}\theta\int_\theta^{\theta+\tau_j}\psi^{-\gamma}(s)\mathrm{d}s\right]$$

$$\leqslant \text{const} + \mathrm{E}\sum_j \left(\mu_{rj} - \lambda_r - \gamma\phi + \rho_j^\gamma\nu_{rj} + \sum_{k\neq r}\gamma_{rk}\beta_{kj}^2 q_{kj}\tau_j\right)\int_0^t \psi^{-\gamma}(s)x_j^2(s)\mathrm{d}s$$

$$\leqslant \text{const},$$

最后一步用了条件(5.1.64). 故同样得出所要结论. □

定理 5.1.13 包含了许多特殊结论. 首先,取 $\psi(t) = \mathrm{e}^{-t}$,由定理 5.1.13 得

推论 5.1.14 设存在常数 $\lambda_i, \mu_{ij} \in \mathbf{R}$ 与 $\nu_{ij}, q_{ij} \geqslant 0 (1 \leqslant j \leqslant d)$,使条件(5.1.60) ~ (5.1.62)满足,则方程(5.1.56)的零解均方指数稳定,且成立

$$\varlimsup_{t\to\infty} t^{-1}\ln \mathrm{E}|x(t,\xi)|^2 \leqslant -\gamma,$$

其中 $\gamma \leqslant \lambda_i - \alpha_{ij} (1 \leqslant j \leqslant d, \alpha_{ij}$ 依式(5.1.62))是以下方程的唯一正解:

$$\max_{i,j}\left[\mathrm{e}^{\gamma\tau_j}\left(\nu_{ij} + \gamma\beta_{ij}^2 q_{ij}\tau_j + \sum_{k\neq i}\gamma_{ik}\beta_{kj}^2 q_{kj}\tau_j\right) + \mu_{ij} + \gamma - \lambda_i\right] = 0.$$

若进而设 $\gamma_{ij} = 0, \lambda_i, \mu_{ij}, \nu_{ij}, q_{ij}, \beta_{ij}$ 等均与 $i \in S$ 无关,则由推论 5.1.14 得到定理 5.1.5. 由此可见,定理 5.1.13 是定理 5.1.5 的完全推广.

如同定理 5.1.13 一样,关键是如何选择 q_{ij}. 最简单的选择是取 $q_{ij} = 0$.

定理 5.1.15 设存在常数 $\lambda_i, \mu_{ij} \in \mathbf{R}$ 与 $\nu_{ij} \geqslant 0$,使条件(5.1.61)满足,且

$$\lambda_{\max}(H_i) \leqslant -\lambda_i, \quad H_i = \begin{bmatrix} -2B_i & A_i \\ A_i^{\mathrm{T}} & 0 \end{bmatrix}. \tag{5.1.65}$$

(i) 若 $\psi'(t) < 0, \alpha_{ij} \triangleq \mu_{ij} + \nu_{ij} < \lambda_i (1 \le j \le d)$，则方程(5.1.56)的零解均方 ψ^γ 稳定，$\gamma \le (\lambda_i - \alpha_{ij})/\phi (1 \le j \le d)$ 是以下方程的唯一正解：

$$\max_{i,j}(\mu_{ij} + \rho_j^\gamma \nu_{ij} + \gamma\phi - \lambda_i) = 0, \tag{5.1.66}$$

其中 ρ_j 依式(5.1.58)，ϕ 依(4.1.4)。

(ii) 若 $\psi'(t) > 0$，常数 $\gamma \ge 0$ 满足

$$\mu_{ij} + \rho_j^\gamma \nu_{ij} - \gamma\phi \le \lambda_i, \quad 1 \le j \le d, \tag{5.1.67}$$

其中 ϕ 依(4.2.4)，则方程(5.1.56)的解均方 ψ^γ 有界；当 $\mu_{ij} + \nu_{ij} \le \lambda_i (1 \le j \le d)$ 时方程(5.1.56)的解均方有界.

如同在定理 5.1.5 中一样，若要更精细地选定 q_{ij}，就必须适当地限定矩阵 A_i 与 B_i. 首先指出，为选择 q_{ij} 使 $\lambda_{\max}(H_i) \le -\lambda_i$，仅要考虑表如式(5.1.60)的矩阵 H_i，而与定理 5.1.13 中的其他条件无关. 这就完全可用 5.1.3 节中的方法，因而可直接写出以下结果：设 $B_i = \operatorname{diag}(b_{i1}, \cdots, b_{id})$，$b_{ij} > 0 (1 \le j \le d)$. 则在以下三种情况下有 $\lambda_{\max}(H_i) \le -\lambda_i$：

(i) 取 $q_{ij} = 2b_{ij}/(1 + \beta_{ij}^2)$，$\lambda_i = \min_j (q_{ij} - \| A_i \|) (1 \le j \le d)$.

(ii) 设 $A_i = [a_{jk}^i]$，$b_{ij} = \sum_k | a_{jk}^i |$，则取

$$q_{ij} = \frac{b_{ij} + \sum_k | a_{jk}^i |}{1 + \beta_{ij}^2}, \quad \lambda_i = \min_j \frac{b_{ij} - \beta_{ij}^2 \sum_k | a_{kj}^i |}{1 + \beta_{ij}^2}, \quad 1 \le j \le d.$$

(iii) 设 $A_i = [a_{jk}^i] = A_i^{\mathrm{T}}$，$b_{ij} = \sum_k | a_{jk}^i |$，则取

$$q_{ij} = \frac{2b_{ij}}{1 + \beta_{ij}^2}, \quad \lambda_i = \min_j \frac{b_{ij}(1 - \beta_{ij}^2)}{1 + \beta_{ij}^2}, \quad 1 \le j \le d.$$

§5.2　Lotka-Volterra 系统

为描述种群动力系统而引入的 Lotka-Volterra 模型(下面简称为 LV 模型或 LV 系统)已有颇长的研究历史. 至于考虑其随机形式的推广，则是最近几年的事. 在随机 LV 系统的研究中，一个令人注目的重大发现是，一定的随机干扰能有效地抑制系统的爆破，从而保证系统的正整体解存在，而且使其解具有良好的渐近性质. 鉴于随机 LV 系统结构特殊且有重要应用价值(除传统的生物学应用之外，在经济学中亦有有趣应用，见 5.3.3 节)，近年来它受到广泛关注，有关的文献甚多，Mao 等人的工作尤受注意.

本节内容将主要作为 §4.6 中一般理论的一个应用得出，独立的论证不多，因此不妨处理得尽可能简略些. 如同在 §4.6 中一样，中心问题是正整体解的存在性、矩有界性与渐近轨道估计. 我们将首先考虑一般形式的 LV 系统，然后转移到

具变动时滞的 LV 系统,并讨论某些最受关注的特例. 本节沿用 §4.6 中的所有术语、记号与约定,不另作说明.

5.2.1 一般 LV 系统

首先考虑如下一般形式的 LV 系统:

$$\mathrm{d}x(t) = \mathrm{diag}(x(t))[f(x(t),x_t)\mathrm{d}t + g(x(t),x_t)\mathrm{d}w(t)], \quad (5.2.1)$$

其中 f 与 g 均为 $\mathbf{R}^d_{++}\times C_{++}$ 上局部 Lipschitz 连续的 $\mathbf{R}^d$ 值函数; $w(t)$ 为一维 Brown 运动. 方程(5.2.1)的特例是

$$\mathrm{d}x(t) = \mathrm{diag}(x(t))[f(x(t),x_t)\mathrm{d}t + g(x(t))\mathrm{d}w(t)], \quad (5.2.2)$$

$$\mathrm{d}x(t) = \mathrm{diag}(x(t))[f(x(t))\mathrm{d}t + g(x(t),x_t)\mathrm{d}w(t)], \quad (5.2.3)$$

$$\mathrm{d}x(t) = \mathrm{diag}(x(t))[f(x(t))\mathrm{d}t + g(x(t))\mathrm{d}w(t)]. \quad (5.2.4)$$

对于方程(5.2.1),本节集中考虑如下基本问题:

(A) 对于 $\xi\in C_{++}$, 方程(5.2.1)是否存在唯一正整体解 $x(t,\xi)$?

(B) 对于方程(5.2.1)的正整体解 $x(t,\xi)$ 与 $p>0$, 是否存在与 ξ 无关的正常数 K, 使得

$$\varlimsup_{t\to\infty}\mathrm{E}|x(t,\xi)|^p \leqslant K? \quad (5.2.5)$$

(C) 对于方程(5.2.1)的正整体解 $x(t)$ 与 $p>0$, 是否成立

$$\varlimsup_{t\to\infty}\frac{\ln|x(t)|^p}{\ln t}\leqslant 1,\text{a.s.}? \quad (5.2.6)$$

若取 $p=1$ 与令 $p\to\infty$, 则从不等式(5.2.6)分别得

$$\varlimsup_{t\to\infty}\frac{\ln|x(t)|}{\ln t}\leqslant 1,\text{a.s.}, \quad (5.2.7)$$

$$\varlimsup_{t\to\infty}\frac{\ln|x(t)|}{\ln t}\leqslant 0,\text{a.s.}. \quad (5.2.8)$$

显然,不等式(5.2.8)成立⇔不等式(5.2.6)对任何 $p>0$ 成立.

解答以上问题所需的条件可从 §4.6 中的相应条件改进得到. 下面列出这些备择条件,总假设其中 $x\in\mathbf{R}^d_{++},\varphi\in C_{++},1\leqslant i\leqslant d$, 并不逐一注明.

(H_1) 存在常数 $\alpha>0,\kappa,\bar{\kappa}\in\mathbf{R}^d_+$ 与 $[-\tau,0]$ 上的概率测度 μ_i, 使得

$$|f_i(x,\varphi)|\leqslant\kappa_i|x|^\alpha+\bar{\kappa}_i\int_{-\tau}^0|\varphi(\theta)|^\alpha\mathrm{d}\mu_i+o(|x|^\alpha).$$

(H_2) 存在常数 $\beta>0,\lambda,\bar{\lambda}\in\mathbf{R}^d_+$ 与 $[-\tau,0]$ 上的概率测度 ν_i, 使得

$$|g_i(x,\varphi)|\leqslant\lambda_i|x|^\beta+\bar{\lambda}_i\int_{-\tau}^0|\varphi(\theta)|^\beta\mathrm{d}\nu_i+o(|x|^\beta).$$

(H_3) 存在常数 $\beta>0,b\in\mathbf{R}^d_{++},\sigma\in\mathbf{R}^d_+$ 与 $[-\tau,0]$ 上的概率测度 $\bar{\nu}_i$, 使得

$$g_i^2(x,\varphi)\geqslant b_ix_i^{2\beta}-\sigma_i\int_{-\tau}^0|\varphi(\theta)|^{2\beta}\mathrm{d}\bar{\nu}_i+o(|x|^{2\beta}).$$

(H_4) 存在 $c\in\mathbf{R}^d_{++}$，常数 $\alpha,b,p>0,\sigma\geqslant 0$ 与 $[-\tau,0]$ 上的概率测度 $\bar{\mu}$，使得

$$\sum_i c_i x_i^p f_i(x,\varphi)\leqslant -b|x|^{\alpha+p}+\sigma\int_{-\tau}^0|\varphi(\theta)|^{\alpha+p}\mathrm{d}\bar{\mu}+o(|x|^{\alpha+p}).$$

(F_1) 存在常数 $\alpha>0,\kappa,\bar{\kappa}\geqslant 0$ 与 $[-\tau,0]$ 上的概率测度 μ，使得

$$\|f(x,\varphi)\|_\infty\leqslant\kappa|x|^\alpha+\bar{\kappa}\int_{-\tau}^0|\varphi(\theta)|^\alpha\mathrm{d}\mu+o(|x|^\alpha).$$

(F_2) 存在常数 $\beta>0,\lambda,\bar{\lambda}\geqslant 0$ 与 $[-\tau,0]$ 上的概率测度 ν，使得

$$\|g(x,\varphi)\|_\infty\leqslant\lambda|x|^\beta+\bar{\lambda}\int_{-\tau}^0|\varphi(\theta)|^\beta\mathrm{d}\nu+o(|x|^\beta).$$

(F_3) 存在 $c\in\mathbf{R}^d_{++}$，常数 $\beta,b>0,\sigma\geqslant 0$ 与 $[-\tau,0]$ 上的概率测度 $\bar{\nu}$，使得

$$|x|^{-2}[x^{\mathrm{T}}\bar{C}g(x,\varphi)]^2\geqslant b|x|^{2\beta}-\sigma\int_{-\tau}^0|\varphi(\theta)|^{2\beta}\mathrm{d}\bar{\nu}+o(|x|^{2\beta}),$$

其中 $\bar{C}=\mathrm{diag}(c)$.

(F_4) 存在 $c\in\mathbf{R}^d_{++}$，常数 $\alpha,b>0,\sigma\geqslant 0$ 与 $[-\tau,0]$ 上的概率测度 $\bar{\mu}$，使得

$$|x|^{-1}x^{\mathrm{T}}\bar{C}f(x,\varphi)\leqslant -b|x|^\alpha+\sigma\int_{-\tau}^0|\varphi(\theta)|^\alpha\mathrm{d}\bar{\mu}+o(|x|^\alpha).$$

此处仍沿用4.6.1节对条件所作的说明，也保持记号 (H_i') 与 (F_i') ($1\leqslant i\leqslant 4$) 的意义. 只是强调条件 (H_1) ~ (H_4) 与 (F_1) ~ (F_4) 之间的以下关系：(F_i) $\Rightarrow$ (H_i) ($i=1,2$)；当条件 (F_4) 满足时，取 $p=1$ 使条件 (H_4) 满足，而且，设 b，σ 为 (F_4) 中的参数，以 $\tilde{b},\tilde{\sigma}$ 记 (H_4) 中的对应参数，则恰有

$$b>\sigma\Rightarrow\tilde{b}>\tilde{\sigma},\quad b>\frac{\sigma|c|}{\hat{c}}\Rightarrow\tilde{b}>\frac{\tilde{\sigma}|c|}{\hat{c}}.\tag{5.2.9}$$

因本节要综合地运用条件 (H_1) ~ (H_4) 与 (F_1) ~ (F_4)，以上事实是重要的. 此外，如在 §4.6 中已看到的，关键条件 (H_3)，(F_3) 与 (H_4)，(F_4) 呈现出某种对偶性，它们分别导出两类不同但互成对应的结果.

定理 5.2.1 (i) 设条件 (H_1) ~ (H_3) 满足，$\xi\in C_{++}$. 若存在 $c\in\mathbf{R}^d_{++}$，使得以下两条件之一满足：

$$\alpha<2\beta,\quad\min_i b_ic_i>|c||\sigma|d^{(\beta-1)\vee 0},\tag{5.2.10a}$$

$$\alpha=2\beta,\quad\min_i b_ic_i>|c||2\kappa+2\bar{\kappa}+\sigma|d^{(\beta-1)\vee 0},\tag{5.2.10b}$$

则方程 (5.2.1) 存在唯一正整体解 $x(t,\xi)$. 若 $0<p<1$，存在 $c\in\mathbf{R}^d_{++}$，使得以下两条件之一满足：

$$\alpha<2\beta,\quad\min_i b_ic_i>|c||\sigma|d^{(\beta-1+p/2)\vee 0},\tag{5.2.11a}$$

$$\alpha=2\beta,\quad\min_i b_ic_i(1-p)>|c||2\kappa+\bar{\kappa}+\sigma(1-p)|d^{(\beta-1+p/2)\vee 0},\tag{5.2.11b}$$

则方程 (5.2.1) 存在唯一正整体解 $x(t,\xi)$，且满足不等式 (5.2.5).

(ii) 设 $x(t)$ 是方程(5.2.1)的一个正整体解;条件(F_1)与(F_3)满足. 若 $\alpha < 2\beta, b > \sigma$, 则不等式(5.2.7)成立;若

$$0 < p < 1, \quad \alpha = 2\beta, \quad (b - \sigma)(1 - p) > 2|c|^2(\kappa + \bar{\kappa}), \qquad (5.2.12)$$

则不等式(5.2.6)成立.

证 (i) 若条件(5.2.10a)与(5.2.10b)之一满足,则由定理4.6.2得出正整体解 $x(t,\xi)$ 唯一存在. 其次,条件(5.2.11a)与(5.2.11b)分别推出条件(5.2.10a)与(5.2.10b). 余下只要说明:条件(5.2.11a)与(5.2.11b)也分别推出定理4.6.10中的条件(4.6.33a)与(4.6.33b). 以后者为例,因 $D \triangleq d^{(\beta-1+p/2)\vee 0} \geqslant 1$, 故

$$\begin{aligned}
&\frac{pc_i\sigma_i}{\sigma + p} + \frac{2pc_i(\kappa_i + \bar{\kappa}_i)}{(\alpha + p)(1 - p)} + \frac{\alpha|c||2\kappa + 2\bar{\kappa} + (1 - p)\sigma|}{(\alpha + p)(1 - p)} d^{(\beta-1+p/2)\vee 0} \\
\leqslant &\frac{pc_i[2\kappa_i + \bar{\kappa}_i + (1 - p)\sigma_i] + \sigma|c||2\kappa + 2\bar{\kappa} + (1 - p)\sigma|}{(\alpha + p)(1 - p)} D \\
\leqslant &\frac{|c||2\kappa + 2\bar{\kappa} + (1 - p)\sigma|}{1 - p} D < b_ic_i,
\end{aligned}$$

最后一步用了条件(5.2.11b). 这就说明了条件(5.2.11b)可推出(4.6.33b).

(ii) 由定理4.6.18得出. □

在条件(H_1)~(H_3)满足的前提下,条件(5.2.11a)或(5.2.11b)同时得出正整体解的存在性与矩有界性,这是其优点. 但与定理4.6.10中的条件(4.6.33a),(4.6.33b)比较,条件(5.2.11a)与(5.2.11b)已明显加强了,这就限制了定理的应用范围.

将定理5.2.1用于方程(5.2.2)得到

推论 5.2.2 (i) 设条件(H_1),(H_2')与(H_3')满足, $\xi \in C_{++}$. 若 $\alpha \leqslant 2\beta$, 且当 $\alpha = 2\beta$ 时存在 $c \in \mathbf{R}^d_{++}$, 使得

$$\min_i b_ic_i > 2|c||\kappa + \bar{\kappa}| d^{(\beta-1)\vee 0}, \qquad (5.2.13)$$

则方程(5.2.2)存在唯一正整体解 $x(t,\xi)$. 若 $0 < p < 1, \alpha \leqslant 2\beta$, 且当 $\alpha = 2\beta$ 时存在 $c \in \mathbf{R}^d_{++}$, 使得

$$\min_i b_ic_i(1 - p) > 2|c||\kappa + \bar{\kappa}| d^{(\beta-1+p/2)\vee 0}, \qquad (5.2.14)$$

则方程(5.2.2)的正整体解 $x(t,\xi)$ 存在且满足不等式(5.2.5).

(ii) 设 $x(t)$ 是方程(5.2.2)的一个正整体解;条件(F_1)与(F_3')满足. 若 $\alpha < 2\beta$, 则不等式(5.2.7)成立;若

$$0 < p < 1, \quad \alpha = 2\beta, \quad b(1 - p) > 2|c|^2(\kappa + \bar{\kappa}), \qquad (5.2.15)$$

则不等式(5.2.6)成立.

定理 5.2.3 (i) 设条件(H_1),(H_2),(H_4)及以下三条件之一满足:

$$2\beta - \alpha \leqslant p \leqslant 1, \quad b > \sigma, \qquad (5.2.16a)$$

$$\alpha > 2\beta, \quad b > \sigma, \qquad (5.2.16b)$$

$$\begin{cases}\alpha = 2\beta, \quad 2(\alpha+p)(b-\sigma) > m(p-1)^{+}\left[\alpha d + pd^{(1-\beta-p/2)\vee 0}\right], \\ m = \max\limits_{i}\left[c_i(\lambda_i + \check{\lambda}_i)^2\right],\end{cases} \tag{5.2.16c}$$

则对任给 $\xi \in C_{++}$，方程(5.2.1)存在唯一正整体解 $x(t,\xi)$，满足不等式(5.2.5).

(ii) 设条件(F_1)，(F_2)与(F_4)满足，$\alpha \geqslant 2\beta, b\hat{c} > \sigma|c|$. 则对任给 $\xi \in C_{++}$，方程(5.2.1)存在唯一正整体解 $x(t,\xi)$，满足不等式(5.2.5)(取 $p=1$)与(5.2.7)；且当 $\alpha > 2\beta$ 时也满足不等式(5.2.8).

证 (i) 直接由定理 4.6.5 与 4.6.13 推出.

(ii) 在所给条件下，条件(H_1)，(H_2)与(H_4)满足，对于(H_4)取 $p=1$. 将(H_4)中对应 b 与 σ 的参数记作 $\tilde{b},\tilde{\sigma}$，则由 $b\hat{c} > \sigma|c|$ 及(5.2.9)有

$$\tilde{b} > \frac{\tilde{\sigma}|c|}{\hat{c}} \geqslant \tilde{\sigma}.$$

结合 $\alpha \geqslant 2\beta$ 得出条件(5.2.16b)或(5.2.16c)满足. 因此对任给 $\xi \in C_{++}$，方程(5.2.1)存在唯一正整体解 $x(t,\xi)$，满足不等式(5.2.5)(取 $p=1$). 对 $\alpha > 2\beta$ 与 $\alpha = 2\beta$ 这两种情况，由定理 4.6.21 推出，分别有不等式(5.2.8)与不等式(5.2.7)成立. □

与定理 5.2.1 比较，定理 5.2.3 虽处于对等地位，但明显地更具优势. 在定理 5.2.3 中，两组条件(即(H_1)，(H_2)，(H_4)与(F_1)，(F_2)，(F_4))都同时得出正整体解存在与某个渐近估计((5.2.5)或(5.2.6)). 定理 5.2.3 的结论(ii)尤其令人满意：它同时包含了正整体解存在、矩有界与渐近轨道估计这三方面的结论，且不等式(5.2.8)是一个非常强的结果. 与此成对照，定理 5.2.1(ii)并不包含正整体解存在的结论. 这就表明，(F_1)，(F_2)与(F_3)是一个极具优势的条件组合.

将定理 5.2.3 用于方程(5.2.3)得到

推论 5.2.4 (i) 设条件(H_1')，(H_2)，(H_4')及以下三条件之一满足：

$$2\beta - \alpha \leqslant p \leqslant 1, \tag{5.2.17a}$$

$$\alpha > 2\beta, \tag{5.2.17b}$$

$$\alpha = 2\beta, \quad 2b(\alpha+p) > m(p-1)^{+}\left[\alpha d + pd^{(1-\beta-p/2)\vee 0}\right], \tag{5.2.17c}$$

其中 m 依(5.2.16c)，则对任给 $\xi \in C_{++}$，方程(5.2.3)存在唯一正整体解 $x(t,\xi)$，满足不等式(5.2.5).

(ii) 设条件(F_1')，(F_2)与(F_4')满足，$\alpha \geqslant 2\beta$，则对任给 $\xi \in C_{++}$，方程(5.2.3)存在唯一正整体解 $x(t,\xi)$，满足不等式(5.2.5)(取 $p=1$)与(5.2.7)，且当 $\alpha > 2\beta$ 时也满足不等式(5.2.8).

进而将推论 5.2.2 与推论 5.2.4 用于方程(5.2.4)得到

推论 5.2.5 (i) 设条件(H_1') ~ (H_3')满足，$x_0 \in \mathbf{R}_{++}^d$. 若 $\alpha \leqslant 2\beta$，且当 $\alpha = 2\beta$ 时存在 $c \in \mathbf{R}_{++}^d$，使得

$$\min_i b_i c_i > 2|c||\kappa| d^{(\beta-1)\vee 0}, \tag{5.2.18}$$

则方程(5.2.4)存在唯一正整体解 $x(t,x_0)$. 若 $0<p<1, \alpha \leqslant 2\beta$, 且当 $\alpha=2\beta$ 时, 存在 $c \in \mathbf{R}_{++}^d$, 使得

$$\min_i b_i c_i(1-p) > 2|c||\kappa| d^{(\beta-1+p/2)\vee 0}, \tag{5.2.19}$$

则方程(5.2.4)存在唯一正整体解 $x(t,x_0)$, 满足不等式(5.2.5).

(ii) 设条件(H_1'),(H_2')与(H_4')满足; $2\beta-\alpha \leqslant p \leqslant 1$ 或 $\alpha \geqslant 2\beta$, 且当 $\alpha=2\beta$ 时有

$$2b(\alpha+p) > (p-1)^+\left[\alpha d + p d^{(1-\beta-p/2)\vee 0}\right] \max_i c_i \lambda_i^2, \tag{5.2.20}$$

则对每个 $x_0 \in \mathbf{R}_{++}^d$, 方程(5.2.4)存在唯一正整体解 $x(t,x_0)$, 满足不等式(5.2.5).

(iii) 设条件(F_1'),(F_2')与(F_4')满足, $\alpha \geqslant 2\beta$, 则对任给 $x_0 \in \mathbf{R}_{++}^d$, 方程(5.2.4)存在唯一正整体解 $x(t,x_0)$, 满足不等式(5.2.5)(取 $p=1$)与(5.2.7), 且当 $\alpha>2\beta$ 时也满足不等式(5.2.8).

条件(H_3)与(H_4)(或(F_3)与(F_4))的作用已经非常清楚. 了解一下它们的直观意义亦不无益处. 若将系统(5.2.1)看作一个种群动态模型, 则可粗略地说, 条件(H_3)与(H_4)反映了各物种的生存水平对于其增长的阻滞作用, 前者通过扰动部分(函数 g)起作用, 而后者则通过"确定性部分"(函数 f)起作用. 对于条件(F_3)与(F_4)可作类似解释, 但条件(H_1)与(H_2)(或(F_1)与(F_2))则无类似的意义.

5.2.2 一个特例

考虑如下特例

$$\begin{aligned} dx(t) = \operatorname{diag}(x(t))\Big\{&\Big[a + Ax(t) + \int_{-\tau}^0 B(\theta)x(t+\theta)d\mu(\theta)\Big]dt \\ &+ [q + Qx(t)]dw(t)\Big\}, \end{aligned} \tag{5.2.21}$$

其中 $a,q \in \mathbf{R}^d, A=[a_{ij}], Q=[q_{ij}] \in \mathbf{R}^{d\times d}, B(\theta) \in C([-\tau,0],\mathbf{R}^{d\times d})$, μ 是 $[-\tau,0]$ 上的一个概率测度. 方程(5.2.21)因其较简单的结构适于作为解释一般结果的典型例子, 而且也因应用上的重要价值而受到特别关注.

为应用上小节中的一般结果, 首先应验证函数

$$f(x,\varphi) = a + Ax + \int_{-\tau}^0 B(\theta)\varphi(\theta)d\mu, \quad g(x) = q + Qx, \qquad x \in \mathbf{R}_{++}^d, \varphi \in C_{++}$$

满足一定的条件. 取定 $c \in \mathbf{R}_{++}^d$, 令 $\bar{C} = \operatorname{diag}(c)$, 约定记号:

$$\begin{cases} m_1 = \sup\limits_{-\tau\leqslant\theta\leqslant 0} \|B(\theta)\|, m_2 = \min\limits_i (c_i|a_{ii}|), \\ R = [r_{ij}], r_{ii} = 0, r_{ij} = a_{ij}^+, \ 1 \leqslant i,j \leqslant d, i \neq j, \\ 2m_3 = \lambda_{\max}^+(\bar{C}A + A^T\bar{C}), 2m_4 = \lambda_{\max}^+(\bar{C}R + R^T\bar{C}). \end{cases} \tag{5.2.22}$$

（1）　直接看出 f 满足条件（F_1）（取 $\alpha = 1$），g 满足条件（F_2'）（当 $Q \neq 0$ 时 $\beta = 1$，当 $Q = 0$ 时可取任意的 $\beta > 0$）.

（2）　设 Q 满足条件

$$q_{ij} \geqslant 0, \quad q_{ii} > 0, \qquad 1 \leqslant i,j \leqslant d. \tag{5.2.23}$$

则 $g(x)$ 满足条件（H_3'）（取 $\beta = 1, b_i = q_{ii}^2$）.

（3）　对 f 检验条件（F_4）. 可循两条途径. 其一是对 A 不预设限制，取 $c \in \mathbf{R}_{++}^d$，估计

$$\begin{aligned}
&|x|^{-1}x^{\mathrm{T}}\bar{C}f(x,\varphi)\\
&=|x|^{-1}x^{\mathrm{T}}\bar{C}Ax+|x|^{-1}x^{\mathrm{T}}\bar{C}\int_{-\tau}^{0}B(\theta)\varphi(\theta)\mathrm{d}\mu+o(|x|)\\
&\leqslant m_3|x|+\check{c}m_1\int_{-\tau}^{0}|\varphi(\theta)|\mathrm{d}\mu+o(|x|)\\
&\triangleq -b|x|+\sigma\int_{-\tau}^{0}|\varphi(\theta)|\mathrm{d}\mu+o(|x|),
\end{aligned}$$

其中 $b = -m_3, \sigma = \check{c}m_1$. 不等式 $b > \sigma$ 与 $b\hat{c} > \sigma|c|$ 分别相当于

$$\lambda_{\max}^{+}(\bar{C}A+A^{\mathrm{T}}\bar{C}) < -2\check{c}\sup_{-\tau\leqslant\theta\leqslant0}\|B(\theta)\|, \tag{5.2.24}$$

$$\lambda_{\max}^{+}(\bar{C}A+A^{\mathrm{T}}\bar{C}) < -\frac{2\check{c}|c|}{\hat{c}}\sup_{-\tau\leqslant\theta\leqslant0}\|B(\theta)\|. \tag{5.2.25}$$

当条件(5.2.24)或(5.2.25)满足时必 $b > 0$，因而 f 满足条件（F_4）.

另一途径是预设 $a_{ii} < 0(1 \leqslant i \leqslant d)$，则对 $c \in \mathbf{R}_{++}^d$ 有

$$\begin{aligned}
&|x|^{-1}x^{\mathrm{T}}\bar{C}f(x,\varphi)\\
&\leqslant|x|^{-1}\sum_i c_i a_{ii}x_i^2+|x|^{-1}x^{\mathrm{T}}\bar{C}Rx+\check{c}m_1\int_{-\tau}^{0}|\varphi(\theta)|\mathrm{d}\mu+o(|x|)\\
&\leqslant -m_2|x|+m_4|x|+\check{c}m_1\int_{-\tau}^{0}|\varphi(\theta)|\mathrm{d}\mu+o(|x|)\\
&=-b|x|+\sigma\int_{-\tau}^{0}|\varphi(\theta)|\mathrm{d}\mu+o(|x|),
\end{aligned}$$

其中 $b = m_2 - m_4, \sigma = \check{c}m_1$. 不等式 $b > \sigma$ 与 $b\hat{c} > \sigma|c|$ 分别相当于

$$\min_i(c_i|a_{ii}|) > \frac{1}{2}\lambda_{\max}^{+}(\bar{C}R+R^{\mathrm{T}}\bar{C})+\check{c}\sup_{-\tau\leqslant\theta\leqslant0}\|B(\theta)\|, \tag{5.2.26}$$

$$\min_i(c_i|a_{ii}|) > \frac{1}{2}\lambda_{\max}^{+}(\bar{C}R+R^{\mathrm{T}}\bar{C})+\frac{\check{c}|c|}{\hat{c}}\sup_{-\tau\leqslant\theta\leqslant0}\|B(\theta)\|. \tag{5.2.27}$$

当条件(5.2.26)或(5.2.27)满足时 f 亦满足条件（F_4）.

基于以上事实，应用推论 5.2.2 与定理 5.2.3 于方程(5.2.1)得到

命题 5.2.6　(i) 若 Q 满足条件(5.2.23)，则对任给 $\xi \in C_{++}$，方程(5.2.1)存在唯一正整体解 $x(t,\xi)$，满足不等式(5.2.5)（取 $p \in (0,1)$）.

(ii) 若存在 $c \in \mathbf{R}^d_{++}$，使得条件(5.2.24)或(5.2.26)(对后者假定 $a_{ii} < 0, 1 \leqslant i \leqslant d$) 满足，则对任给 $\xi \in C_{++}$，方程(5.2.21)存在唯一正整体解 $x(t,\xi)$，满足不等式(5.2.5)(取 $p = 1$)。

(iii) 若 $Q = 0$，存在 $c \in \mathbf{R}^d_{++}$，使条件(5.2.25)或(5.2.27)(对后者要求 $a_{ii} < 0, 1 \leqslant i \leqslant d$)满足，则对任给 $\xi \in C_{++}$，方程(5.2.21)存在唯一正整体解 $x(t,\xi)$，满足不等式(5.2.5)(取 $p = 1$)与(5.2.8)。

今将命题5.2.6用到方程(5.2.1)的以下特例：

$$\begin{aligned} dx(t) = &\operatorname{diag}(x(t))\{[a + Ax(t) + Bx(t-\tau)]dt \\ &+ [q + Qx(t)]dw(t)\}, \end{aligned} \tag{5.2.28}$$

$$dx(t) = \operatorname{diag}(x(t))\{[a + Ax(t)]dt + [q + Qx(t)]dw(t)\}, \tag{5.2.29}$$

可得到更熟悉的结论. 注意当 $B(\theta) \equiv B$ 时条件(5.2.24) ~ (5.2.27)分别简化为

$$\lambda^+_{\max}(\bar{C}A + A^{\mathrm{T}}\bar{C}) < -2\check{c}\|B\|, \tag{5.2.30}$$

$$\lambda^+_{\max}(\bar{C}A + A^{\mathrm{T}}\bar{C}) < -2\check{c}|c|\ \|B\|/\hat{c}, \tag{5.2.31}$$

$$\min_i(2c_i|a_{ii}|) > \lambda^+_{\max}(\bar{C}R + R^{\mathrm{T}}\bar{C}) + 2\check{c}\|B\|, \tag{5.2.32}$$

$$\min_i(2c_i|a_{ii}|) > \lambda^+_{\max}(\bar{C}R + R^{\mathrm{T}}\bar{C}) + 2\check{c}|c|\ \|B\|/\hat{c}. \tag{5.2.33}$$

命题5.2.7 (i) 若 Q 满足条件(5.2.23)，则对任给 $\xi \in C_{++}$，方程(5.2.28)存在唯一正整体解 $x(t,\xi)$，满足不等式(5.2.5)(取 $p \in (0,1)$)。

(ii) 若存在 $c \in \mathbf{R}^d_{++}$，使得条件(5.2.30)或(5.2.32)(对后者假定 $a_{ii} < 0, 1 \leqslant i \leqslant d$)满足，则对任给 $\xi \in C_{++}$，方程(5.2.28)存在唯一正整体解 $x(t,\xi)$，满足不等式(5.2.5)(取 $p = 1$)。

(iii) 若 $Q = 0$，存在 $c \in \mathbf{R}^d_{++}$，使条件(5.2.31)或(5.2.33)(对后者假定 $a_{ii} < 0, 1 \leqslant i \leqslant d$)满足，则对任给 $\xi \in C_{++}$，方程(5.2.28)存在唯一正整体解 $x(t,\xi)$，满足不等式(5.2.5)(取 $p = 1$)与(5.2.8)。

命题5.2.8 (i) 若 Q 满足条件(5.2.23)，则对任给 $x_0 \in \mathbf{R}^d_{++}$，方程(5.2.29)存在唯一正整体解 $x(t,x_0)$，满足不等式(5.2.5)(取 $p \in (0,1)$)。

(ii) 若存在 $c \in \mathbf{R}^d_{++}$，使得 $\bar{C}A + A^{\mathrm{T}}\bar{C}$ 负定或者(假定 $a_{ii} < 0, 1 \leqslant i \leqslant d$)

$$\min_i(2c_i|a_{ii}|) > \lambda^+_{\max}(\bar{C}R + R^{\mathrm{T}}\bar{C}), \tag{5.2.34}$$

则对任给 $x_0 \in \mathbf{R}^d_{++}$，方程(5.2.29)存在唯一正整体解 $x(t,x_0)$，满足不等式(5.2.5)(取 $p = 1$)；当 $Q = 0$ 时也满足不等式(5.2.8)。

5.2.3 延迟 LV 系统

现在考虑平行于(5.2.1)的系统

$$dx(t) = \operatorname{diag}(x(t))[f(x(t),y(t))dt + g(x(t),y(t))dw(t)], \tag{5.2.35}$$

其中 $y(t)=x(t-\delta(t))$，$\delta(t)\in C^1(\mathbf{R}_+,[0,\tau])$ 是变动时滞；$f(x,y)$ 与 $g(x,y)$ 均为 $\mathbf{R}_{++}^d\times\mathbf{R}_{++}^d$ 上的局部 Lipschitz 连续函数. 对应于(H_1) ~ (H_4)与(F_1) ~ (F_4)的条件是(以下总设 $x,y\in\mathbf{R}_{++}^d,1\leqslant i\leqslant d$)：

(h_1) 存在常数 $\alpha>0$ 与 $\kappa,\bar{\kappa}\in\mathbf{R}_+^d$，使得

$$|f_i(x,y)|\leqslant\kappa_i|x|^\alpha+\bar{\kappa}_i|y|^\alpha+o(|x|^\alpha).$$

(h_2) 存在常数 $\beta>0$ 与 $\lambda,\bar{\lambda}\in\mathbf{R}_+^d$，使得

$$|g_i(x,y)|\leqslant\lambda_i|x|^\beta+\bar{\lambda}_i|y|^\beta+o(|x|^\beta).$$

(h_3) 存在常数 $\beta>0$ 与 $b\in\mathbf{R}_{++}^d,\sigma\in\mathbf{R}_+^d$，使得

$$g_i^2(x,y)\geqslant b_ix_i^{2\beta}-\sigma_i|y|^{2\beta}+o(|x|^{2\beta}).$$

(h_4) 存在 $c\in\mathbf{R}_{++}^d$ 与常数 $\alpha,b,p>0,\sigma\geqslant0$，使得

$$\sum_i c_ix_i^pf_i(x,y)\leqslant-b|x|^{\alpha+p}+\sigma|y|^{\alpha+p}+o(|x|^{\alpha+p}).$$

(f_1) 存在常数 $\alpha>0$ 与 $\kappa,\bar{\kappa}\geqslant0$，使得

$$\|f(x,y)\|_\infty\leqslant\kappa|x|^\alpha+\bar{\kappa}|y|^\alpha+o(|x|^\alpha).$$

(f_2) 存在常数 $\beta>0$ 与 $\lambda,\bar{\lambda}\geqslant0$，使得

$$\|g(x,y)\|_\infty\leqslant\lambda|x|^\beta+\bar{\lambda}|y|^\beta+o(|x|^\beta).$$

(f_3) 存在 $c\in\mathbf{R}_{++}^d$ 与常数 $\beta,b>0,\sigma\geqslant0$，使得

$$|x|^{-2}[x^{\mathrm{T}}\bar{C}g(x,y)]^2\geqslant b|x|^{2\beta}-\sigma|y|^{2\beta}+o(|x|^{2\beta}).$$

(f_4) 存在 $c\in\mathbf{R}_{++}^d$ 与常数 $\alpha,b>0,\sigma\geqslant0$，使得

$$|x|^{-1}x^{\mathrm{T}}\bar{C}f(x,y)\leqslant-b|x|^\alpha+\sigma|y|^\alpha+o(|x|^\alpha).$$

对以上条件应作的说明及记号(h_i')，(f_i')($1\leqslant i\leqslant4$)的意义都可参照 4.6.4 节，不必详述.

现在给出对应于定理 5.2.1 与定理 5.2.3 的以下两个结果.

定理 5.2.9　(i) 设条件(h_1) ~ (h_3)满足，$\xi\in C_{++}$. 若存在 $c\in\mathbf{R}_{++}^d$，使得以下两条件之一满足：

$$\alpha<2\beta,\quad\min_i b_ic_i\eta>|c||\sigma|d^{(\beta-1)\vee0},\tag{5.2.36a}$$

$$\alpha=2\beta,\quad\min_i b_ic_i\eta>|c||2\kappa\eta+2\bar{\kappa}+\sigma|d^{(\beta-1)\vee0},\tag{5.2.36b}$$

其中 η 依(4.1.46)，则方程(5.2.35)存在唯一正整体解 $x(t,\xi)$. 若 $0<p<1$，存在 $c\in\mathbf{R}_{++}^d$，使得以下两条件之一满足：

$$\alpha<2\beta,\quad\min_i b_ic_i\eta>|c||\sigma|d^{(\beta-1+p/2)\vee0},\tag{5.2.37a}$$

$$\alpha=2\beta,\quad\min_i b_ic_i\eta(1-p)>|c||2\kappa\eta+2\bar{\kappa}+(1-p)\sigma|d^{(\beta-1+p/2)\vee0},\tag{5.2.37b}$$

则方程(5.2.35)存在唯一正整体解 $x(t,\xi)$，且满足不等式(5.2.5).

(ii) 设 $x(t)$ 是方程(5.2.35)的一个正整体解;条件(f_1)与(f_3)满足. 若 $\alpha < 2\beta, b\eta > \sigma$, 则不等式(5.2.7)成立;若

$$0 < \alpha < 1, \quad \alpha = 2\beta, \quad (b\eta - \sigma)(1-p) > 2|c|^2(\kappa\eta + \bar{\kappa}), \tag{5.2.38}$$

则不等式(5.2.6)成立.

以上结果的推导类似于定理 5.2.1,唯一要指出的是需利用 $\eta \leqslant 1$.

定理 5.2.10 (i) 设条件(h_1),(h_2),(h_4)及以下三个条件之一满足:

$$2\beta - \alpha \leqslant p \leqslant 1, \quad b\eta > \sigma, \tag{5.2.39a}$$

$$\alpha > 2\beta, \quad b\eta > \sigma, \tag{5.2.39b}$$

$$\begin{cases} \alpha = 2\beta, \ 2(\alpha+p)(b-\sigma\eta^{-1}) > (p-1)^+ \left[\alpha\bar{m} + mpd^{(1-\beta-p/2)\vee 0}\right], \\ m = \max\limits_i\left[c_i(\lambda_i + \bar{\lambda}_i)^2\right], \ \bar{m} = \sum\limits_i c_i(\lambda_i + \bar{\lambda}_i)(\lambda_i + \bar{\lambda}_i\eta^{-1}), \end{cases} \tag{5.2.39c}$$

则对任给 $\xi \in C_{++}$, 方程(5.2.35)存在唯一正整体解 $x(t,\xi)$,满足不等式(5.2.5).

(ii) 设条件(f_1),(f_2)与(f_4)满足, $\alpha \geqslant 2\beta, b\hat{c}\eta > \sigma|c|$. 则对任给 $\xi \in C_{++}$, 方程(5.2.35)存在唯一正整体解 $x(t,\xi)$,满足不等式(5.2.5)(取 $p=1$)与(5.2.7),且当 $\alpha > 2\beta$ 时也满足不等式(5.2.8).

以上两个定理实际上都基于引理 4.6.25,引理 4.6.27 与引理 4.6.29. 这些引理的共同点是,其中心条件((4.6.66),(4.6.69)与(4.6.72))都是用 Euclid 范数表达的,而这可能达不到应有的精细. 如果改用坐标形式,那么与之关联的条件(h_1)~(h_4)(为简便起见,此处不考虑条件(f_1)~(f_4))亦应改用坐标形式. 例如,条件(h_4)的坐标形式就是:

($\bar{h}_4$) 存在 $b,c \in \mathbf{R}^d_{++}, \sigma \in \mathbf{R}^d_+$ 与常数 $\alpha, p > 0$, 使得

$$\sum_i c_i x_i^p f_i(x,y) \leqslant \sum_i (-b_i x_i^{\alpha+p} + \sigma_i y_i^{\alpha+p}) + o(|x|^{\alpha+p}).$$

条件 ($\bar{h}_i$)($i=1,2,3$) 亦具类似的形式,无需逐一写出. 利用修正后的条件($\bar{h}_1$)~($\bar{h}_4$),可得到定理 5.2.9 与定理 5.2.10 的另一种形式,下面仅给出对应于定理 5.2.10 前半部分的以下结果.

定理 5.2.11 设条件($\bar{h}_1$),($\bar{h}_2$),($\bar{h}_4$)及以下两条件之一满足:

$$2\beta - \alpha \leqslant p \leqslant 1, \quad b_i\eta > \sigma_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant d, \tag{5.2.40a}$$

$$\alpha > 2\beta, \quad b_i\eta > \sigma_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant d. \tag{5.2.40b}$$

则对任给 $\xi \in C_{++}$, 方程(5.2.35)存在唯一正整体解 $x(t,\xi)$, 满足不等式(5.2.5).

今用定理 5.2.11 研究方程

$$dx(t) = \operatorname{diag}(x(t))\{[a + Ax(t) + By(t)]dt + q dw(t)\}, \tag{5.2.41}$$

其中 $a, q \in \mathbf{R}^d$. 对此方程，命题 5.2.7 已给出了若干可用的结果，但其条件不是很容易验证，且其中的矩有界结论尚不能令人满意，今用定理 5.2.11 加以改进.

为获得较精细结果的一个关键措施是引入记号

$$A_i = \sum_{j \neq i} a_{ij}^+, \quad B_i = \sum_j b_{ij}^+, \quad B_i{}' = \sum_j b_{ji}^+, \tag{5.2.42}$$

且假定矩阵 A 在以下意义上"对角占优"：

$$a_{ii} < -A_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant d. \tag{5.2.43}$$

函数 $f(x,y) = a + Ax + By$ 与 $g(x) \equiv q$ 显然分别满足条件$(\bar{\text{h}}_1)$与$(\bar{\text{h}}_2)$(取 $\alpha = 1$ 及任意小的 $\beta > 0$，因而 $\alpha > 2\beta$). 因对 $g(x)$ 无条件$(\bar{\text{h}}_3)$可用，故关键在于使 f 满足条件$(\bar{\text{h}}_4)$. 为此，首先建立如下关键引理

引理 5.2.12　设条件(5.2.43)满足，$p > 0$，则成立

$$I_p(x) \triangleq \sum_{i,j} a_{ij} x_i^p x_j \leqslant -K_p \|x\|_\infty^{p+1}, \qquad x \in \mathbf{R}_{++}^d, \tag{5.2.44}$$

其中

$$-K_p = \max_i \Big[a_{ii} + A_i + \frac{p^p}{(p+1)^{p+1}} \sum_{j \neq i} \frac{A_j^{p+1}}{|a_{jj}|^p} \Big]. \tag{5.2.45}$$

证　取定 $x \in \mathbf{R}_{++}^d$，则

$$\begin{aligned} I_p(x) &\leqslant \sum_i \Big(a_{ii} x_i^{p+1} + \sum_{j \neq i} a_{ij}^+ x_i^p \|x\|_\infty \Big) \\ &\triangleq \sum_i \varphi_i(x_i), \end{aligned} \tag{5.2.46}$$

其中 $\varphi_i(t) = a_{ii} t^{p+1} + A_i t^p \|x\|_\infty$. 用微分法易验证

$$\max_{0 \leqslant t \leqslant \|x\|_\infty} \varphi_i(t) = \Big(\frac{p}{|a_{ii}|}\Big)^p \Big(\frac{A_i \|x\|_\infty}{p+1}\Big)^{p+1}.$$

而 $\varphi_i(\|x\|_\infty) = (a_{ii} + A_i)\|x\|_\infty^{p+1} < 0$(用(5.2.43)). 因必有 i 使得 $x_i = \|x\|_\infty$，故由(5.2.46)有

$$I_p(x) \leqslant \max_i \Big[\varphi_i(\|x\|_\infty) + \sum_{j \neq i} \max_{0 \leqslant t \leqslant \|x\|_\infty} \varphi_j(t) \Big].$$

上式右端正好就是 $-K_p \|x\|_\infty^{p+1}$，于是不等式(5.2.44)得证. □

注意条件(5.2.43)推出 $A_i < |a_{ii}|$，由此易看出 K_p 对 p 单调增加，且

$$K_\infty \triangleq \lim_{p \to \infty} K_p = -\max_i (a_{ii} + A_i) > 0. \tag{5.2.47}$$

因此，当 p 适当大时必有 $K_p > 0$.

现在对 f 检验条件$(\bar{\text{h}}_4)$. 取 $c_i \equiv 1, p > 0$，使 $K_p > 0$，则

$$\begin{aligned} \sum_i x_i^p f_i(x,y) &= \sum_{i,j} x_i^p (a_{ij} x_j + b_{ij} y_j) + o(|x|^{p+1}) \\ &= I_p(x) + \sum_{i,j} b_{ij} x_i^p y_j + o(|x|^{p+1}) \end{aligned}$$

$$\leqslant -K_p\|x\|_\infty^{p+1}+\frac{1}{p+1}\sum_{i,j}b_{ij}^+(px_i^{p+1}+y_j^{p+1})+o(|x|^{p+1})$$

$$\leqslant -d^{-1}K_pV_{p+1}(x)+\frac{1}{p+1}\sum_i(pB_ix_i^{p+1}+B_i'y_i^{p+1})+o(|x|^{p+1})$$

$$\triangleq \sum_i(-b_ix_i^{p+1}+\sigma_iy_i^{p+1})+o(|x|^{p+1}), \tag{5.2.48}$$

其中

$$b_i=d^{-1}K_p-\frac{pB_i}{p+1},\quad \sigma_i=\frac{B_i'}{p+1}.$$

条件 $b_i\eta>\sigma_i$ 相当于

$$K_p>\frac{d(pB_i+B_i'\eta^{-1})}{p+1},\qquad 1\leqslant i\leqslant d. \tag{5.2.49}$$

当条件(5.2.49)满足时必定 $b_i>0(1\leqslant i\leqslant d)$，因而(5.2.48)表明 f 满足条件 $(\bar{\mathrm{h}}_4)$. 结合(5.2.47)与(5.2.49)看出，若

$$\max_i(a_{ii}+A_i)<-\max_i(dB_i), \tag{5.2.50}$$

则当 p 充分大时条件(5.2.49)必满足. 注意条件(5.2.50)蕴涵了(5.2.43).

基于以上事实，将定理 5.2.11 应用于方程(5.2.41)得到

定理 5.2.13　设条件(5.2.50)满足，则对任给 $\xi\in C_{++}$，方程(5.2.41)存在唯一正整体解 $x(t,\xi)$，且对任给 $p>0$，$x(t,\xi)$ 满足不等式(5.2.5).

以上定理明显强于关于方程(5.2.41)的已知同类结果，它使不等式(5.2.5)能对任何 $p>0$ 成立(当然其右端 K 一般与 p 有关)，是颇出人意外的. 定理 5.2.13 的另一个值得注意的优势是，它以(5.2.50)为其唯一条件，且此条件是易于检验的(与条件(5.2.30)～(5.2.33)对照!). 简单地说，要使条件(5.2.50)满足，$a_{ij}^+(i\neq j)$ 与 b_{ij}^+ 应适当小，而 $a_{ii}<0$ 且 $|a_{ii}|$ 适当大. 依种群动力学的解释就是，每一物种自身都有抑制其过度增长的较强功能，而种间的作用要么是竞争性的 $(a_{ij}<0,b_{ij}<0)$，要么是低度互助性的 $(a_{ij},b_{ij}$ 为小正数). 注意定理 5.2.13 中完全不涉及随机干扰的作用.

§5.3　经济学中的 SDE 模型

经济学是 SDE 的主要应用领域之一. 考虑到经济运行中充满了不确定性，而这种不确定性乃是大量随机因素干扰的结果，在对经济过程的数学描述中运用 SDE 应当是不可避免的. 早在 20 世纪 70 年代，著名经济学家 Merton 等人就将 SDE 应用于经济与金融学中，且获得了令人瞩目的结果. 近年来，SDE 在经济学中的运用更为普遍与深入. 用 SDE 构建的经济模型已如此之多，此处根本不可能作什么概括. 下面

仅介绍三个典型的经济模型,它们在现代动态宏观经济理论中起着基本的作用. 用这些模型作为解释 SDE 方法的例子,应该说是很具启发性的.

考虑到不可避免地要用到一些经济学的术语与记号,下面作一最低限度的介绍. 设想我们考虑的是某个独立运行的经济系统,与其相关的经济变量都是随机过程. 分别以 K,H,A,L,Y 记该经济中物质资本、人力资本、技术、劳动力与产出的总量;以 $k=K/L$ 记物质资本的人均量, $h=H/L$ 与 $y=Y/L$ 仿此. 假定 K,H,A,L 的增长服从如下微分方程:

$$\begin{cases} \mathrm{d}K = K\psi_K\mathrm{d}t, \mathrm{d}H = H\psi_H\mathrm{d}t, & (5.3.1\mathrm{a}) \\ \mathrm{d}A = A[\psi_A\mathrm{d}t + a\mathrm{d}w_1(t)], & (5.3.1\mathrm{b}) \\ \mathrm{d}L = L[n\mathrm{d}t + b\mathrm{d}w_2(t)], & (5.3.1\mathrm{c}) \end{cases}$$

其中 ψ_K 与 ψ_H 分别为 K 与 H 的增长率, ψ_A 与 n 分别为 A 与 L 的期望增长率,假定 n 是常数. A 与 L 的增长分别受到 Brown 运动 $w_1(t)$ 与 $w_2(t)$ 的扰动,其扰动强度分别为 a 与 b, 假定 $a,b>0$, w_1 与 w_2 相互独立. 对于 K 与 H 不考虑其自身的扰动. 以上所作的种种假设不免有些理想化,但这能使下面建立的模型较为简单.

5.3.1　Solow 模型

Solow 模型是现代经济增长理论中具有奠基意义的模型. 在 SDE 形式下,它可表成

$$\mathrm{d}k = [sf(k) - \mu k]\mathrm{d}t + bk\mathrm{d}w(t), \tag{5.3.2}$$

其中 $s>0$ 表示储蓄率; $y=f(k)$ 是生产函数,假定满足如下条件:

$$\begin{cases} f(k)>0, f'(k)>0, f''(k)<0, f(k)>kf'(k), \quad k>0, \\ f(0)=0=f'(\infty), \quad f'(0)=\infty=f(\infty). \end{cases} \tag{5.3.3}$$

$\mu = n - b^2, w = -w_2, n, b, w_2$ 依式(5.3.1c).

方程(5.3.2)的推导并不难:假定 $\mathrm{d}K = sY\mathrm{d}t, Y=F(K,L)$ 是一次齐次的生产函数,记 $f(k)=F(k,1)$, 则

$$\begin{aligned} \mathrm{d}k &= \mathrm{d}\left(\frac{K}{L}\right) = \frac{K}{L}\left(\frac{\mathrm{d}K}{K} - \frac{\mathrm{d}L}{L}\right)\left(1 - \frac{\mathrm{d}L}{L}\right) && (\text{用}(1.3.31)) \\ &= k\left(s\frac{L}{K}\frac{Y}{L}\mathrm{d}t - n\mathrm{d}t - b\mathrm{d}w_2\right)(1 - n\mathrm{d}t - b\mathrm{d}w_2) && (\text{用}(5.3.1\mathrm{c})) \\ &= [sf(k) - (n-b^2)]\mathrm{d}t + bk\mathrm{d}w(t). \end{aligned}$$

下面分析方程(5.3.2). 方程(5.3.2)显然有零解. 其次,因 $f(k)$ 在 $(0,\infty)$ 内是局部 Lipschitz 的,对每个 $k_0>0$, 方程(5.3.2)必存在局部解 $k(t,k_0)$ (依定理 3.1.4). 我们关心的是, $k(t,k_0)$ 是否为整体解且保持为正? 这由以下定理解决.

定理 5.3.1　设 $b^2<2n$, 则对任给 $k_0>0$, 方程(5.3.2)的解 $k(t)=k(t,k_0)$ 定义于 $[0,\infty)$ 上,且 a. s. 地有 $k(t)>0$ ($\forall t \geqslant 0$).

证 采用定理5.2.2的证法. 定义停时

$$\tau_l = \inf\{t \geqslant 0: k(t) \text{ 有定义且 } k(t) \notin [l^{-1}, l]\}, \quad l \in \mathbf{N}.$$

只要证 $P(\tau_l \leqslant t) \to 0 (l \to \infty, t > 0)$. 因 $b^2 < 2n$, 故可取 $\lambda > 0$, 使得 $b^2 < 2n/(1+\lambda)$. 定义 $V(k) = k^\lambda - \lambda \ln k (k > 0)$, 则 $V(0^+) = \infty = V(\infty), V(k) \geqslant V(1) > 0$. 设 $\mathscr{L}$ 是结合方程(5.3.2)的微分算子,则

$$\begin{aligned}\mathscr{L}V(k) &= \lambda(k^{\lambda-1} - k^{-1})[sf(k) - \mu k] + \frac{\lambda b^2 k^2}{2}[(\lambda-1)k^{\lambda-2} + k^{-2}] \\ &= \lambda k^\lambda \left[\frac{sf(k)}{k} - \mu - \frac{b^2(1-\lambda)}{2}\right] - \frac{\lambda sf(k)}{k} + \lambda\mu + \frac{b^2\lambda}{2} \triangleq \varphi(k).\end{aligned}$$

利用条件(5.3.3)易算出

$$\lim_{k \to 0} \frac{f(k)}{k} = f'(0) = \infty, \quad \lim_{k \to \infty} \frac{f(k)}{k} = f'(\infty) = 0.$$

其次,用 $b^2 < 2n/(1+\lambda)$ 得

$$2\mu + b^2(1-\lambda) = 2n - b^2(1+\lambda) > 0.$$

利用以上事实立得 $\varphi(0) = -\infty = \varphi(\infty)$, 因此必 $\varphi(k) \leqslant c (\forall k > 0)$, c 是某个正常数. 于是

$$\begin{aligned}\mathrm{E}V(k(\tau_l \wedge t)) &= V(k_0) + \mathrm{E}\int_0^{\tau_l \wedge t} LV(k(s))\mathrm{d}s \\ &\leqslant V(k_0) + ct \triangleq c_1.\end{aligned}$$

另一方面,当 $\tau_l \leqslant t$ 时有 $k(\tau_l) = l^{-1}$ 或 l, 于是

$$c_1 \geqslant \mathrm{E}V(k(\tau_l \wedge t)) \geqslant P(\tau_l \leqslant t)[V(l) \wedge V(l^{-1})],$$

$$V(l) \wedge V(l^{-1}) \to \infty, \quad l \to \infty.$$

这推出 $P(\tau_l \leqslant t) \to 0 (l \to \infty)$, 如所要证. □

条件 $b^2 < 2n$ 意味着与劳动力的增长比较,劳动力的随机波动是偏小的. 定理5.3.1表明,在此条件下,经济一旦启动,就将一直运行下去,绝不会在有限时间内因崩溃或过度膨胀而中止.

下面保持 $b^2 < 2n$ 这一条件而分析方程(5.3.2)的解的渐近状态. 我们特别关心的是:能否求出经济增长率的一个下限? 试用§2.3中的方法,取Liapunov函数 $V(k) = k^2$, 今估计 $\gamma = \alpha - \beta$ (依(2.3.31)):

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{2k[sf(k) - \mu k] + b^2k^2}{k^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{2k \cdot bk}{k^2}\right)^2 \\ &= 2sk^{-1}f(k) - (2\mu + b^2).\end{aligned}$$

注意到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}\left[\frac{f(k)}{k}\right] = \frac{kf'(k) - f(k)}{k^2} < 0, \quad (\text{用}(5.3.3))$$

即 $f(k)/k$ 单调下降,有

$$\underline{\gamma} \triangleq \inf_{k>0}\gamma = 2s\lim_{k\to\infty}\frac{f(k)}{k} - (2\mu + b^2)$$
$$= -(2\mu + b^2) = b^2 - 2n.$$

这就得到(参看定理2.3.9):$\forall k_0 > 0$, 有

$$\underline{\lim_{t\to\infty}} t^{-1}\ln k(t,k_0) \geqslant b^2/2 - n, \text{a. s.}. \tag{5.3.4}$$

近似地可以说,式(5.3.4)表明 $k(t,k_0)$ 的增长率至少为 $b^2/2 - n$. 因已设 $b^2 < 2n$, 式(5.3.4)并不能保证 $k(t,k_0)$ 有正增长,但可保证绝不能有过大的负增长. 若撤去条件 $b^2 < 2n$, 则可能出现三种结局:

(i) 在有限时间内经济因 $k(t,k_0)\to 0$ 而中止;

(ii) 在有限时间内经济因无界增长而爆炸;

(iii) 至少以 $b^2/2 - n(\geqslant 0)$ 为增长率持久地增长.

5.3.2　人力资本模型

在同时考虑物质资本 K 与人力资本 H 的情况下,假定经济依据如下生产函数运行:

$$Y = K^{\alpha}H^{\beta}L^{1-\alpha-\beta}, \tag{5.3.5}$$

其中 $0 < \alpha,\beta < 1/2$. 与 Solow 模型中的 $\mathrm{d}K = sY\mathrm{d}t$ 相对照,现在设

$$\mathrm{d}K = s_1Y\mathrm{d}t, \quad \mathrm{d}H = s_2Y\mathrm{d}t,$$

其中 $s_1, s_2 \in (0,1)$ 分别为产出用于物质资本与人力资本投资的份额. 于是

$$\mathrm{d}k = k\left(\frac{s_1Y}{K}\mathrm{d}t - \frac{\mathrm{d}L}{L}\right)\left(1 - \frac{\mathrm{d}L}{L}\right) \qquad (\text{用}(1.3.31))$$
$$= (s_1y - \mu k)\mathrm{d}t + bk\mathrm{d}w, \qquad (\text{用}(5.3.1),(5.3.5))$$

其中 $y = k^{\alpha}h^{\beta}, \mu = n - b^2, \mathrm{d}w = -\mathrm{d}w_2, n, b, w_2$ 依式(5.3.1c). 对 $\mathrm{d}h$ 可求出类似的式子,于是得到关于 (k,h) 的如下 SDE:

$$\begin{cases}\mathrm{d}k = (s_1y - \mu k)\mathrm{d}t + bk\mathrm{d}w(t),\\ \mathrm{d}h = (s_2y - \mu h)\mathrm{d}t + bh\mathrm{d}w(t),\end{cases} \tag{5.3.6}$$

或写成矩阵形式:

$$\mathrm{d}\begin{bmatrix}k\\h\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}s_1y - \mu k\\ s_2y - \mu h\end{bmatrix}\mathrm{d}t + b\begin{bmatrix}k\\h\end{bmatrix}\mathrm{d}w(t). \tag{5.3.6$'$}$$

对于方程(5.3.6)有类似于定理5.3.1的以下结果.

定理 5.3.2　设以下条件满足:

$$b^2 < 2n/(2 - \alpha\wedge\beta), \tag{5.3.7}$$

则对任何初值 $(k_0,h_0) \in \mathbf{R}^2_{++}$, 方程(5.3.6)的解 $(k(t),h(t))$ 定义于区间 [0,

∞）上，且 a. s. 地保持为正.

证　仍用引理 4.6.1 的证法. 定义停时

$\tau_l=\inf\{t\geqslant 0:(k(t),h(t))$ 有定义且 $k(t)\in[l^{-1},l]$ 或 $h(t)\in[l^{-1},l]\}$，

只要证 $P(\tau_l\leqslant t)\to 0(l\to\infty,t>0)$. 约定 $\alpha'=1-\alpha,\beta'=1-\beta$. 定义

$$V(k,h)=(k^{\alpha'}-\alpha'\ln k)+(h^{\beta'}-\beta'\ln h)\triangleq V_1(k)+V_2(h),$$

则

$$\begin{aligned}\mathscr{L}V(k,h)&=\mathscr{L}V_1(k)+\mathscr{L}V_2(h)\\&=-\frac{\alpha'}{2}(2\mu+\alpha b^2)k^{\alpha'}+\alpha's_1h^{\beta}-\alpha's_1k^{-\alpha'}h^{\beta}+\alpha'\mu+\frac{\alpha'b^2}{2}\\&\quad-\frac{\beta'}{2}(2\mu+\beta b^2)h^{\beta'}+\beta's_2k^{\alpha}-\beta's_2k^{\alpha}h^{-\beta'}+\beta'\mu+\frac{\beta'b^2}{2}\\&\leqslant-\frac{\alpha'}{2}[2n-(2-\alpha)b^2]k^{\alpha'}+\alpha's_1h^{\beta}\\&\quad-\frac{\beta'}{2}[2n-(2-\beta)b^2]h^{\beta'}+\beta's_2k^{\alpha}+\text{const}.\end{aligned}\tag{5.3.8}$$

由条件(5.3.7)推出

$$2n-(2-\alpha)b^2>0,\quad 2n-(2-\beta)b^2>0,$$

由 $\alpha,\beta<1/2$ 推出 $\alpha<\alpha',\beta<\beta'$. 这就由(5.3.8)得到 $\mathscr{L}V(k,h)\leqslant c$，$c$ 是某个正常数. 于是

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}V(k(\tau_l\wedge t),h(\tau_l\wedge t))\\&=V(k_0,h_0)+\mathrm{E}\int_0^{\tau_l\wedge t}LV(k(s),h(s))\mathrm{d}s\\&\leqslant V(k_0,h_0)+ct\triangleq c_1.\end{aligned}$$

另一方面，当 $\tau_l\leqslant t$ 时以下四种情况之一必发生：

$$k(\tau_l)=l,\quad k(\tau_l)=l^{-1},\quad h(\tau_l)=l,\quad h(\tau_l)=l^{-1}.$$

于是

$$\begin{aligned}c_1&\geqslant\mathrm{E}V(k(\tau_l\wedge t),h(\tau_l\wedge t))\\&\geqslant P(\tau_l\leqslant t)[V_1(l)\wedge V_1(l^{-1})\wedge V_2(l)\wedge V_2(l^{-1})]\\&\triangleq P(\tau_l\leqslant t)U(l).\end{aligned}$$

显然 $U(l)\to\infty(l\to\infty)$，故得 $P(\tau_l\leqslant t)\to 0$，如所要证. □

类似于 Solow 模型，若令 $V(k,h)=k^2+h^2$，则

$$\begin{aligned}\gamma&\triangleq\frac{\mathscr{L}V(k,h)}{V(k,h)}-\frac{b^2}{2}\left[\frac{\nabla V(k,h)(k,h)^{\mathrm{T}}}{V(k,h)}\right]^2\\&=\frac{2k(s_1y-\mu k)+2h(s_2y-\mu h)+b^2(k^2+h^2)}{k^2+h^2}-2b^2\end{aligned}$$

$$= \frac{2k^{\alpha}h^{\beta}(s_1 k + s_2 h)}{k^2 + h^2} + b^2 - 2n \geqslant b^2 - 2n, \quad k,h > 0.$$

因此，若 $(k(t),h(t))$ 是方程(5.3.6)的整体解且 a.s. 保持为正，则

$$\varliminf_{t\to\infty} t^{-1}\ln[k^2(t) + h^2(t)] \geqslant b^2 - 2n, \text{a.s.}. \tag{5.3.9}$$

于是得出经济可能的三种结局是：

(i) 因在有限时间内 $k(t)$ 或 $h(t)$ 趋于零而中止；

(ii) 在有限时间内 $k(t)$ 或 $h(t)$ 无界增长；

(iii) 经济持久地运行且增长率不低于 $b^2/2 - n$.

若条件(5.3.7)满足，则仅有情况(iii)出现. 以上事实与 Solow 模型非常类似.

5.3.3　R&D 模型

前面两个模型都不涉及技术因素，因而不能解释技术进步对于经济增长的作用. 今考虑将技术水平 A 纳入模型之内. 设 A 依式(5.3.1b)增长，

$$\psi_A = C_A K^{\xi} A^{-\theta} L^{\eta}, \quad Y = C_Y K^{1-\beta}(AL)^{\alpha}, \tag{5.3.10}$$

其中 $C_A, C_Y, \xi, \theta, \eta, \alpha, \beta$ 均为正参数. ψ_A 的表达式表明，技术增长率 ψ_A 与物质资本及劳动力的投入正相关，而与现有技术水平负相关；后者意味着，技术水平愈高，其增长就愈不容易.

为记号简单起见，约定 $x = \psi_A, y = \psi_K$，且设 $\psi_K = s(Y/K)$. 于是

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{x} &= \xi\frac{\mathrm{d}K}{K} - \theta\frac{\mathrm{d}A}{A} + \eta\frac{\mathrm{d}L}{L} - \frac{\xi(1-\xi)}{2}\left(\frac{\mathrm{d}K}{K}\right)^2 + \frac{\theta(1+\theta)}{2}\left(\frac{\mathrm{d}A}{A}\right)^2 \\ &\quad - \frac{\eta(1-\eta)}{2}\left(\frac{\mathrm{d}L}{L}\right)^2 - \xi\theta\frac{\mathrm{d}K}{K}\frac{\mathrm{d}A}{A} + \xi\eta\frac{\mathrm{d}K}{K}\frac{\mathrm{d}L}{L} - \theta\eta\frac{\mathrm{d}A}{A}\frac{\mathrm{d}L}{L} \quad (\text{用}(1.3.28)) \\ &= (p - \theta x + \xi y)\mathrm{d}t - a\theta\mathrm{d}w_1 + b\eta\mathrm{d}w_2,\end{aligned}$$

其中

$$p = n\eta + \frac{1}{2}[a^2\theta(1+\theta) - b^2\eta(1-\eta)]. \tag{5.3.11a}$$

类似地求出 $y^{-1}\mathrm{d}y$，因而得到关于 (x,y) 的如下 SDE：

$$\begin{cases}\mathrm{d}x = x[(p - \theta x + \xi y)\mathrm{d}t - a\theta\mathrm{d}w_1 + b\eta\mathrm{d}w_2], \\ \mathrm{d}y = y[(q + \alpha x - \beta y)\mathrm{d}t + a\alpha\mathrm{d}w_1 + b\alpha\mathrm{d}w_2],\end{cases} \tag{5.3.12}$$

其中

$$q = \alpha n - \frac{\alpha(1-\alpha)}{2}(a^2 + b^2). \tag{5.3.11b}$$

(5.3.12)可写成如下矩阵形式：

$$d\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \mathrm{diag}(x,y)\left\{\left(\begin{bmatrix}p\\q\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-\theta & \xi\\ \alpha & -\beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}\right)dt + \begin{bmatrix}-a\theta & b\eta\\ a\alpha & b\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}dw_1\\dw_2\end{bmatrix}\right\},$$

这正是在§5.2中讨论过的 Lotka-Volterra 系统. 由(5.3.12)表示的模型就是随机形式下的 R&D 模型或研发模型，它是现代经济增长理论中的主要模型之一.

鉴于 R&D 模型是一个 LV 系统，此处正是应用上节结果的地方. 虽然方程(5.3.12)的扰动部分与(5.2.41)略有不同，但仍可应用定理 5.2.13 得到

定理 5.3.3 设以下条件满足：

$$\xi < \theta, \quad \alpha < \beta, \tag{5.3.13}$$

则对任何初值 $(x_0,y_0) \in \mathbf{R}^2_{++}$，方程(5.3.12)存在唯一以 (x_0,y_0) 为初值的正整体解 $(x(t),y(t))$，且对任给 $p>0$ 成立

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \mathrm{E}[x^2(t)+y^2(t)]^p \leqslant K, \tag{5.3.14}$$

其中 K 是与初值无关(但可能与 p 有关)的正常数. 特别，$x(t)$ 与 $y(t)$ 都是最终一致均方有界的.

直观上，定理 5.3.3 意味着在条件(5.3.13)之下，经济一旦启动，则无论资本与技术均将持久地保持正增长. 至于条件(5.3.13)的直观意义，粗略地说就是：高的技术水平对于技术继续增长的负面影响明显地强于资本对技术进步的正面影响，而生产规模收益递降 $(1-\beta+\alpha<1)$. 这些因素都对经济的爆发性扩张起抑制作用. 一般认为，条件(5.3.13)是现实合理的.

命题 5.2.8 亦可用于方程(5.3.12)，得出如下渐近轨道估计结果.

定理 5.3.4 设存在常数 $c_1,c_2>0$，使得矩阵

$$\begin{bmatrix}-2c_1\theta & c_1\xi+\alpha c_2\\ c_1\xi+\alpha c_2 & -2\beta c_2\end{bmatrix}$$

负定，即

$$4c_1c_2\beta\theta > (c_1\xi+\alpha c_2)^2. \tag{5.3.15}$$

则对任给 $(x_0,y_0)\in\mathbf{R}^2_{++}$，方程(5.3.12)存在唯一以 (x_0,y_0) 为初值的正整体解 $(x(t),y(t))$，且满足

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\ln[x^2(t)+y^2(t)]}{\ln t} \leqslant 0, \text{a.s.}. \tag{5.3.16}$$

若取 $c_1=c_2=1$，则条件(5.3.15)简化为

$$4\beta\theta > (\alpha+\xi)^2. \tag{5.3.17}$$

条件(5.3.13)与(5.3.17)并不可互相比较. 不过容易看出，满足条件(5.3.17)的参数组 $(\alpha,\beta,\xi,\theta)$ 甚多，其中具现实意义者亦不少.

§5.4　倒向随机微分方程

在 ODE 理论中,具有给定初值 $x(t_0)=x_0$ 的解既可以在区间 $[t_0,T]$ 上考虑,也可以在某个区间 $[a,t_0](a<t_0)$ 上考虑. 或者说,ODE 初值问题的解既可以是右行的,也可以是左行的. 至于 SDE,在 §2.1 所描述的框架下,只有右行解可合理地定义,而左行解则似乎是不可想象的. 在 SDE 理论中,所有概念都建立在给定的 σ 代数流 $\{\mathscr{F}_t\}$ 及作为 Markov 过程的 Brown 运动的基础上,时间参数 t 的方向性是绝不可忽略的. 例如,条件期望 $\mathrm{E}_t x(s)$ 就强烈地依赖于 $s>t$ 与 $s<t$. 简言之,在与随机过程有关的问题中,通常是不允许颠倒时间的.

以上强调了从发展过程的客观本性看时间具有不可逆性. 但这并不意味着从对过程的认知角度考虑不能提出对过程历史进行追溯的问题:从目前状态推断其历史. 就 SDE 而言,这就是"倒向解"的问题. 鉴于已指出的时间过程的不可逆本质,"倒向问题"与"正向问题"必然具有本质差别,而且也具有更大的困难.

在作了这些一般思考之后,现在该确切提到倒向随机微分方程(**BSDE**)了. 初看起来,BSDE 问题似乎就是求形如(2.1.2)的 SDE 的左行解的问题. 但实际上,由一些典型背景问题所提示的 BSDE 具有如下形式:

$$\begin{cases}\mathrm{d}x(t)=f(t,x(t),y(t))\mathrm{d}t+[g(t,x(t))+y(t)]\mathrm{d}w(t),\\ x(T)=X,\end{cases}\tag{5.4.1}$$

其中 $f:\ J\times\Omega\times\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^{d\times m}\to\mathbf{R}^d$ 与 $g:\ J\times\Omega\times\mathbf{R}^d\to\mathbf{R}^{d\times m}$ 是给定的函数,其性质将在下面给定,$J=[0,T]$;$w=(w_1,w_2,\cdots,w_m)^{\mathrm{T}}$ 是给定 m 维 Brown 运动,X 是给定的 $\mathscr{F}_T$ 可测 d 维随机变量,$x(t)$ 与 $y(t)$ 则分别是未知的 $\mathbf{R}^d$ 值与 $\mathbf{R}^{d\times m}$ 值随机函数. 由随机微分的定义(参看(1.3.15)与(1.3.16)),可写出方程(5.4.1)的积分形式:

$$x(t)+\int_t^T f(s,x(s),y(s))\mathrm{d}s+\int_t^T[g(s,x(s))+y(s)]\mathrm{d}w(s)=X(t\in J).\tag{5.4.1$'$}$$

BSDE 被表为形式(5.4.1),而不是初看起来似乎更自然也较简单的如下形式:

$$\mathrm{d}x(t)=f(t,x(t))\mathrm{d}t+g(t,x(t))\mathrm{d}w(t)(t\in J),\quad x(T)=X,\tag{$*$}$$

可作如下初步解释:因随机扰动存在而导致的巨大不确定性,无论如何选择 x_0,方程的解 $x(t)=x(t,x_0)$ 终于 $x(T)=X$ 的机会亦很渺茫,因而问题($*$)很可能根本无解. 要使方程有解,应在方程右端加进一个有待确定的"控制变量" y,而这就导致考虑形如(5.4.1)的方程. (5.4.1)中的一个方程能同时决定两个未知的随机

函数 $x(t)$ 与 $y(t)$，这表明 $x(T)=X$ 是一个远比初值条件 $x(0)=x_0$ 更强的条件.

形如(5.4.1)或(5.4.1)′的 BSDE 自然有其实际背景. 例如，在随机最优控制理论中，(5.4.1)中的 $x(t)$ 与 $y(t)$ 分别表示控制系统的状态变量与控制变量，它们都需要由已知的方程及“终值” X 确定. 20 世纪 90 年代初，Pardour 与 Peng 首先证明了 BSDE(5.4.1)的存在定理，并成功地应用这种方程的解表示某些拟线性抛物方程的解（参看后面的定理 5.4.5）. 这一重大成果大大激发了对 BSDE 的研究兴趣.

5.4.1 存在定理

以 $\mathscr{P}$ 记 $J\times\Omega$ 的 $\mathscr{F}_t$ 循序可测子集的 σ 代数. 下面设函数 f 与 g 分别为 $\mathscr{P}\times\mathscr{B}^d\times\mathscr{B}^{d\times m}$ 可测与 $\mathscr{P}\times\mathscr{B}^d$ 可测，$X\in L^2_{\mathscr{F}_T}(\Omega,\mathbf{R}^d)$. 鉴于下面建立的存在定理基于鞅表示定理（定理 1.3.4），本节限取 $\mathscr{F}_t=\mathscr{F}_t$.

关于(5.4.1)的解概念与通常的 SDE 稍有不同.

定义 5.4.1 若一对随机过程 $(x(t),y(t))\,(t\in J)$ 满足以下条件：

(i) $x(t)\in\mathscr{M}^2(J,\mathbf{R}^d)$，$y(t)\in\mathscr{M}^2(J,\mathbf{R}^{d\times m})$；

(ii) $f(t,x(t),y(t))\in\mathscr{M}^2(J,\mathbf{R}^d)$，$g(t,x(t))\in\mathscr{M}^2(J,\mathbf{R}^{d\times m})$；

(iii) $x(T)=X$ 且 $x(t),y(t)$ 在 J 上使方程(5.4.1)′满足，

则称 $(x(t),y(t))$ 为 BSDE(5.4.1)的解. 若对(5.4.1)的任何其他解 $(\bar{x}(t),\bar{y}(t))$ 有

$$P(x(t))=\bar{x}(t)(\forall t\in J))=1,$$
$$\mathrm{E}\int_0^T|y(t)-\bar{y}(t)|^2\mathrm{d}t=0, \tag{5.4.2}$$

则称 $(x(t),y(t))$ 是方程(5.4.1)的唯一解.

以下结果是 Pardoux 与 Peng 于 1990 年首先证明的.

定理 5.4.2 设函数 f 与 g 满足以下条件：

(i) 一致 Lipschitz 条件：存在正常数 K，使得

$$|f(t,x,y)-f(t,\bar{x},\bar{y})|^2\leqslant K(|x-\bar{x}|^2+|y-\bar{y}|^2),\text{a.s.}, \tag{5.4.3}$$
$$|g(t,x)-g(t,\bar{x})|^2\leqslant K|x-\bar{x}|^2,\text{a.s.}; \tag{5.4.4}$$

(ii) $f(t,0,0)\in\mathscr{M}^2(J,\mathbf{R}^d)$，$g(t,0)\in\mathscr{M}^2(J,\mathbf{R}^{d\times m})$，

则方程(5.4.1)存在唯一解.

证 除了要用到鞅表示定理这一关键结果之外，定理证明仍然主要依赖于 Picard 迭代. 但与定理 3.1.2 及定理 3.3.2 不同，现在要同时决定两个未知函数 $x(t),y(t)$，因而迭代序列的构成颇为精巧，遵循一个从特殊到一般的递进程序，整个证明显得有些迂回与冗长. 但基本思路还是明显的，而且某些证明环节几乎在类似形式下重复.

(i) 首先设 $f = f(t), g = g(t)$，即方程为

$$dx(t) = f(t)dt + [g(t) + y(t)]dw(t)(t \in J), \quad x(T) = X. \quad (5.4.5)$$

试用逆推法得出方程(5.4.5)的解的表达式. 假定 $(x(t), y(t))$ 是方程(5.4.5)的解,则

$$x(t) = M(t) + \int_0^t f(s)ds(t \in J), \quad X = M(T) + \int_0^T f(s)ds, \quad (5.4.6)$$

其中

$$M(t) = x(0) + \int_0^t [g(s) + y(s)]dw(s), \quad t \in J$$

是一个鞅. 由式(5.4.6)及鞅的性质有

$$M(t) = E_t M(T) = E_t\left[X - \int_0^T f(s)ds\right]. \quad (5.4.7)$$

以式(5.4.7)定义 $M(t)$，可验证 $M(t)$ 确为一个平方可积鞅,它有一右连左极的修正[①]. 于是由鞅表示定理(定理1.3.4),存在 $h \in \mathscr{M}^2(J, \mathbf{R}^{d\times m})$，使得

$$M(t) = M(0) + \int_0^t h(s)dw(s), \quad t \in J.$$

比较上式与式(5.4.6),自然应令

$$x(t) = M(t) + \int_0^t f(s)ds, \quad y(t) = h(t) - g(t).$$

然后直接验知 $x(t) \in \mathscr{M}^2(J, \mathbf{R}^d), y(t) \in \mathscr{M}^2(J, \mathbf{R}^{m\times d})$，且 $(x(t), y(t))$ 确满足方程(5.4.5),这些都不必细述. 若 $(\bar{x}(t), \bar{y}(t))$ 也是方程(5.4.5)的解,则直接从(5.4.5)得

$$x(t) - \bar{x}(t) = \int_t^T [\bar{y}(s) - y(s)]dw(s),$$

从而

$$x(t) - \bar{x}(t) = E_t[x(t) - \bar{x}(t)] = 0, \text{a. s.},$$

$$0 = E\,|\,x(0) - \bar{x}(0)\,|^2 = E\int_0^T |\,\bar{y}(s) - y(s)\,|^2 ds,$$

可见 $(x(t), y(t))$ 是方程(5.4.5)的唯一解.

(ii) 其次设 $f = f(t, y), g = g(t)$，即方程为

$$dx(t) = f(t, y(t))dt + [g(t) + y(t)]dw(t)(t \in J), \quad x(T) = X. \quad (5.4.8)$$

作迭代序列

$$\begin{cases} y_0(t) \equiv 0, \quad t \in J, \\ x_{n+1}(t) + \int_t^T f(s, y_n(s))ds + \int_t^T [g(s) + y_{n+1}(s)]dw(s) = X, t \in J, n \geq 0. \end{cases}$$

(5.4.9)

① 任何鞅均有此性质,参看 Mao(1997).

只要 $y_n(t)$ 已有意义,则由已证的(i),满足(5.4.9)的 $(x_{n+1}(t), y_{n+1}(t))$ 必唯一地存在,因此迭代序列的构成是可行的. 注意由(5.4.9)有

$$\mathrm{d}x_{n+1}(t) = f(t, y_n(t))\mathrm{d}t + [g(t) + y_{n+1}(t)]\mathrm{d}w(t), \quad x_{n+1}(T) = X. \qquad (5.4.9)'$$

如同定理 3.1.2 之证,关键在于说明 $\{x_n(t)\}$ 与 $\{y_n(t)\}$ 分别在空间 $\mathscr{M}^2(J, \mathbf{R}^d)$ 与 $\mathscr{M}^2(J, \mathbf{R}^{d\times m})$ 中范数收敛. 为此,令

$$\begin{cases} u_n(t) = \mathrm{E}\int_t^T |x_{n+1}(s) - x_n(s)|^2 \mathrm{d}s, \\ v_n(t) = \mathrm{E}\int_t^T |y_{n+1}(s) - y_n(s)|^2 \mathrm{d}s. \end{cases} \qquad (5.4.10)$$

注意到 $u_n(0) = \| x_{n+1} - x_n \|_2^2$, $\|\cdot\|_2$ 依(1.3.1),只要说明级数

$$\sum \sqrt{u_n(0)} \text{ 与} \sum \sqrt{v_n(0)}$$

收敛. 注意 $u_n(t)$ 与 $v_n(t)$ 均为单调减的非负函数, $u'_n(t) = -\mathrm{E}|x_{n+1}(t) - x_n(t)|$. 首先估计

$$\begin{aligned}
& v_n(t) - u'_n(t) \\
&= v_n(t) - \mathrm{E}|x_{n+1}(s) - x_n(s)|^2 \Big|_t^T \\
&= v_n(t) - \mathrm{E}\int_t^T L|x_{n+1}(s) - x_n(s)|^2 \mathrm{d}s \\
&= -\mathrm{E}\int_t^T 2[x_{n+1}(s) - x_n(s)]^{\mathrm{T}}[f(s, y_n(s)) - f(s, y_{n-1}(s))]\mathrm{d}s \quad (\text{用}(5.4.9)') \\
&\leqslant \mathrm{E}\int_t^T 2|x_{n+1}(s) - x_n(s)||f(s, y_n(s)) - f(s, y_{n-1}(s))|\mathrm{d}s \\
&\leqslant \mathrm{E}\int_t^T [\varepsilon|x_{n+1}(s) - x_n(s)|^2 + \varepsilon^{-1}K|y_n(s) - y_{n-1}(s)|^2]\mathrm{d}s \quad (\text{用}(5.4.3)) \\
&= \varepsilon u_n(t) + \varepsilon^{-1}K v_{n-1}(t) = 2K u_n(t) + \frac{1}{2}v_{n-1}(t), \qquad (\text{取 } \varepsilon = 2K)
\end{aligned}$$

这就得到关键的微分不等式:

$$v_n(t) - \frac{1}{2}v_{n-1}(t) \leqslant u'_n(t) + 2Ku_n(t). \qquad (5.4.11)$$

现在来解此不等式. 两边乘以 e^{2Kt} 得到

$$\mathrm{e}^{2Kt}\left[v_n(t) - \frac{1}{2}v_{n-1}(t)\right] \leqslant \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathrm{e}^{2Kt}u_n(t)],$$

然后两边积分得(注意 $u_n(T) = v_n(T) = 0$!)

$$\int_t^T \mathrm{e}^{2Ks}\left[v_n(s) - \frac{1}{2}v_{n-1}(s)\right]\mathrm{d}s \leqslant -\mathrm{e}^{2Kt}u_n(t), \qquad (5.4.12)$$

于是

$$\int_t^T e^{2Ks} v_n(s)\,ds \leqslant \frac{1}{2}\int_t^T e^{2Ks} v_{n-1}(s)\,ds.$$

由此归纳地推出

$$\int_t^T e^{2Ks} v_n(s)\,ds \leqslant \frac{1}{2^n}\int_t^T e^{2Ks} v_0(s)\,ds \leqslant \frac{v_0(0)e^{2KT}}{2^{n+1}K}.$$

然后用式(5.4.12)与(5.4.11)得

$$u_n(0) \leqslant \frac{1}{2}\int_0^T e^{2Ks} v_{n-1}(s)\,ds \leqslant \frac{v_0(0)e^{2KT}}{2^{n+1}K},$$

$$v_n(0) \leqslant 2Ku_n(0) + \frac{1}{2}v_{n-1}(0) \leqslant \frac{v_0(0)e^{2KT}}{2^n} + \frac{1}{2}v_{n-1}(0),$$

由此可归纳地得 $v_n(0) \leqslant 2^{-n}v_0(0)(1+ne^{2KT})$. 由所得结果直接看出

$$\sum \sqrt{u_n(0)} < \infty, \quad \sum \sqrt{v_n(0)} < \infty.$$

于是 $\{x_n(t)\}$ 与 $\{y_n(t)\}$ 分别在 $\mathscr{M}^2(J,\mathbf{R}^d)$ 与 $\mathscr{M}^2(J,\mathbf{R}^{d\times m})$ 中范数收敛于某个 $x(t)$ 与 $y(t)$，如通常一样可验证 $(x(t),y(t))$ 是方程(5.4.8)的解.

若 $(\bar{x}(t),\bar{y}(t))$ 也是方程(5.4.8)的解，则 $z(t) \triangleq x(t)-\bar{x}(t)$ 满足

$$dz(t) = [f(t,y(t)) - f(t,\bar{y}(t))]dt + [y(t)-\bar{y}(t)]dw(t), \quad z(T)=0.$$

仿照上面对 $v_n(t)-u'_n(t)$ 的估计有

$$\begin{aligned}
&E\int_t^T |y(s)-\bar{y}(s)|^2 ds + E|z(t)|^2 \\
&= -E\int_t^T 2z^{T}(s)[f(s,y(s)) - f(s,\bar{y}(s))]ds \\
&\leqslant E\int_t^T 2|z(s)||f(s,y(s)) - f(s,\bar{y}(s))|\,ds \\
&\leqslant E\int_t^T [\varepsilon|z(s)|^2 + \varepsilon^{-1}K|y(s)-\bar{y}(s)|^2]ds \qquad (\text{用}(5.4.3)) \\
&= 2K\int_t^T E|z(s)|^2 + \frac{1}{2}\int_t^T E|y(s)-\bar{y}(s)|^2 ds, \qquad (\text{取}\ \varepsilon = 2K)
\end{aligned}$$

故得

$$E|z(t)|^2 \vee \frac{1}{2}E\int_t^T |y(s)-\bar{y}(s)|^2 ds \leqslant 2K\int_t^T E|z(s)|^2 ds. \tag{5.4.13}$$

用 Gronwall 不等式((1.3.64))从(5.4.13)得出 $E|z(t)|^2 \equiv 0$. 以此代入(5.4.13)又得

$$E\int_0^T |y(s)-\bar{y}(s)|^2 ds = 0,$$

可见 $(x(t),y(t))$ 是方程(5.4.8)的唯一解.

(iii) 最后证一般情况. 类似于(5.4.9)，作迭代序列：

$$\begin{cases} x_0(t) \equiv 0, y_0(t) \equiv 0, \quad t \in J, \\ x_{n+1}(t) + \int_t^T f(s, x_n(s), y_{n+1}(s))\mathrm{d}s \\ \qquad + \int_t^T [g(s, x_n(s)) + y_{n+1}(s)]\mathrm{d}w(s) = X, \quad n \geqslant 0. \end{cases} \tag{5.4.14}$$

只要 $(x_n(t), y_n(t))(n \geqslant 0)$ 已定义,则由已证的(ii),满足式(5.4.14)的 $(x_{n+1}(t), y_{n+1}(t))$ 必唯一地存在.因此(5.4.14)合理地定义出迭代序列 $\{x_n(t), y_n(t)\}$. 类似于(ii)的证明,作估计

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}|x_{n+1}(t) - x_n(t)|^2 \\ &= -2\mathrm{E}\int_t^T [x_{n+1}(s) - x_n(s)]^{\mathrm{T}}[f(s, x_n(s), y_{n+1}(s)) - f(s, x_{n-1}(s), y_n(s))]\mathrm{d}s \\ &\quad - \mathrm{E}\int_t^T |g(s, x_n(s)) - g(s, x_{n-1}(s)) + y_{n+1}(s) - y_n(s)|^2\mathrm{d}s \\ &\leqslant 4K\mathrm{E}\int_t^T |x_{n+1}(s) - x_n(s)|^2\mathrm{d}s \\ &\quad + \frac{1}{4}\mathrm{E}\int_t^T [|x_n(s) - x_{n-1}(s)|^2 + |y_{n+1}(s) - y_n(s)|^2]\mathrm{d}s \\ &\quad + K\mathrm{E}\int_t^T |x_n(s) - x_{n-1}(s)|^2\mathrm{d}s - \frac{1}{2}\mathrm{E}\int_t^T |y_{n+1}(s) - y_n(s)|^2\mathrm{d}s, \end{aligned}$$

其中最后一步用了初等不等式:

$$2(a+b)^2 \geqslant a^2 - 2b^2, \quad a, b \in \mathbf{R}.$$

这就得到对应于(5.4.11)的微分不等式(记号依(5.4.10)):

$$-u'_n(t) - 4Ku_n(t) \leqslant \left(K + \frac{1}{4}\right)u_{n-1}(t) - \frac{1}{4}v_n(t). \tag{5.4.15}$$

由式(5.4.15)有

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathrm{e}^{4Kt}u_n(t)] \leqslant \left(K + \frac{1}{4}\right)\mathrm{e}^{4Kt}u_{n-1}(t),$$

$$u_n(t) \leqslant \left(K + \frac{1}{4}\right)\int_t^T \mathrm{e}^{4K(s-t)}u_{n-1}(s)\mathrm{d}s \leqslant \beta\int_t^T u_{n-1}(s)\mathrm{d}s,$$

其中 $\beta = (K + 1/4)\mathrm{e}^{4KT}$. 据此反复迭代得出

$$u_n(t) \leqslant \frac{\beta^k}{(k-1)!}\int_t^T (s-t)^{k-1}u_{n-k}(s)\mathrm{d}s, \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$$

因而 $u_n(0) \leqslant u_0(0)(\beta T)^n/n!$. 然后由式(5.4.15)有

$$v_n(0) \leqslant 16Ku_n(0) + (4K+1)u_{n-1}(0),$$

由此看出 $\sum \sqrt{u_n}(0)$ 与 $\sum \sqrt{v_n(0)}$ 均收敛. 这就同样得出 $\{x_n(t)\}$ 与 $\{y_n(t)\}$ 分别在空间 $\mathscr{M}^2(J, \mathbf{R}^d)$ 与 $\mathscr{M}^2(J, \mathbf{R}^{d\times m})$ 中收敛于 $x(t)$ 与 $y(t)$, $(x(t), y(t))$ 就

是方程(5.4.1)的解.

至于唯一性之证,则只需将(ii)中的证明稍作修改. 设 $(\bar{x}(t),\bar{y}(t))$ 是方程(5.4.1)的另一组解,令 $z(t) = x(t) - \bar{x}(t)$, 则

$$\begin{aligned}
&E|z(t)|^2\\
&= -E\int_t^T\{2z^T(s)[f(s,x(s),y(s)) - f(s,\bar{x}(s),\bar{y}(s))]\\
&\quad +|g(s,x(s)) - g(s,\bar{x}(s)) + y(s) - \bar{y}(s)|^2\}ds\\
&\leqslant 4K\int_t^T E|z(s)|^2ds + \frac{1}{4}\int_t^T E[|z(s)|^2 + |y(s) - \bar{y}(s)|^2]ds\\
&\quad - \int_t^T E|g(s,x(s)) - g(s,\bar{x}(s))|^2ds - \int_t^T E|y(s) - \bar{y}(s)|^2ds\\
&\quad - 2E\int_t^T tr[(g(s,x(s)) - g(s,\bar{x}(s)))^T(y(s) - \bar{y}(s))]ds\\
&\leqslant \left(4K + \frac{1}{4}\right)\int_t^T E|z(s)|^2ds - \frac{1}{2}\int_t^T E|y(s) - \bar{y}(s)|^2ds\\
&\quad + 3E\int_t^T |g(s,x(s)) - g(s,\bar{x}(s))|^2ds\\
&\leqslant \left(7K + \frac{1}{4}\right)\int_t^T E|z(s)|^2ds - \frac{1}{2}\int_t^T E|y(s) - \bar{y}(s)|^2ds,
\end{aligned}$$

故得

$$\begin{aligned}
E|z(t)|^2 &\leqslant E|z(t)|^2 + \frac{1}{2}\int_t^T E|y(s) - \bar{y}(s)|^2ds\\
&\leqslant (7K+1)\int_t^T E|z(s)|^2ds.
\end{aligned}$$

这就如同(ii)段之证,由 Gronwall 不等式得 $E|z(s)|^2 \equiv 0$ 与

$$\int_0^T E|y(t) - \bar{y}(t)|^2dt = 0,$$

唯一性得证. □

对于方程(5.4.1)中函数 f 与 g 的设定,注意到一个与通常 SDE 的差别:此处 f 与 g 本身就不必为普通函数,即它们可能直接依赖于 $\omega \in \Omega$. 观察定理 5.4.1 的证明,现在已能理解,放宽对 f 与 g 为普通函数的限制是不可避免的. 当然,即使对于 SDE(2.1.2),其实亦可容许 f,g 为随机函数. 如此推广之后,存在定理的条件几乎不必作什么重大修改.

5.4.2　解的估计

设 $(x(t),y(t))$ 是方程(5.4.1)的唯一解. 如在 2.1.2 节中一样,对任给 $p > 0$, 可提出估计 $E|x(t)|^p$ 的问题. 为此,无疑要利用公式:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}|x|^p &= (p/2)|x|^{p-2}[2x^{\mathrm{T}}f(t,x,y)+|g(t,x)+y|^2\\&\quad+(p-2)|x|^{-2}|x^{\mathrm{T}}g(t,x)+x^{\mathrm{T}}y|^2]\\&\geqslant (p/2)|x|^{p-2}[2x^{\mathrm{T}}f(t,x,y)+|g(t,x)+y|^2] \qquad (\text{若 } p\geqslant 2)\\&\geqslant (p/2)|x|^{p-2}[2x^{\mathrm{T}}f(t,x,y)+2\mathrm{tr}(y^{\mathrm{T}}g(t,x))+|y|^2].\end{aligned} \tag{5.4.16}$$

将关于 f 与 g 的一定增长条件用于(5.4.16),可得到适当的矩估计.下面就是一个这一类的结果.

定理 5.4.3 设 $X\in L^p, p\geqslant 2, (x(t),y(t))$ 是方程(5.4.1)的解.若函数 f 与 g 满足以下条件:

$$|f(t,x,y)-f(t,0,0)|^2\leqslant K(1+|x|^2+|y|^2), \tag{5.4.17}$$

$$|g(t,x)-g(t,0)|^2\leqslant K(1+|x|^2), \tag{5.4.18}$$

$$\mathrm{E}\int_0^T|f(t,0,0)|^p\mathrm{d}t<\infty,\quad \mathrm{E}\int_0^T|g(t,0)|^p\mathrm{d}t<\infty, \tag{5.4.19}$$

其中 K 是正常数,则有以下估计:

$$\mathrm{E}|x(t)|^p\leqslant(c+\mathrm{E}|X|^p)\mathrm{e}^{\beta(T-t)}, \tag{5.4.20}$$

$$\mathrm{E}\int_0^T|x(t)|^{p-2}|y(t)|^2\mathrm{d}t\leqslant\frac{4}{p}(c+\mathrm{E}|X|^p)\mathrm{e}^{\beta T}, \tag{5.4.21}$$

其中 $\beta=2p(4K+1)$,

$$c=\frac{2}{p}\mathrm{E}\int_0^T\left[\frac{p}{8K}(K+|f(t,0,0)|^2)+4p(K+|g(t,0)|^2)\right]^{p/2}\mathrm{d}t. \tag{5.4.22}$$

证 首先利用式(5.4.16)估计 $\mathrm{E}|x(t)|^p$:

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}|x(t)|^p-\mathrm{E}|X|^p\\&=-\mathrm{E}|x(s)|^p\Big|_t^T=-\mathrm{E}\int_t^T L|x(s)|^p\mathrm{d}s\\&\leqslant-\frac{p}{2}\mathrm{E}\int_t^T|x(s)|^{p-2}[2x^{\mathrm{T}}(s)f(s,x(s),y(s))\\&\quad+2\mathrm{tr}(y^{\mathrm{T}}(s)g(s,x(s)))+|y(s)|^2]\mathrm{d}s \qquad (\text{用(5.4.16)})\\&\leqslant\frac{p}{2}\mathrm{E}\int_t^T|x(s)|^{p-2}[2|x(s)||f(s,x(s),y(s))|\\&\quad+2|y(s)||g(s,x(s))|-|y(s)|^2]\mathrm{d}s\\&\leqslant\frac{p}{2}\mathrm{E}\int_t^T|x(s)|^{p-2}\Big[8K|x(s)|^2+\frac{1}{8K}|f(s,x(s),y(s))|^2\\&\quad+4|g(s,x(s))|^2-\frac{3}{4}|y(s)|^2\Big]\mathrm{d}s\\&\leqslant\frac{p}{2}\mathrm{E}\int_t^T|x(s)|^{p-2}\end{aligned}$$

$$\times\Big\{8K|x(s)|^2+\frac{1}{4K}[K+K|x(s)|^2+K|g(s)|^2+|f(s,0,0)|^2]$$

$$+8[K+K|x(s)|^2+|g(s,0)|^2]-\frac{3}{4}|y(s)|^2\Big\}\mathrm{d}s\quad(\text{用}(5.4.17),(5.4.18))$$

$$\leqslant p\Big(8K+\frac{1}{8}\Big)\mathrm{E}\int_t^T|x(s)|^p\mathrm{d}s-\frac{p}{4}\mathrm{E}\int_t^T|x(s)|^{p-2}|y(s)|^2\mathrm{d}s$$

$$+\mathrm{E}\int_t^T|x(s)|^{p-2}\Big[\frac{p}{8K}(K+|f(s,0,0)|^2)+4p(K+|g(s,0)|^2)\Big]\mathrm{d}s$$

$$\leqslant\Big[p(8K+1)+\frac{p-2}{p}\Big]\mathrm{E}\int_t^T|x(s)|^p\mathrm{d}s-\frac{p}{4}\mathrm{E}\int_t^T|x(s)|^{p-2}|y(s)|^2\mathrm{d}s+c\qquad(\text{用}(1.3.55))$$

$$\leqslant\beta\int_t^T\mathrm{E}|x(s)|^p\mathrm{d}s-\frac{p}{4}\mathrm{E}\int_t^T|x(s)|^{p-2}|y(s)|^2\mathrm{d}s+c,$$

其中 $\beta=2p(4K+1)$，c 依式(5.4.22)，条件(5.4.19)保证 $c<\infty$. 这就得到

$$\begin{cases}\mathrm{E}|x(t)|^p\leqslant c+\mathrm{E}|X|^p+\beta\int_t^T\mathrm{E}|x(s)|^p\mathrm{d}s, & (5.4.23\mathrm{a})\\ \frac{p}{4}\mathrm{E}\int_0^T|x(t)|^{p-2}|y(t)|^2\mathrm{d}t\leqslant c+\mathrm{E}|X|^p+\beta\int_0^T\mathrm{E}|x(t)|^p\mathrm{d}t. & (5.4.23\mathrm{b})\end{cases}$$

用 Gronwall 不等式((1.3.63))从(5.4.23a)立得不等式(5.4.20)，然后以(5.4.20)代入(5.4.23b)得不等式(5.4.21). □

特别，取 $p=2$，由(5.4.20)与(5.4.21)分别得

$$\mathrm{E}|x(t)|^2\leqslant(c+\mathrm{E}|X|^2)\mathrm{e}^{4(4K+1)(T-t)},$$

$$\mathrm{E}\int_0^T|y(t)|^2\mathrm{d}t\leqslant2(c+\mathrm{E}|X|^2)\mathrm{e}^{4T(4K+1)},$$

$$c=\mathrm{E}\int_0^T\Big[\frac{1}{4K}(K+|f(t,0,0)|^2)+8(K+|g(t,0)|^2)\Big]\mathrm{d}t.$$

矩估计(5.4.20)可看作一个类似于(2.1.14)的结果；而且，对照定理 5.4.3 与定理 2.1.4 的证明，亦不无类似之处. 定理 5.4.3 之证中所用到的关键等式

$$\mathrm{E}|x(s)|^p\Big|_t^T=\mathrm{E}\int_t^T L|x(s)|^p\mathrm{d}s$$

源于 Itô 公式(参看(1.3.23))，实际上与所涉及的方程类型无关. 这些事实无疑会增加将 BSDE 与 SDE 进行类比的信心. 那么能否得出类似于(2.1.17)的估计? 如果以 $|x|^p$ 取代函数 $(1+|x|^2)^{p/2}$，定理 2.1.6 证明中所实行的那些步骤，对于方程(5.4.1)也是可进行下去的，至少可走出头几步. 但两类方程的结构毕竟不同，我们得不出一个类似于(2.1.17)的结果，而只能得出如下这个粗得多的结果.

定理 5.4.4　在定理 5.4.3 的条件下，有以下结论：

$$\mathrm{E}\Big(\sup_{t\in J}|x(t)|^p\Big)<\infty,\qquad(5.4.24)$$

$$E\left[\int_0^T |y(t)|^2 dt\right]^{\frac{p}{2}} < \infty. \tag{5.4.25}$$

证 以 h 记式(5.4.24)之左端. 由条件(5.4.19)~(5.4.21),

$$\begin{cases} E\int_0^T |f(t,0,0)|^p dt, \quad E\int_0^T |g(t,0)|^p dt, \\ E\int_0^T |x(t)|^p dt, \quad E\int_0^T |x(t)|^{p-2} |y(t)|^2 dt \end{cases} \tag{5.4.26}$$

均为有限,因此只要证明 h 为以上积分的某个线性组合所控制. 我们可以得出这样一个线性组合的详细表达式,但并无必要写出它.

现在估计

$$\begin{aligned}
& h - E|X|^p \\
&= E\left[\sup_{t\in J}\left(|X|^p - \int_t^T d|x(s)|^p\right)\right] - E|X|^p \\
&= E\left[\sup_{t\in J}\left(-\int_t^T d|x(s)|^p\right)\right] \\
&= E\left[\sup_{t\in J}\left(-p\int_t^T |x(s)|^{p-2}x^T(s)f(s,x(s),y(s))ds\right.\right. \\
&\quad - \frac{p}{2}\int_t^T |x(s)|^{p-2}|g(s,x(s)) + y(s)|^2 ds \\
&\quad - \frac{p(p-2)}{2}\int_t^T |x(s)|^{p-4}|x^T(s)(g(s,x(s)) + y(s))|^2 ds \\
&\quad \left.\left. - p\int_t^T |x(s)|^{p-2}x^T(s)(g(s,x(s)) + y(s))dw(s)\right)\right] \\
&\leqslant pE\int_0^T |x(t)|^{p-2}|x(t)||f(t,x(t),y(t))| dt \\
&\quad + pE\left[\sup_{t\in J}\left(-\int_t^T |x(s)|^{p-2}x^T(s)(g(s,x(s)) + y(s))dw(s)\right)\right] \\
&\leqslant pE\int_0^T |x(t)|^{p-2}\left[K|x(t)|^2\right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}(1 + |x(t)|^2 + |y(t)|^2 + |f(t,0,0)|^2)\right]dt \\
&\quad + pE\left[\sup_{t\in J}\left|\int_0^t |x(s)|^{p-2}x^T(s)(g(s,x(s)) + y(s))dw(s)\right|\right] \\
&\leqslant c_1 + \frac{p}{2}E\int_0^T |x(t)|^{p-2}(1 + |f(t,0,0)|^2)dt \\
&\quad + E\left[32p^2\int_0^T |x(t)|^{2p-2}|g(t,x(t)) + y(t)|^2 dt\right]^{\frac{1}{2}} \qquad (\text{用}(1.3.48)) \\
&\leqslant c_1 + \frac{p-2}{2}E\int_0^T |x(t)|^p dt + E\int_0^T [1 + |f(t.0,0)|^2]^{p/2} dt
\end{aligned}$$

$$+\mathrm{E}\Big[\sup_{t\in J}|x(t)|^{p}\cdot 32p^{2}\int_{0}^{T}|x(t)|^{p-2}|g(t,x(t))+y(t)|^{2}\mathrm{d}t\Big]$$

$$\leqslant c_{2}+\frac{h}{2}+16p^{2}\mathrm{E}\int_{0}^{\mathrm{T}}|x(t)|^{p-2}|g(t,x(t))+y(t)|^{2}\mathrm{d}t$$

$$\leqslant c_{2}+\frac{h}{2}+32p^{2}\mathrm{E}\int_{0}^{T}|x(t)|^{p-2}[|g(t,x(t))|^{2}+|y(t)|^{2}]\mathrm{d}t$$

$$\leqslant c_{3}+\frac{h}{2}+32p^{2}\mathrm{E}\int_{0}^{T}|x(t)|^{p-2}|g(t,x(t))|^{2}\mathrm{d}t$$

$$\leqslant c_{3}+\frac{h}{2}+32p(p-2)\mathrm{E}\int_{0}^{T}|x(t)|^{p}\mathrm{d}t+64p\mathrm{E}\int_{0}^{T}|g(t,x(t))|^{p}\mathrm{d}t$$

$$\leqslant c_{4}+\frac{h}{2}+64p\cdot 2^{p-1}\mathrm{E}\int_{0}^{T}[|g(t,0)|^{p}+K^{p/2}(1+|x(t)|^{2})^{p/2}]\mathrm{d}t$$

$$\leqslant c_{5}+\frac{h}{2},$$

以上 $c_1\sim c_5$ 是(5.4.26)中诸积分的线性组合. 这就得到

$$h\leqslant 2(E|X|^{p}+c_{5})<\infty.$$

为证式(5.4.25),不妨只证

$$H\triangleq \mathrm{E}\Big[\int_{a}^{T}|y(t)|^{2}\mathrm{d}t\Big]^{\frac{p}{2}}<\infty, \qquad (5.4.27)$$

其中 $a\in[0,T)$,$T-a$ 适当小. 否则可将 $[0,T]$ 划分为若干小区间,然后对每个小区间证形如(5.4.27)的不等式. 为证(5.4.27),关键是用(1.3.48):

$$c_{p}H\leqslant \mathrm{E}\Big[\sup_{a\leqslant t\leqslant T}\Big|\int_{a}^{t}y(t)\mathrm{d}w(s)\Big|^{p}\Big]$$

$$=\mathrm{E}\Big[\sup_{a\leqslant t\leqslant T}\Big|\int_{a}^{t}\mathrm{d}x(s)-f(s,x(s),y(s))\mathrm{d}s-g(s,x(s))\mathrm{d}w(s)\Big|^{p}\Big] \quad (\text{用}(5.4.1))$$

$$\leqslant 3^{p-1}\mathrm{E}\Big[\sup_{a\leqslant t\leqslant T}\Big(|x(t)-x(a)|^{p}+\Big|\int_{a}^{t}f(s,x(s),y(s))\mathrm{d}s\Big|$$

$$+\Big|\int_{a}^{t}g(s,x(s))\mathrm{d}w(s)\Big|^{p}\Big)\Big]$$

$$\leqslant \beta_{1}+3^{p-1}\mathrm{E}\Big[\int_{a}^{T}|f(t,x(t),y(t))|\mathrm{d}t\Big]^{p} \quad (\text{用}(5.4.16))$$

$$+3^{p-1}\mathrm{E}\Big[\sup_{a\leqslant t\leqslant T}\Big|\int_{a}^{t}g(s,x(s))\mathrm{d}w(s)\Big|^{p}\Big]$$

$$\leqslant \beta_{1}+3^{p-1}(T-a)^{\frac{p}{2}}\mathrm{E}\Big[\int_{a}^{T}|f(t,x(t),y(t))|^{2}\mathrm{d}t\Big]^{\frac{p}{2}} \quad (\text{用 Hölder 不等式})$$

$$+C_{p}3^{p-1}\mathrm{E}\Big[\int_{a}^{T}|g(t,x(t))|^{2}\mathrm{d}t\Big]^{\frac{p}{2}} \quad (\text{用}(1.3.48))$$

$$\leqslant \beta_{1}+3^{p-1}[2(T-a)]^{\frac{p}{2}}\mathrm{E}\Big[\int_{a}^{\mathrm{T}}(|f(t,0,0)|^{2}+K+K|x(t)|^{2}$$

$$+K|y(t)|^2)\mathrm{d}t\Big]^{p/2}$$

$$+C_p3^{p-1}(T-a)^{\frac{p-2}{2}}\mathrm{E}\int_0^T|g(t,x(t))|^p\mathrm{d}t \qquad \text{(用 Hölder 不等式)}$$

$$\leqslant \beta_2+3^{p-1}[2(T-a)]^{\frac{p}{2}}\cdot 2^{\frac{p}{2}-1}\mathrm{E}\Big[\int_a^T K|y(t)|^2\mathrm{d}t\Big]^{\frac{p}{2}}$$

$$=\beta_2+\alpha H,$$

其中 β_1,β_2 是与 H 无关的正常数,

$$\alpha=3^{p-1}[2K(T-a)]^{\frac{p}{2}}2^{\frac{p}{2}-1}<c_p,$$

这用到 $T-a$ 适当小. 于是 $H\leqslant\beta_2/(c_p-\alpha)<\infty$. □

注意到上述证明的一个明显缺陷:若未知 $h<\infty$,又如何能从不等式 $h-\mathrm{E}|X|^p\leqslant c_5+h/2$ 解出 $h\leqslant 2(c_t+\mathrm{E}|X|^p)$? 幸而这一缺陷还有办法消除:令 $\tau_n=T\wedge\inf\{t\in J:|x(t)|\geqslant n\}$, 然后以 $t\wedge\tau_n$ 代替 t, 然后重复以上证明,最后令 $n\to\infty$ 即得所要结果. 注意 $c_1\sim c_5,\beta_1,\beta_2$ 不依赖于 τ_n.

5.4.3 广义 Feynman-Kac 公式

如我们在本节开头所提到的,关于 BSDE 的最令人振奋的成果之一是由 Pardoux-Peng 所建立的联系 BSDE 与拟线性抛物方程的著名公式. 现在,我们就对该公式作一简要说明.

考虑以下拟线性抛物方程问题:

$$\begin{cases} u_t+Au+F(t,x,u,(\nabla u)g)=0, & (t,x)\in[0,T)\times\mathbf{R}^d, \quad (5.4.28\text{a})\\ u(T,x)=\psi(x), & x\in\mathbf{R}^d, \quad (5.4.28\text{b})\end{cases}$$

其中微分算子

$$A=\sum_i f_i(t,x)\frac{\partial}{\partial x_i}+\frac{1}{2}\sum_{i,j}a_{ij}(t,x)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j} \tag{5.4.29}$$

是一致椭圆的,即 $a(t,x)=[a_{ij}(t,x)]$ 为一致正定矩阵, $g=g(t,x)$ 记 $a(t,x)$ 的正平方根; $\nabla=\sum(\partial/\partial x_i)$, $F:J\times\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}^{1\times d}\to\mathbf{R}$, $f=(f_1,f_2,\cdots,f_d)^{\mathrm{T}}$, $w(t)$ 为 d 维标准 Brown 运动. 方程(5.4.28)联系着 SDE:

$$\begin{cases}\mathrm{d}\xi(s)=f(s,\xi(s))\mathrm{d}s+g(s,\xi(s))\mathrm{d}w(s), & t\leqslant s\leqslant T,\\ \xi(t)=x\in\mathbf{R}^d\end{cases} \tag{5.4.30}$$

与 BSDE

$$\begin{cases}\mathrm{d}X(s)=-F(s,\xi_{t,x}(s),X(s),Y(s))\mathrm{d}s+Y(s)\mathrm{d}w(s), & t\leqslant s\leqslant T,\\ X(T)=\psi(\xi_{t,x}(T)),\end{cases} \tag{5.4.31}$$

其中 $\xi_{t,x}(s)$ 记方程(5.4.30)的解. 类似地,将方程(5.4.31)的解记为 $(X_{t,x}(s), Y_{t,x}(s))$, $(t,x)\in[0,T)\times\mathbf{R}^d$ 是任意给定的. 注意在方程(5.4.30)与(5.4.31)中 s 记

时间参数,而 t 记初始时间, $x \in \mathbf{R}^d$ 是给定的常向量,对于记号的这一新安排应不致引起困难. 此外,以 t 而不是0 作为 BSDE 的初始时间,显然并无实质性影响.

定理 5.4.5(Pardoux-Peng, 1992)　设函数 a, f, g, F, ψ 足够光滑,使得方程(5.4.28),(5.4.30),(5.4.31)的解均唯一地存在,且(5.4.28)的解 $u(t,x)$ 是 $C^{1,2}$ 函数. 则成立

$$u(t,x) = \mathrm{E}X_{t,x}(t), \quad (t,x) \in J \times \mathbf{R}^d. \tag{5.4.32}$$

证　取定 $(t,x) \in [0,T) \times \mathbf{R}^d$. 由 Itô 公式有

$$\begin{aligned} \mathrm{d}u(s,\xi_{t,x}(s)) &= Lu(s,\xi_{t,x}(s))\mathrm{d}s + \nabla u(s,\xi_{t,x}(s))g(s,\xi_{t,x}(s))\mathrm{d}w(s) \\ &= -F(s,\xi_{t,x}(s),u(s,\xi_{t,x}(s)),\nabla u(s,\xi_{t,x}(s))g(s,\xi_{t,x}(s)))\mathrm{d}s \\ &\quad + \nabla u(s,\xi_{t,x}(s))g(s,\xi_{t,x}(s))\mathrm{d}w(s), \end{aligned}$$

其中用到 $\mathscr{L} = \partial/\partial t + A$ 及(5.4.28a). 以上等式与

$$u(T,\xi_{t,x}(T)) = \psi(\xi_{t,x}(T)) \qquad (\text{用}(5.4.28\mathrm{b}))$$

一起说明, $(u(s,\xi_{t,x}(s)), \nabla u(s,\xi_{t,x}(s))g(s,\xi_{t,x}(s)))$ 是 BSDE(5.4.31)的解. 由唯一性,必有

$$u(s,\xi_{t,x}(s)) = X_{t,x}(s), \quad \nabla u(s,\xi_{t,x}(s))g(s,\xi_{t,x}(s)) = Y_{t,x}(s).$$

于是

$$u(t,x) = \mathrm{E}u(t,x) = \mathrm{E}u(t,\xi_{t,x}(t)) = \mathrm{E}X_{t,x}(t). \qquad \square$$

现在将定理 5.4.5 用于方程(参照(2.1.34))

$$\begin{cases} u_t + Au + c(t,x)u = 0, & (t,x) \in [0,T) \times \mathbf{R}^d, \\ u(T,x) = \psi(x), & x \in \mathbf{R}^d. \end{cases} \tag{5.4.33}$$

这相当于在(5.4.28a)中取 $F = c(t,x)u$. 相应地,方程(5.4.31)现在成为

$$\begin{cases} \mathrm{d}X(s) = -c(s,\xi_{t,x}(s))X(s)\mathrm{d}s + Y(s)\mathrm{d}w(s), \\ X(T) = \psi(\xi_{t,x}(T)). \end{cases} \tag{5.4.34}$$

注意(5.4.34)是关于 $X(s)$ 的狭义线性 SDE,于是可用(2.2.26)求得

$$\begin{aligned} X_{t,x}(s) &= X_{t,x}(t)\exp\Big[-\int_t^s c(r,\xi_{t,x}(r))\mathrm{d}r\Big] \\ &\quad + \int_t^s \exp\Big(\int_s^r c(\sigma,\xi_{t,x}(\sigma))\mathrm{d}\sigma\Big)Y(r)\mathrm{d}w(r). \end{aligned}$$

结合公式(5.4.32)得

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \mathrm{E}\Big[\exp\Big(\int_t^T c(r,\xi_{t,x}(r))\mathrm{d}r\Big)\Big(X_{t,x}(T) - \int_t^T(\cdots)\mathrm{d}w(r)\Big)\Big] \\ &= \mathrm{E}\Big[\psi(\xi_{t,x}(T))\exp\Big(\int_t^T c(s,\xi_{t,x}(s))\mathrm{d}s\Big)\Big]. \end{aligned}$$

这与(2.1.35)(取 $\varphi(\cdot) \equiv 0$)恰好一致.

§5.5　无限时滞的 SFDE

在第 3 章中我们曾提到，$[t-\tau,t]$ 是一个时间系统在时点 t“记忆”所及的区间，其长度 τ 正好表征了“记忆力”的限度. 然而，在考察现实的发展系统时，实际确定上述的 τ 却是一个难题. 在直观上毫无疑问，一个发展过程的充分久远的历史对其当前状态仅有微弱的影响，因而可以忽略不计. 难处在于如何能恰到好处地确定那个可以开始忽略不计的点？消除这种困难的一种彻底的方法似乎是干脆将时滞 τ 增大至无穷，因而在每一点 t 以 $(-\infty,t)$ 作为其“记忆区间”. 但这样一来，就需对迄今所建立的 SFDE 理论进行全面改造，使之能应用于具**无限时滞**的系统. 在有限时滞理论的基础上，这一拓广的工作似乎有路径可循，但毕竟有不少需要设法扫除的障碍，并不能指望简单地转移关于有限时滞系统的全部结果. 本书已没有太多的篇幅来深入讨论这一宏大的课题了，本节的内容只能是初步的，但似乎也足以显示无限时滞理论的某些基本特征.

5.5.1　存在定理

在形式上，本节将要考虑的 SFDE 与(3.3.1)并无区别：

$$d[x(t)-u(x_t)]=f(t,x_t)dt+g(t,x_t)dw(t). \qquad (5.5.1)$$

实际上，区别隐含于记号 x_t，现在对其解释有所不同：

$$x_t:\mathbf{R}_-=(-\infty,0]\to\mathbf{R}^d,\quad s\to x(t+s),$$

此处 $\mathbf{R}_-$ 的作用如前两章中的区间 $[-\tau,0]$. 这一改动影响重大，首先使得作为时滞系统理论基础的函数空间 $C([-\tau,0],\mathbf{R}^d)$ 不再适用，而应代之以一个新的 Banach 空间——为简便起见，下面仍记为 C，它作为向量空间是 $C(\mathbf{R}_-,\mathbf{R}^d)$ 的一个子空间. 与相对单纯的空间 $C([-\tau,0],\mathbf{R}^d)$ 不同，现在选用的空间 C 呈现出稍复杂的面貌：C 应包括 $C(\mathbf{R}_-,\mathbf{R}^d)$ 中哪部分成员及其中范数应如何定义，都不是确定无疑的，有多种备选方案可行. 空间 C 的合理构成直接关系到能否在一组常规的条件下对方程(5.5.1)建立存在定理，因而具有基本的重要性. 不过，一旦解决了解的存在性问题，后续课题并不总直接联系于空间 C 的结构. 因此，我们不妨取一种从简的姿态：认可所需的空间 C 已合理地选定，它的构成足以适应证明存在定理之需要. 空间 C 的一个最先被考虑的简单样本是 $C^b(\mathbf{R}_-,\mathbf{R}^d)$，即 $\mathbf{R}_-$ 上的 $\mathbf{R}^d$ 值有界连续函数之空间，其中采用熟悉的上确界范数. 任给 $\varphi\in C$，下面总以 $\|\varphi\|$ 记 C 中的范数，通常并不用到 $\|\varphi\|$ 的具体表达式.

一旦给定了空间 C，方程(5.5.1)中的函数 u,f,g 的定义域即随之确定：

$$u(\varphi):C\to\mathbf{R}^d,\quad f(t,\varphi):\mathbf{R}_+\times C\to\mathbf{R}^d,\quad g(t,\varphi):\mathbf{R}_+\times C\to\mathbf{R}^{d\times m}.$$

假定它们均为 Borel 可测函数；涉及 Razumikhin 定理时，进而假定它们均为连续函数，这一点今后将不再说明.

为界定方程(5.5.1)的解，几乎只需照搬定义 3.3.1.

定义 5.5.1　设 $J=(-\infty,b)$，$0<b\leqslant\infty$．若一个 $\mathbf{R}^d$ 值随机过程 $x(t)$ $(t\in J)$ 满足以下条件：

(i) $x(t)$ 是连续适应过程，且 $\{x_t: 0\leqslant t<b\}$ 是适应的 C 值随机过程；

(ii) $\forall\beta\in(0,b)$ 有 $f(t,x_t)\in\mathscr{L}^1([0,\beta],\mathbf{R}^d)$，$g(t,x_t)\in\mathscr{L}^2([0,\beta],\mathbf{R}^{d\times m})$；

(iii) $\forall t\in[0,b)$，成立

$$\tilde{x}(t)=\tilde{x}(0)+\int_0^t f(s,x_s)\mathrm{d}s+\int_0^t g(s,x_s)\mathrm{d}w(s),$$

其中 $\tilde{x}(t)=x(t)-u(x_t)$，则称 $x(t)$ 为方程(5.5.1)在区间 J 上的解，称 $\xi\triangleq x_0$ 为其初值函数（或简称初值）．若 $x(t)$ 与方程(5.5.1)的任何同具初值 ξ 的解无差别，则称 $x(t)$ 为方程(5.5.1)在 J 上以 ξ 为初值的唯一解，将其记作 $x(t,\xi)$.

如同在第 4 章中一样，下面限于使用有界初值函数 ξ，即 ξ 是 $\mathscr{F}_0$ 可测的 C 值随机变量，且它关于 (θ,ω) 是 $\mathbf{R}_-\times\Omega$ 上的 L^∞ 函数，这样的函数之全体记作 $C^b_{\mathscr{F}_0}(\Omega,C)$．此外，上一章中常用的记号 $L^p_{\mathscr{F}_t}(\Omega,C)$ 亦在其自然的意义下继续使用.

考察定理 3.3.2 的证明看出，它实际上与 τ 无关，唯一的例外是要用到函数空间 $\mathscr{M}^2([-\tau,T],\mathbf{R}^d)$，其范数定义为

$$\|x\|_2=\left[\mathrm{E}\int_{-\tau}^T|x(t)|^2\mathrm{d}t\right]^{1/2},$$

此范数并不能（或不宜）直接过渡到取 $\tau=\infty$ 的情况．但若改用

$$\|x\|^2=\|x_0\|^2+\mathrm{E}\int_0^T|x(t)|^2\mathrm{d}t,$$

其中 $\|x_0\|$ 是空间 C 中的范数（无论其定义如何），则仍可使用 Banach 空间 $\mathscr{M}^2([-\infty,T],\mathbf{R}^d)$，这是建立存在定理所必须的．如此一来，就可将定理 3.3.2 推广到无限时滞的情况，进而又可过渡到一个对应于定理 3.3.3 的更一般的结果，其细节都不拟详述，下面只写出结论.

定理 5.5.2　设 $0<b\leqslant\infty$，函数 u,f,g 满足以下条件：

(i) 局部 Lipschitz 条件：$\forall\beta\in(0,b)$，$n\in\mathbf{N}$，存在正常数 $K_{\beta n}$，使得当 $t\in[0,\beta]$，$\varphi,\psi\in C$，$\|\varphi\|\vee\|\psi\|\leqslant n$ 时有

$$|f(t,\varphi)-f(t,\psi)|\vee|g(t,\varphi)-g(t,\psi)|\leqslant K_{\beta n}\|\varphi-\psi\|;$$

(ii) 线性增长条件：$\forall\beta\in(0,b)$，存在正常数 K_β，使得

$$|f(t,\varphi)|\vee|g(t,\varphi)|\leqslant K_\beta(1+\|\varphi\|),\quad 0\leqslant t\leqslant\beta,\varphi\in C;$$

(iii) 压缩性条件：存在常数 $\kappa\in[0,1)$，使得

$$|u(\varphi)-u(\psi)|\leqslant\kappa\|\varphi-\psi\|,\quad\varphi,\psi\in C.$$

则对任给 $\xi \in C \cap C^b_{\mathscr{F}_0}(\Omega, C)$，方程(5.5.1)存在唯一解 $x(t,\xi)(-\infty < t < b)$.

在对空间 C 的适当限定下，还可断定上述的解满足

$$\mathrm{E}\left[\sup_{s\leq t} |x(s,\xi)|^p\right] < \infty, \quad 0 \leq t < b, p > 0. \tag{5.5.2}$$

下面假定式(5.5.2)成立.

在进入下面的讨论之前，必要简单说明一下我们将面临的问题. 首先，对于无限时滞的方程(5.5.1)，主要关注的问题仍然是解的稳定性、有界性等，而这些都归于解的估计，包括矩估计与轨道估计. 这就决定了在很大程度上我们将继续沿用第 4 章中熟悉的思路与处理模式. 其次，在推广第 4 章的结果时，凡涉及 τ 的地方自然将出现障碍. 消除障碍的办法常常是对初值 ξ 施加适当的限制，尤其是限制其在 $\theta \to -\infty$ 时的行为. 直观上很明显，一个现实的发展过程 $x(t)$ 相对于 $t \to -\infty$ 的那一段只是一种"微弱的存在"，因而对 $\xi = x_0$ 加以限制是合理的.

5.5.2 矩估计

设 $x(t) = x(t,\xi)(t \in \mathbf{R})$ 是方程(5.5.1)的一个解，$p > 0$. 如同在第 4 章中一样，我们希望在一定条件下获得渐近矩估计

$$\varlimsup_{t\to\infty} \frac{\ln \mathrm{E}|x(t)|^p}{|\ln \psi(t)|} \leq -\gamma \tag{5.5.3a}$$

或

$$\varlimsup_{t\to\infty} \frac{\ln \mathrm{E}|x(t)|^p}{\ln \psi(t)} \leq \gamma, \tag{5.5.3b}$$

其中 $\gamma > 0$，$\psi(t)$ 是某个取定的参照函数. 类似于 §4.1 与 §4.2，设 $0 < \psi(t) \in C(\mathbf{R})$，$\psi(0) = 1$，$\psi_1(t) = \psi'(t)/\psi(t)(t > 0)$；当 $\psi'(t) < 0(t > 0)$ 时 $\psi(\infty) = 0$ 且 $\psi(t)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调减，当 $\psi'(t) > 0(t > 0)$ 时 $\psi(\infty) = \infty$ 且 $\psi(t)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调增；约定(参照(4.1.4)与(4.2.4))

$$\phi = \begin{cases} \sup\limits_{t>0} |\psi_1(t)| < \infty, & \psi_1(t) < 0, \quad (5.5.4\mathrm{a}) \\ \inf\limits_{t>0} \psi_1(t), & \psi_1(t) > 0. \quad (5.5.4\mathrm{b}) \end{cases}$$

此外，增设在本节中很重要的如下假定：

$$\psi(t-s) \leq \psi(t)\psi(-s), \quad t,s \geq 0. \tag{5.5.5}$$

满足以上条件的函数 $\psi(t)$ 的一些例子是：

(i) $\psi(t) = \mathrm{e}^{\pm t}$，$\phi = 1$，而式(5.5.5)成为等式；

(ii) 增函数 $\psi(t) = 1 + t(t \geq 0)$，$\psi(t) = 1(t < 0)$，$\phi = 0$；

(iii) 减函数 $\psi(t) = (1+t)^{-1}(t \geq 0)$，$\psi(t) = \mathrm{e}^{-t}(t < 0)$，$\phi = 1$.

用初等方法容易验证对后两种情况不等式(5.5.5)成立.

依然沿用(4.1.7)的记号，即

$$\begin{cases} h(t) = \psi^{-\gamma}(t)\mathrm{E}|x(t)|^p, & H(t) = \sup\limits_{s\leq t} h(s), \\ \tilde{h}(t) = \psi^{-\gamma}(t)\mathrm{E}|\tilde{x}(t)|^p, & \widetilde{H}(t) = \sup\limits_{s\leq t} \tilde{h}(s). \end{cases} \tag{5.5.6}$$

前面已提到,对于初值函数 $\xi(\theta)$ 在 $\theta\to-\infty$ 的行为加以限制是重要的. 一个自然的想法是将这种限制与函数 $\psi(t)$ 联系起来. 任给 $p>0,\gamma\geq 0$, 约定一对记号:

$$|\varphi|_{\psi,\gamma}^p = \sup_{\theta\leq 0}\psi^{-\gamma}(\theta)|\varphi(\theta)|^p, \quad \varphi\in C, \tag{5.5.7a}$$

$$\|\varphi\|_{\psi,\gamma}^p = \sup_{\theta\leq 0}\psi^{-\gamma}(\theta)\mathrm{E}|\varphi(\theta)|^p, \quad \varphi\in L_{\mathscr{F}_0}^p(\Omega C). \tag{5.5.7b}$$

$\|\varphi\|_{\psi,0}^p$ 就写作 $\|\varphi\|_0^p$, 它与前两章中的同一记号相当. 若 $\psi(t)$ 单调增(减),则 $|\varphi|_{\psi,\gamma}^p$ 与 $\|\varphi\|_{\psi,\gamma}^p$ 均对 γ 单调增(减),因而在 $\gamma=0$ 时达到最小(最大). 由式(5.5.7b)直接推出

$$\mathrm{E}|\varphi(\theta)|^p \leq \psi^{\gamma}(\theta)\|\varphi\|_{\psi,\gamma}^p, \quad \theta\leq 0.$$

利用以上设定,现在来推广在第4章中起了很大作用的不等式(4.1.13)与(4.2.11).

引理 5.5.3 设 $p\geq 1,\gamma\geq 0$; 存在常数 $\kappa\in[0,1)$, 使得(对照(4.1.8))

$$\mathrm{E}|u(\varphi)|^p \leq \kappa^p\|\varphi\|_{\psi,\gamma}^p, \quad \varphi\in L_{\mathscr{F}_0}^p(\Omega,C). \tag{5.5.8}$$

若 $x(t)=x(t,\xi)\,(t\in\mathbf{R})$ 是方程(5.5.1)的一个解, $\|\xi\|_{\psi,\gamma}^p<\infty$, 则依式(5.5.6)的记号有

$$H(t) \leq \frac{\|\xi\|_{\psi,\gamma}^p}{1-\kappa} \vee \frac{\widetilde{H}(t)}{(1-\kappa)^p}, \quad t\geq 0. \tag{5.5.9}$$

证 用(4.1.13)的证法. 不妨设 $\kappa>0$. $\forall t\geq 0$, 有

$$\begin{aligned} h(t) &\leq \psi^{-\gamma}(t)[(1-\kappa)^{1-p}\mathrm{E}|\tilde{x}(t)|+\kappa\|x_t\|_{\psi,\gamma}^p] && (\text{用}(5.5.8)) \\ &= (1-\kappa)^{1-p}\tilde{h}(t)+\kappa\sup_{\theta\leq 0}\psi^{-\gamma}(t)\psi^{-\gamma}(\theta)\mathrm{E}|x(t+\theta)|^p \\ &\leq (1-\kappa)^{1-p}\widetilde{H}(t)+\kappa H(t), && (\text{用}(5.5.5)) \end{aligned}$$

于是

$$H(t) \leq [\sup_{\theta\leq 0}h(\theta)] \vee [(1-\kappa)^{1-p}\widetilde{H}(t)+\kappa H(t)].$$

由 $\sup_{\theta\leq 0}h(\theta)=\|\xi\|_{\psi,\gamma}^p<\infty$ 推出 $H(t)<\infty$, 故可从上式解出 $H(t)$, 得所要证. □

设 $p\geq 1,\gamma\geq 0,\mu$ 是 $\mathbf{R}_-$ 上的一个概率测度,

$$|u(\varphi)| \leq \kappa\int_{-\infty}^0 \psi^{-\gamma/p}(\theta)|\varphi(\theta)|\,\mathrm{d}\mu, \quad \varphi\in C, \tag{5.5.10}$$

则由此可推出不等式(5.5.8)及与之平行的不等式

$$|u(\varphi)|^p \leq \kappa^p|\varphi|_{\psi,\gamma}^p, \quad \varphi\in C. \tag{5.5.11}$$

经常用条件(5.5.10)替代条件(5.5.8)与(5.5.11),条件(5.5.10)有特殊的便利之处.

注意式(5.5.5)~(5.5.11)在形式上与 $\psi(t)$ 的增减性无关,这对于统一处理 $\psi(t)$ 单调减与单调增这两种情况特别重要. 本节的结果特别简洁与和谐,比第 4 章中的相应内容更胜一筹,可以说函数 $\psi(t)$ 的差异已被记号 $\|\cdot\|_{\psi,\gamma}^{p}$ 吸收了.

作了以上准备之后,现在来推广 §4.1 与 §4.2 中的主要矩估计结果. 首先考虑特别令人感兴趣的 Razumikhin 定理.

定理 5.5.4 设 $p \geqslant 1$; 存在常数 $\kappa \in [0,1), c_1, c_2, \mu > 0, q \geqslant (c_2/c_1)(1-\kappa)^{-p}$, 函数 $V(t,x) \in C^{1,2}(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^d)$, $\zeta(t) \in C(\mathbf{R}_+)$, 使得 $\psi^{-\mu}(t)\zeta(t) \in L^1(\mathbf{R}_+)$, 且条件(5.5.8)(以 μ 代 γ)及以下条件满足:

$$c_1|x|^p \leqslant V(t,x) \leqslant c_2|x|^p, \quad t \in \mathbf{R},\ x \in \mathbf{R}^d, \tag{5.5.12}$$

$$\begin{cases}\varphi \in L^p_{\mathscr{F}_t}(\Omega,C),\ \psi^{-\mu}(\theta)\mathrm{E}V(t+\theta,\varphi(\theta)) \leqslant q\mathrm{E}V(t,\tilde{\varphi}(0)),\quad \forall\theta\leqslant 0,\\ \Rightarrow \mathrm{E}\,\mathscr{L}V(t,\varphi) \leqslant \zeta(t) + \mu\psi_1(t)\mathrm{E}V(t,\tilde{\varphi}(0)),\ t\geqslant 0.\end{cases} \tag{5.5.13}$$

若 $x(t) = x(t,\xi)\ (t\in\mathbf{R})$ 是方程(5.5.1)的一个解,当 $\gamma\approx\mu$ 时 $\|\xi\|^p_{\psi,\gamma} < \infty$, 则成立

$$\begin{cases}c_1\mathrm{E}|x(t)|^p \leqslant \psi^{\mu}(t)[\beta c_1\|\xi\|^p_{\psi\mu} + (1-\kappa)^{-p}\|\zeta\psi^{-\mu}\|_1],\ t\geqslant 0,\\ \beta = (c_2/c_1)(1+\kappa)^p(1-\kappa)^{-p}.\end{cases} \tag{5.5.14}$$

证 取充分接近于 μ 的 $\gamma\in(0,\mu)$(若 $\psi(t)$ 单调减),或 $\gamma>\mu$(若 $\psi(t)$ 单调增). 只要以 γ 代 μ 证式(5.5.14). 依定理 4.1.4 之证的思路,只要证

$$\begin{aligned}W(t) &\triangleq \psi^{-\gamma}(t)\mathrm{E}V(t,\tilde{x}(t)) - \int_0^t\psi^{-\gamma}(s)\zeta(s)\mathrm{d}s\\ &\leqslant \beta c_1(1-\kappa)^p\|\xi\|^p_{\psi,\gamma} = c_2(1+\kappa)^p\|\xi\|^p_{\psi,\gamma} \triangleq \beta_1,\quad t\geqslant 0.\end{aligned}$$

用条件(5.5.8)易验知 $W(0)\leqslant\beta_1$. 设存在最小的 $r\in\mathbf{R}_+$, 使得在 $[0,r]$ 上 $W(t)\leqslant\beta_1$, 则必 $W(r)=\beta_1$, 且用式(5.5.9),(5.5.12)可得(依式(5.5.6)中的记号)

$$c_1h(t) \leqslant \beta c_1\|\xi\|^p_{\psi,\gamma} + (1-\kappa)^{-p}\int_0^t\psi^{-\gamma}(s)\zeta(s)\mathrm{d}s,\quad 0\leqslant t\leqslant r.$$

若 $0\leqslant t\leqslant r$, 则

$$\begin{aligned}&\psi^{-\mu}(t-r)\mathrm{E}V(t,x(t))\\ &\leqslant c_2\psi^{\gamma}(t)\psi^{-\gamma}(t-r)h(t)\\ &\leqslant (c_2/c_1)\psi^{\gamma}(t)\psi^{-\gamma}(t-r)\Big[\beta c_1\|\xi\|^p_{\psi,\gamma} + (1-\kappa)^{-p}\int_0^t\psi^{-\gamma}(s)\zeta(s)\mathrm{d}s\Big]\\ &\leqslant q\psi^{\gamma}(t)\psi^{-\gamma}(t-r)\Big[W(r) + \int_0^{\gamma}\psi^{-\gamma}(s)\zeta(s)\mathrm{d}s\Big]\\ &= q\psi^{\gamma}(t)\psi^{-\gamma}(t-r)\psi^{-\gamma}(r)\mathrm{E}V(r,\tilde{x}(r))\\ &\leqslant q\mathrm{E}V(r,\tilde{x}(r));\qquad\qquad (\text{用}(5.5.5))\end{aligned}$$

若 $t<0$, 则

$$\begin{aligned}\psi^{-\mu}(t-r)\mathrm{E}V(t,x(t)) &\leqslant c_2\psi^{-\gamma}(t-r)\psi^{\gamma}(t)\|\xi\|_{\psi,\gamma}^{p}\\ &\leqslant \psi^{\gamma}(t)\psi^{-\gamma}(t-r)W(r)\\ &\leqslant \psi^{\gamma}(t)\psi^{-\gamma}(t-r)\psi^{-\gamma}(r)\mathrm{E}V(r,\tilde{x}(r))\\ &\leqslant q\mathrm{E}V(r,\tilde{x}(r)).\end{aligned}$$

于是可对 $\varphi = x_r$ 应用条件(5.5.13)，从而如同定理 4.1.4 之证一样完成证明. □

有趣的是，以上定理的表述与证明都几乎不直接关联 $\psi(t)$ 的增减性！

若取 $V=|x|^p$，则条件(5.5.13)简化为

$$\|\varphi\|_{\psi,\mu}^{p} \leqslant q\mathrm{E}|\tilde{\varphi}(0)|^{p} \Rightarrow \mathrm{E}\mathscr{L}V(t,\varphi) \leqslant \zeta(t)+\mu\psi_1(t)\mathrm{E}|\tilde{\varphi}(0)|^{p}.$$

鉴于此，易从定理 5.5.4 推出(对照定理 4.1.6)：

推论 5.5.5　设 $p\geqslant 1$；存在 $\kappa\in[0,1/2)$，$\lambda_0,\lambda_1\geqslant 0$ 与 $\zeta(t)\in C(\mathbf{R}_+)$，使得 $\psi^{-\alpha}(t)\zeta(t)\in L^1(\mathbf{R}_+)$，$\alpha=(1-\kappa)^{-p}|\lambda_1-\lambda_0(1-2\kappa)^{-p}|$，且条件(5.5.8)(以 α 代 γ) 及以下条件满足：

$$\begin{cases}\lambda_1<\lambda_0(1-2\kappa)^{p}, & \text{若 } \psi(t) \text{ 单调减}, \quad (5.5.15\text{a})\\ \lambda_1>\lambda_0(1-2\kappa)^{p}, & \text{若 } \psi(t) \text{ 单调增}, \quad (5.5.15\text{b})\end{cases}$$

$$\mathrm{E}\mathscr{L}V(t,\varphi)\leqslant\zeta(t)+|\psi_1(t)|\left[-\lambda_0\mathrm{E}|\varphi(0)|^{p}+\lambda_1\|\varphi\|_{\psi,\alpha}^{p}\right], \tag{5.5.16}$$

其中 $V=|x|^p$，$t\geqslant 0$，$\varphi\in L^p_{\mathscr{F}_t}(\Omega,C)$. 若 $x(t)=x(t,\xi)(t\in\mathbf{R})$ 是方程(5.5.1)的一个解，当 $\gamma\approx\alpha$ 时 $\|\xi\|_{\psi,\gamma}^{p}<\infty$，则存在 $\gamma\in(0,\alpha]$，使得式(5.5.3a)成立(若 $\psi(t)$ 单调减)，或存在 $\gamma\geqslant\alpha$，使得式(5.5.3b)成立(若 $\psi(t)$ 单调增).

为用定理 5.5.4 推出以上结果，类似于定理 4.1.6 之证，只要注意以下事实：若 $t\geqslant 0$，$\varphi\in L^p_{\mathscr{F}_0}(\Omega,C)$，$h=\mathrm{E}|\tilde{\varphi}(0)|^{p}$，$\|\varphi\|_{\psi,\gamma}^{p}\leqslant qh$，则

$$\mathrm{E}|\varphi(0)|^{p}\geqslant h(1-\kappa q^{1/p})^{p},$$

$$\lambda_0\mathrm{E}|\varphi(0)|^{p}-\lambda_1\|\varphi\|_{\psi,\gamma}^{p}\geqslant h[\lambda_0(1-\kappa q^{1/p})^{p}-q\lambda_1]=-h\mu(q)(\operatorname{sgn}\psi'),$$

$$\alpha=\mu(q_0)=q_0|\lambda_0(1-2\kappa)^{p}-\lambda_1|>0,\quad q_0=(1-\kappa)^{-p}.$$

看一个解释性例子.

例 5.5.6　考虑一维线性方程

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}\left[x(t)-\kappa\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{2\theta}x(t+\theta)\mathrm{d}\theta\right]\\ &=-ax(t)\mathrm{d}t+\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{2\theta}x(t+\theta)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}w(t),\end{aligned} \tag{5.5.17}$$

其中 $\kappa\in[0,1/3)$，$a>0$. 取 $\psi(t)=\mathrm{e}^{-t}$，$V=x^2$，$\mathrm{d}\mu=\mathrm{e}^{\theta}\mathrm{d}\theta$，则

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\mathscr{L}V(t,\varphi)&\leqslant\mathrm{E}\left\{-2a\varphi(0)\left[\varphi(0)-\kappa\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{\theta}\varphi(\theta)\mathrm{d}\mu\right]+\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{2\theta}\varphi^2(\theta)\mathrm{d}\mu\right\}\\ &\leqslant -a(2-\varepsilon\kappa)\mathrm{E}\varphi^2(0)+(\varepsilon^{-1}a\kappa+1)\|\varphi\|_{\psi,2}^{2}\qquad(\varepsilon>0)\\ &\triangleq -\lambda_0\mathrm{E}\varphi^2(0)+\lambda_1\|\varphi\|_{\psi,2}^{2};\end{aligned}$$

$$h \triangleq \lambda_0(1-2\kappa)^2 - \lambda_1 = a(2-\varepsilon\kappa)(1-2\kappa)^2 - \varepsilon^{-1}a\kappa - 1.$$

由 $\partial h/\partial\varepsilon = 0$ 解出 $\varepsilon = (1-2\kappa)^{-1}$，故得

$$h = 2a(1-2\kappa)(1-3\kappa) - 1.$$

由 $0 < \alpha = h(1-\kappa)^{-2} \leqslant 2$ 解出

$$\frac{1}{2(1-2\kappa)(1-3\kappa)} < a \leqslant \frac{2(1-\kappa)^2+1}{2(1-2\kappa)(1-3\kappa)}.$$

当此条件满足时，存在 $\gamma \in (0,\alpha]$，对于满足 $\|\xi\|^2_{\psi,\gamma} < \infty$ 的 $\xi \in C$，方程(5.5.17)的解 $x(t) = x(t,\xi)$ 满足

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\, t^{-1}\ln \mathrm{E}\,|\,x(t)\,|^2 \leqslant -\gamma.$$

现在转向建立对应于定理4.2.11 的结果. 仿照(4.1.24)，引入记号：

$$\rho_j = \sup_{t\geqslant 0}\psi(t-\tau_j)/\psi(t), \quad 1 \leqslant j \leqslant J. \tag{5.5.18}$$

定理 5.5.7 设 $p \geqslant 1$；存在常数 $\kappa \in [0,1)$，$c_1, c_2, \gamma, \tau_j > 0$，$a \in \mathbf{R}$，$a_j, b \geqslant 0$，$\mathbf{R}_-$ 上的概率测度 λ,μ,ν，函数 $V(t,x) \in C^{1,2}(\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^d)$，$q_0(t,x)$，$q_j(t,x)$，$q(t,x) \in C(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^d,\mathbf{R}_+)$ 及函数 $\zeta(t)$，使得 $\psi^{-\gamma}(t)\zeta(t) \in L^1(\mathbf{R}_+)$，且条件(5.5.10)，(5.5.12)及以下条件满足：

$$\begin{aligned}\mathscr{L}V(t,\varphi) \leqslant & -a\,|\,\varphi(0)\,|^p + \sum_j a_j\,|\,\varphi(-\tau_j)\,|^p + b\int_{-\infty}^0 \psi^{-\gamma}(\theta)\,|\,\varphi(\theta)\,|^p \mathrm{d}\nu \\ & + \zeta(t) - q_0(t,\varphi(0)) + \sum_j q_j(t-\tau_j,\varphi(-\tau_j)) \\ & + \int_{-\infty}^0 \psi^{-\gamma}(\theta)q(t+\theta,\varphi(\theta))\mathrm{d}\lambda(\theta), \quad t \geqslant 0, \varphi \in C,\end{aligned} \tag{5.5.19}$$

$$q_0(t,x) \geqslant \sum_j \rho_j^\gamma q_j(t,x) + q(t,x), \quad t \geqslant 0, x \in \mathbf{R}^d, \tag{5.5.20}$$

其中 ρ_j 依式(5.5.18). 设 $x(t) = x(t,\xi)$ $(t \in \mathbf{R})$ 是方程(5.5.1)的一个解，$\|\xi\|^p_{\psi,\gamma} < \infty$，

$$\int_{-\infty}^0 \psi^{-\gamma}(\theta)\mathrm{E}\,|\,\xi(\theta)\,|^p\mathrm{d}\theta \vee \int_{-\infty}^0 \psi^{-\gamma}(\theta)\mathrm{E}q(\theta,\xi(\theta))\mathrm{d}\theta < \infty. \tag{5.5.21}$$

若 $\psi(t)$ 单调减，且

$$b + c_2\gamma\phi(1+\kappa)^p + \sum_j a_j\rho_j^\gamma \leqslant a, \tag{5.5.22a}$$

其中 ϕ 依式(5.5.4a)，则式(5.5.3a)成立；若 $\psi(t)$ 单调增，且

$$b - c_1\gamma\phi(1-\kappa)^p + \sum_j a_j\rho_j^\gamma \leqslant a, \tag{5.5.22b}$$

其中 ϕ 依式(5.5.4b)，则式(5.5.3b)成立.

证 不妨只考虑 $\psi(t)$ 单调减的情况. 只要证 $h(t)$（记号依(5.5.6)）有界；因可用式(5.5.9)，又只需证 $\tilde{h}(t)$ 有界. 如通常一样有 $c_1\tilde{h}(t) \leqslant \mathrm{const} + I_1 + I_2$，其中

$$I_1 = \mathrm{E}\int_0^t V(t,\tilde{x}(s))\mathrm{d}\psi^{-\gamma}(s) \leqslant c_2\gamma\phi\int_0^t \tilde{h}(s)\mathrm{d}s$$

$$\leqslant c_2\gamma\phi(1+\kappa)^{p-1}\int_0^t\Big[h(s)+\kappa\int_{-\infty}^0 h(s+\theta)\mathrm{d}\mu(\theta)\Big]\mathrm{d}s \qquad (\text{用}(5.5.5),(5.5.10))$$

$$\leqslant \text{const}+c_2\gamma\phi(1+\kappa)^p\int_0^t h(s)\mathrm{d}s, \qquad (\text{用}(5.5.21))$$

$$I_2=\mathrm{E}\int_0^t\psi^{-\gamma}(s)LV(s,\tilde{x}(s))\mathrm{d}s$$

$$\leqslant \mathrm{E}\int_0^t\psi^{-\gamma}(s)\Big[-a\,|\,x(s)\,|^p+\sum_j a_j\,|\,x(s-\tau_j)\,|^p$$

$$+b\int_{-\infty}^0\psi^{-\gamma}(\theta)\,|\,x(s+\theta)\,|^p\mathrm{d}\nu(\theta)$$

$$+\zeta(s)-q_0(s,x(s))+\sum_j q_j(s-\tau_j,x(s-\tau_j))$$

$$+\int_{-\infty}^0\psi^{-\gamma}(\theta)q(s+\theta,x(s+\theta))\mathrm{d}\lambda(\theta)\Big]\mathrm{d}s$$

$$\leqslant \text{const}+\Big(-a+\sum_j a_j\rho_j^\gamma+b\Big)\int_0^t h(s)\mathrm{d}s,$$

其中用了式(5.5.5),(5.5.18)~(5.5.21).综上并用条件(5.5.22a),即得 $\tilde{h}(t)\leqslant \text{const}$, 如所要证. □

在无限时滞的框架下,同样可考虑 SDDE 问题.只是由于方法上的考虑,下面讨论的方程与(4.1.44)稍有区别:

$$\mathrm{d}[x(t)-U(y(t))]=F(t,x(t),\bar{y}(t))\mathrm{d}t+G(t,x(t),\bar{y}(t))\mathrm{d}w(t), \qquad (5.5.23)$$

其中函数 U,F,G 与(4.1.44) 并无不同,但 $y(t)=x(t-\delta(t)),\bar{y}(t)=x(t-\bar{\delta}(t)),\delta(t)\in C^1(\mathbf{R}_+,[0,\tau]),\tau\in\mathbf{R}_+,\bar{\delta}(t)\in C^1(\mathbf{R}_+,\mathbf{R}_+)$. 此处限定 $\delta(t)$ 有界而与无界的 $\bar{\delta}(t)$(若 $\bar{\delta}(t)$ 也有界,就可用 §4.1 中的方法处理,不必在这里考虑了)相区别,是一关键的技术性设定,其好处将很快显现.类似于 §4.1 中的做法,约定

$$\begin{cases}\eta=\inf\limits_{t\geqslant 0}[1-\delta'(t)]>0, \quad \bar{\eta}=\inf\limits_{t\geqslant 0}[1-\bar{\delta}'(t)]>0,\\ \rho=\sup\limits_{t\geqslant 0}\psi(t-\tau)/\psi(\tau).\end{cases} \qquad (5.5.24)$$

一个关键事实是:若有 $\kappa\in[0,1)$ 使得

$$|\,U(y)\,|\leqslant\kappa\,|\,y\,|,\quad y\in\mathbf{R}^d, \qquad (5.5.25)$$

$x(t)=x(t,\xi)(t\in\mathbf{R})$ 是方程(5.5.23)的解,$\gamma>0$,则依(4.1.13)与(4.2.11)有

$$H(t)\leqslant\begin{cases}\dfrac{\|\xi\|_0^p}{1-\kappa_1}\vee\dfrac{\widetilde{H}(t)}{(1-\kappa_1)^p}, & \text{若 }\psi(t)\text{ 单调减}, \quad (5.5.26\text{a})\\[2ex] \dfrac{\|\xi\|_0^p}{\psi^\gamma(-\tau)(1-\kappa)}\vee\dfrac{\widetilde{H}(t)}{(1-\kappa)^p}, & \text{若 }\psi(t)\text{ 单调增}, \quad (5.5.26\text{b})\end{cases}$$

在式(5.5.26a)中 $\kappa_1=\kappa\rho^{\gamma/p}$,假定 $\kappa_1<1$. 若 $\varphi\in L^p_{\mathcal{F}_0}(\Omega,C)$,则易从条件(5.5.25)推出

$$\mathrm{E}|U(\varphi(-\delta(t)))|^{p}\leqslant\begin{cases}\kappa_1^{p}\|\varphi\|_{\psi,\gamma}^{p}, & \text{若}\ \psi(t)\ \text{单调减},\\ \kappa^{p}\|\varphi\|_{\psi,\gamma}^{p}, & \text{若}\ \psi(t)\ \text{单调增},\end{cases}$$

其中 $\kappa_1=\kappa\rho^{\gamma/p}$. 这表明条件(5.5.25)蕴涵了条件(5.5.8),只是在 $\psi(t)$ 单调减时应以 κ_1 取代 κ. 注意及此,易知不等式(5.5.26a)与(5.5.26b)实际上已统一于不等式(5.5.9)中了.

下面总假设函数 U,F,G 已满足适当条件,使对任给 $\xi\in C\cap C^{b}_{\mathscr{F}_0}(\Omega,C)$, 方程(5.5.23)存在唯一解 $x(t,\xi)$ $(t\in\mathbf{R})$. 对任给 $V(t,x)\in C^{1,2}(\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^d)$, 约定

$$\mathscr{L}V(t,x,y,\bar{y})=V_t(t,z)+V_x(t,z)F(t,x,\bar{y})$$
$$+(1/2)\mathrm{tr}[G^{\mathrm{T}}(t,x,\bar{y})V_{xx}(t,z)G(t,x,\bar{y})],$$

其中 $t\geqslant0,x,y,\bar{y}\in\mathbf{R}^d,z=x-U(y)$.

基于以上所述,易从推论 5.5.5 得到

定理 5.5.8 设 $p\geqslant1$; 存在常数 $\kappa\in[0,1/2),\lambda_0,\lambda,\bar{\lambda}\geqslant0,\alpha>0$ 及函数 $\zeta(t)\in C(\mathbf{R}_+)$,使得 $\psi^{-\alpha}(t)\zeta(t)\in L^1(\mathbf{R}_+),\alpha=(1-k)^{-p}|\lambda+\bar{\lambda}-\lambda_0(1-2k)^{p}|$, $k=\kappa\rho^{\alpha/p}$(若 $\psi(t)$ 单调减)或 $k=\kappa$(若 $\psi(t)$ 单调增), 且条件(5.5.25)及以下条件满足:

$$\begin{cases}\lambda+\bar{\lambda}<\lambda_0(1-2\kappa\rho^{\alpha/p})^{p},\kappa\rho^{\alpha/p}<1/2, & \text{若}\ \psi(t)\ \text{单调减}, & (5.5.27\mathrm{a})\\ \lambda+\bar{\lambda}>\lambda_0(1-2\kappa)^{p}, & \text{若}\ \psi(t)\ \text{单调增}, & (5.5.27\mathrm{b})\end{cases}$$

$$\mathscr{L}V(t,x,y,\bar{y})\leqslant\zeta(t)+|\psi_1(t)|\Big[-\lambda_0|x|^{p}+\lambda\psi^{-\alpha}(-\delta(t))|y|^{p}$$
$$+\bar{\lambda}\psi^{-\alpha}(-\bar{\delta}(t))|\bar{y}|^{p}\Big],\qquad(5.5.28)$$

其中 $V=|x|^{p},t\geqslant0,x,y,\bar{y}\in\mathbf{R}^d$. 设 $x(t)=x(t,\xi)$ $(t\in\mathbf{R})$ 是方程(5.5.23)的一个解,当 $\gamma\approx\alpha$ 时 $\|\xi\|_{\psi,\gamma}^{p}<\infty$, 则对于 $x(t)$ 推论 5.5.5 的结论成立.

为能从推论 5.5.5 推出上述结论,只需令 $\lambda_1=\lambda+\bar{\lambda}$ 验证条件(5.5.16):

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\mathscr{L}V(t,\varphi)&=\mathrm{E}\mathscr{L}V(t,\varphi(0),\varphi(-\delta(t)),\varphi(-\bar{\delta}(t)))\\&\leqslant\zeta(t)+|\psi_1(t)|[-\lambda_0\mathrm{E}|\varphi(0)|^{p}+\lambda\psi^{-\alpha}(-\delta(t))\mathrm{E}|\varphi(-\delta(t))|^{p}\\&\quad+\bar{\lambda}\psi^{-\alpha}(-\bar{\delta}(t))\mathrm{E}|\varphi(-\bar{\delta}(t))|^{p}]\\&\leqslant\zeta(t)+|\psi_1(t)|[-\lambda_0\mathrm{E}|\varphi(0)|^{p}+\lambda_1\|\varphi\|_{\psi,\alpha}^{p}].\end{aligned}$$

下面是一个对应于定理 4.1.22 与定理 4.2.24 的结果.

定理 5.5.9 设 $p\geqslant1$;存在常数 $\kappa\in[0,1),\lambda,\mu,\bar{\mu}\geqslant0,\alpha>0$ 及函数 $\zeta(t)$,使得 $\psi^{-\alpha}(t)\zeta(t)\in L^1(\mathbf{R}_+)$, 且条件(5.5.25)及以下条件满足:

$$\mathscr{L}V(t,x,y,\bar{y})\leqslant\zeta(t)-\lambda|x|^2+\mu|y|^{p}+\bar{\mu}\psi^{-\alpha}(-\bar{\delta}(t))|\bar{y}|^{p},\qquad(5.5.29)$$

其中 $V=|x|^p, t\geqslant 0, x, y, \bar{y}\in\mathbf{R}^d$. $x(t)=x(t,\xi)$ ($t\in\mathbf{R}$) 是方程(5.5.23)的一个解.

(i) 若 $\psi(t)$ 单调减, $\eta^{-1}\mu+\bar{\eta}^{-1}\bar{\mu}<\lambda, \gamma=\alpha\wedge\varepsilon\wedge(\ln\kappa^{-p}/\ln\rho)$, ε 是以下方程的唯一正解:

$$\varepsilon\phi\eta^{-1}(\eta^{1/p}+\kappa\rho^{\varepsilon/p})^p+\eta^{-1}\mu\rho^{\varepsilon}+\bar{\eta}^{-1}\bar{\mu}=\lambda, \tag{5.5.30a}$$

其中 ϕ 依式(5.5.4a), $\eta,\bar{\eta},\rho$ 依式(5.5.24), $\int_{-\infty}^{0}\psi^{-\gamma}(\theta)\mathrm{E}|\xi(\theta)|^p\mathrm{d}\theta<\infty$, 则式(5.5.3a)成立.

(ii) 若 $\psi(t)$ 单调增, $\gamma\geqslant\alpha$ 使得

$$\eta^{-1}\mu+\bar{\eta}^{-1}\bar{\mu}\leqslant\lambda+\gamma\phi(1-\eta^{-1}\kappa)(1-\kappa)^{p-1}, \tag{5.5.30b}$$

其中 ϕ 依式(5.5.4b), $\eta,\bar{\eta}$ 依式(5.5.24), $\int_{-\infty}^{0}\psi^{-\gamma}(\theta)\mathrm{E}|\xi(\theta)|^p\mathrm{d}\theta<\infty$, 则式(5.5.3b)成立.

证　不妨只证(i),沿用定理 4.1.22 的证法. 可设

$$0<\gamma<\alpha\wedge\varepsilon\wedge(\ln\kappa^{-p}/\ln\rho),$$

因而可用式(5.5.26a),故只需证 $\tilde{h}(t)$ (记号依式(5.5.6))有界. 如通常一样, $\tilde{h}(t)\leqslant\text{const}+I_1+I_2$, 其中

$$\begin{aligned}I_1&=\mathrm{E}\int_0^t|\tilde{x}(s)|^p\mathrm{d}\psi^{-\gamma}(s)\leqslant\gamma\phi\int_0^t\tilde{h}(s)\mathrm{d}s\\&\leqslant\text{const}+\gamma\phi\eta^{-1}(\eta^{1/p}+\kappa\rho^{\gamma/p})^p\int_0^t h(s)\mathrm{d}s\end{aligned}$$

的证明与定理 4.1.22 之证并无区别,只是 I_2 的估计稍有不同:

$$\begin{aligned}I_2&=\mathrm{E}\int_0^t\psi^{-\gamma}(s)L|\tilde{x}(s)|^p\mathrm{d}s\\&\leqslant\mathrm{E}\int_0^t\psi^{-\gamma}(s)[\zeta(s)-\lambda|x(s)|^p+\mu|y(s)|^p+\bar{\mu}\psi^{-\gamma}(-\bar{\delta}(s))|\bar{y}(s)|^p]\mathrm{d}s\\&\leqslant\text{const}+(-\lambda+\eta^{-1}\mu\rho^{\gamma}+\bar{\eta}^{-1}\bar{\mu})\int_0^t h(s)\mathrm{d}s,\end{aligned}$$

最后一步用到式(5.5.5),(5.5.24)及 $\int_{-\infty}^{0}h(\theta)\mathrm{d}\theta<\infty$. 综上并用式(5.5.30a), 即得 $\tilde{h}(t)\leqslant\text{const}$, 如所要证. □

5.5.3　轨道估计

如已多次提到的,对于随机微分方程解的轨道估计通常可用三种方法,即将矩估计转化为轨道估计、应用半鞅收敛定理及基于指数鞅不等式的轨道估计. 以上三者均可用于无限时滞的 SFDE,只是对所涉及的条件要作某种修正,主要是对初值函数作更严格的限定,如同对于矩估计问题所看到的一样. 下面依次考虑几个典型

结果,以展示方法的主要特点.

首先建立定理 4.1.14 与定理 4.2.15 的某种类似.

定理 5.5.10 设方程(5.5.1)的一个解 $x(t) = x(t,\xi)(t \in \mathbf{R})$ 满足条件:

$$\mathrm{E}|x(t)|^p \leqslant \beta\psi^\mu(t), \quad t \geqslant 0, \tag{5.5.31}$$

其中 $p \geqslant 2, \beta, \mu > 0$ 与 t 无关. 假定存在常数 $\kappa \in [0,1), K > 0$, 使得以下条件满足(记号依(5.5.7)):

$$|u(\varphi)|^p \leqslant \kappa^p |\varphi|^p_{\psi,\mu}, \quad \varphi \in C, \tag{5.5.32}$$

$$\mathrm{E}|f(t,x_t)|^p \vee \mathrm{E}|g(t,x_t)|^p \leqslant K\|x_t\|^p_{\psi,\mu}, \quad t \geqslant 0. \tag{5.5.33}$$

(i) 若 $\psi(t)$ 单调减,存在 $\gamma \in (0,\mu)$,使得 $|\xi|^p_{\psi,\gamma} < \infty$, a. s. ,且

$$\sum_n \psi^{\mu-\gamma}(n) < \infty, \tag{5.5.34}$$

则

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\ln|x(t)|^p}{|\ln\psi(t)|} \leqslant -\gamma, \text{a. s.}. \tag{5.5.35a}$$

(ii) 若 $\psi(t)$ 单调增,存在 $\gamma > \mu$,使得 $|\xi|^p_{\psi,\gamma} < \infty$, a. s. 且条件(5.5.34)满足,则

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{\ln|x(t)|^p}{\ln\psi(t)} \leqslant \gamma, \text{a. s.}. \tag{5.5.35b}$$

证 不妨只证前一半,大体上沿用定理 4.1.14 的证法. 只需证函数 $h(t) \triangleq \psi^{-\gamma}(t)|x(t)|^p$a. s. 轨道有界. 对照式(5.5.6),记号 $\tilde{h}(t), H(t)$ 与 $\widetilde{H}(t)$ 的意义自明. 完全类似于不等式(5.5.9),利用条件(5.5.32)容易建立不等式:

$$H(t) \leqslant \frac{|\xi|^p_{\psi,\gamma}}{1-\kappa} \vee \frac{\widetilde{H}(t)}{(1-\kappa)^p}, \quad t \geqslant 0.$$

由此可见只要证 $\tilde{h}(t)$ a. s. 轨道有界. 若已知

$$I_n \triangleq \mathrm{E}\Big[\sup_{n-1\leqslant t\leqslant n} |\tilde{x}(t)|^p\Big] \leqslant \text{const}\ \psi^\mu(n), \quad n \in \mathbf{N}.$$

则

$$P\Big(\sup_{n-1\leqslant t\leqslant n} |\tilde{x}(t)|^p \geqslant \psi^\gamma(n)\Big) \leqslant I_n\psi^{-\gamma}(n) \leqslant \text{const}\ \psi^{\mu-\gamma}(n).$$

由条件(5.5.34),可用 Borel-Cantelli 引理得出:a. s. 地,当 n 充分大且 $n-1 \leqslant t \leqslant n$ 时

$$|\tilde{x}(t)|^p < \psi^\gamma(n) \leqslant \psi^\gamma(t),$$

这正表明 $\tilde{h}(t)$ a. s. 轨道有界. 因此问题归于证 $I_n \leqslant \text{const}\ \psi^\mu(n)$.

取定 $n \in \mathbf{N}$ 今估计 I_n. 类似于定理 3.3.8 之证有 $I_n \leqslant A_n + B_n + C_n$, 其中

$$A_n = \text{const}\mathrm{E}|\tilde{x}(n-1)|^p \leqslant \text{const}[\mathrm{E}|x(n-1)|^p + \mathrm{E}|u(x_{n-1})|^p]$$
$$\leqslant \text{const}[\psi^\mu(n-1) + \sup_{t\leqslant n-1}\psi^{-\mu}(t-n+1)\mathrm{E}|x(t)|^p] \quad (\text{用}(5.5.31),(5.5.32))$$

$$\leqslant \text{const}[\psi^{\mu}(n)+\sup_{t\leqslant n-1}\psi^{-\mu}(t-n+1)\psi^{\mu}(t)]$$

$$\leqslant \text{const}[\psi^{\mu}(n)+\psi^{\mu}(n-1)]\leqslant \text{const}\ \psi^{\mu}(n), \qquad (\text{用}(5.5.5))$$

$$B_n=\text{const}\int_{n-1}^{n}\mathrm{E}\,|f(t,x_t)|^p\mathrm{d}t$$

$$\leqslant \text{const}\int_{n-1}^{n}\sup_{s\leqslant t}\psi^{-\mu}(s-t)\mathrm{E}\,|x(s)|^p\mathrm{d}t \qquad (\text{用}(5.5.33))$$

$$\leqslant \text{const}\int_{n-1}^{n}\sup_{s\leqslant t}\psi^{-\mu}(s-t)\psi^{\mu}(s)\mathrm{d}t$$

$$\leqslant \text{const}\ \psi^{\mu}(n),$$

$$C_n=\text{const}\ \mathrm{E}\Big[\sup_{s\leqslant t}\Big|\int_{n-1}^{t}g(s,x_s)\mathrm{d}w(s)\Big|^p\Big]$$

$$\leqslant \text{const}\int_{n-1}^{n}\mathrm{E}\,|g(t,x_t)|^p\mathrm{d}t\leqslant \text{const}\ \psi^{\mu}(n). \qquad (\text{用}(1.3.46))$$

以上估计中反复用到如下事实:若 $0<\tau\leqslant t$, 则

$$\ln\frac{\psi(t-\tau)}{\psi(t)}=\int_{t-\tau}^{t}|\psi_1(s)|\,\mathrm{d}s\leqslant\tau\phi, \qquad (\text{用}(5.5.4\text{a}))$$

因而 $\psi(t-\tau)\leqslant\psi(t)\mathrm{e}^{\tau\phi}$, 特别有 $\psi^{\mu}(n-1)\leqslant\psi^{\mu}(n)\mathrm{e}^{\mu\phi}$. 综上得到 $I_n\leqslant$ $\text{const}\psi^{\mu}(n)$,如所要证. □

下面转向运用半鞅收敛定理. 如同(4.1.34),引进记号

$$\begin{cases}h(t)=\psi^{-\gamma}(t)\,|x(t)|^2, & H(t)=\sup\limits_{s\leqslant t}h(s),\\ \tilde{h}(t)=\psi^{-\gamma}(t)\,|\tilde{x}(t)|^2, & \tilde{H}(t)=\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant t}\tilde{h}(s),\end{cases} \qquad (5.5.36)$$

其中 $\gamma>0,x(t)=x(t,\xi)(t\in\mathbf{R})$ 是方程(5.5.1)的某个解. 若 $|\xi|_{\psi,\gamma}^2<\infty$ a.s.,且存在 $\kappa\in[0,1)$,使得以下条件之一满足:

$$|u(\varphi)|^2\leqslant\kappa^2|\varphi|_{\psi,\gamma}^2, \qquad (5.5.37\text{a})$$

$$|u(\varphi)|\leqslant\kappa\int_{-\infty}^{0}\psi^{-\gamma/2}(\theta)\,|\varphi(\theta)|\,\mathrm{d}\mu, \qquad (5.5.37\text{b})$$

其中 $\varphi\in C,\mu$ 是 $\mathbf{R}_-$ 上的某个概率测度,则类似于引理 5.5.3 可证明

$$H(t)\leqslant\frac{|\xi|_{\psi,\gamma}^2}{1-\kappa}\vee\frac{\tilde{H}(t)}{(1-\kappa)^2},\quad t\geqslant0. \qquad (5.5.38)$$

作了上述准备之后,现在来建立对应于定理 5.5.7 的以下结果.

定理 5.5.11　设存在常数 $\kappa\in[0,1),c_1,c_2,\gamma,\tau_j>0,a\in\mathbf{R},a_j,b\geqslant0,\mathbf{R}_-$ 上的概率测度 λ,μ,ν, 函数 $V(t,x)\in C^{1,2}(\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^d),q_0(t,x),q_j(t,x),q(t,x)\in C(\mathbf{R}\times\mathbf{R}^d,\mathbf{R}_+)$ 及函数 $\zeta(t)$,使得 $\psi^{-\gamma}(t)\zeta(t)\in L^1(\mathbf{R}_+)$, 且条件(5.5.20),(5.5.37b)及以下条件满足:

$$c_1|x|^2\leqslant V(t,x)\leqslant c_2|x|^2,\quad t\geqslant0,x\in\mathbf{R}^d, \qquad (5.5.39)$$

$$\mathscr{L}V(t,\varphi) \leqslant -a|\varphi(0)|^2 + \sum_j a_j|\varphi(-\tau_j)|^2 + b\int_{-\infty}^0 \psi^{-\gamma}(\theta)|\varphi(\theta)|^2 \mathrm{d}\nu$$
$$+\zeta(t) - q_0(t,\varphi(0)) + \sum_j q_j(t-\tau_j,\varphi(-\tau_j))$$
$$+\int_{-\infty}^0 \psi^{-\gamma}(\theta)q(t+\theta,\varphi(\theta))\mathrm{d}\lambda(\theta),\quad t\geqslant 0,\varphi\in C. \tag{5.5.40}$$

设 $x(t)=x(t,\xi)(t\in\mathbf{R})$ 是方程(5.5.1)的一个解，$|\xi|^2_{\psi,\gamma}<\infty$，a.s. 且

$$\int_{-\infty}^0 \psi^{-\gamma}(\theta)\mathrm{E}|\xi(\theta)|^2\mathrm{d}\theta \vee \int_{-\infty}^0 \psi^{-\gamma}(\theta)\mathrm{E}q(0,\xi(\theta))\mathrm{d}\theta<\infty. \tag{5.5.41}$$

若 $\psi(t)$ 单调减，且

$$b+c_2\gamma\phi(1+\kappa)^2+\sum_j a_j\rho_j^\gamma\leqslant a, \tag{5.5.42a}$$

其中 ϕ 依式(5.5.4a)，ρ_j 依式(5.5.18)，则成立

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\ln|x(t)|^2}{|\ln\psi(t)|}\leqslant -\gamma,\text{a.s.}. \tag{5.5.43a}$$

若 $\psi(t)$ 单调增，且

$$b-c_1\gamma\phi(1-\kappa)^2+\sum_j a_j\rho_j^\gamma\leqslant a, \tag{5.5.42b}$$

其中 ϕ 与 ρ_j 分别依式(5.5.4b)与(5.5.18)，则成立

$$\overline{\lim_{t\to\infty}}\frac{\ln|x(t)|^2}{\ln\psi(t)}\leqslant \gamma,\text{a.s.}. \tag{5.5.43b}$$

证　证明路线与定理 5.5.7 之证大体平行，只需写出一个梗概，且不妨只证(5.5.43a). 只需证 $\tilde{h}(t)$（记号依式(5.5.36)）a.s. 轨道有界. $\forall t\geqslant 0$，有

$$c_1\tilde{h}(t)\leqslant \eta_1+I_1+I_2+M(t),$$

其中 η_1（及以下的 $\eta_2\sim\eta_4$）是非负可积随机变量，$M(t)$ 是一实值连续局部鞅，$M(0)=0$；

$$I_1=\int_0^t V(s,\tilde{x}(s))\mathrm{d}\psi^{-\gamma}(s)\leqslant c_2\gamma\phi\int_0^t\tilde{h}(s)\mathrm{d}s$$
$$\leqslant \eta_2+c_2\gamma\phi(1+\kappa)^2\int_0^t h(s)\mathrm{d}s,$$
$$I_2=\int_0^t\psi^{-\gamma}(s)LV(s,\tilde{x}(s))\mathrm{d}s$$
$$\leqslant \eta_3+\Big(-a+\sum_j a_j\rho_j^\gamma+b\Big)\int_0^t h(s)\mathrm{d}s.$$

综上并用条件(5.5.42a)得 $c_1\tilde{h}(t)\leqslant\eta_4+M(t)$，然后用定理1.2.11(iii)即得所要证. □

类似地，对方程(5.5.23)可建立如下定理.

定理 5.5.12　设存在常数 $\kappa\in[0,1)$，$\lambda,\mu,\bar{\mu}\geqslant 0$，$\gamma>0$ 及函数 $\zeta(t)$，使得

$\psi^{-\gamma}\zeta(t) \in L^1(\mathbf{R}_+)$，且条件(5.5.25)及以下条件满足：

$$2[x-U(y)]^{\mathrm{T}}F(t,x,\bar{y})+|G(t,x,\bar{y})|^2$$
$$\leqslant \zeta(t)-\lambda|x|^2+\mu|y|^2+\bar{\mu}\psi^{-\gamma}(-\bar{\delta}(t))|\bar{y}|^2,\quad t\geqslant 0,\ x,\ y,\bar{y}\in\mathbf{R}^d. \quad (5.5.44)$$

设 $x(t)=x(t,\xi)(t\in\mathbf{R})$ 是方程(5.5.23)的一个解，$\int_{-\infty}^0\psi^{-\gamma}(\theta)\mathrm{E}|\xi(\theta)|^2\mathrm{d}\theta<\infty$. 若 $\psi(t)$ 单调减，

$$\gamma\phi\eta^{-1}(\eta^{1/2}+\kappa\rho^{\gamma/2})^2+\eta^{-1}\mu\rho^{\gamma}+\bar{\eta}^{-1}\bar{\mu}\leqslant\lambda, \quad (5.5.45\mathrm{a})$$

其中 ϕ 依式(5.5.4a)，$\eta,\bar{\eta},\rho$ 依式(5.5.24)，则式(5.5.43a)成立；若 $\psi(t)$ 单调增，

$$\eta^{-1}\mu+\bar{\eta}^{-1}\bar{\mu}\leqslant\lambda+\gamma\phi(1-\eta^{-1}\kappa)(1-\kappa), \quad (5.5.45\mathrm{b})$$

其中 ϕ 依式(5.5.4b)，则式(5.5.43b)成立.

最后，看一个应用指数鞅不等式的例子.

定理 5.5.13　设 $x(t)=x(t,\xi)$ 是方程(5.5.1)的一个解，$\forall t\geqslant 0,\tilde{x}(t)\neq 0$, a. s.；存在常数 $c>0,\kappa\in[0,1)$ 与 $V(t,x)\in C^{1,2}(\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^d)$，$\zeta(t)\in L^1(\mathbf{R}_+)$ 及在 $\delta=1$ 邻近有定义的连续函数 $\mu(\delta)$，$\mu=\mu(1)>0$，使得条件(5.5.37a)（以 μ 代 γ）及以下条件满足：

$$c|x|^2\leqslant V(t,x),\quad t\geqslant 0,x\in\mathbf{R}^d, \quad (5.5.46)$$

$$\frac{LV(t,\tilde{x}(t))}{V(t,\tilde{x}(t))}-\frac{\delta}{2}|Z(t)|^2\leqslant\zeta(t)+\mu(\delta)\psi_1(t),\quad t\geqslant 0, \quad (5.5.47)$$

其中 $Z(t)=V_x(t,\tilde{x}(t))g(t,x_t)/V(t,\tilde{x}(t))$. 假定当 $\gamma\approx\mu$ 时 $|\xi|^2_{\psi,\gamma}<\infty$, a. s.. 则当 $\psi(t)$ 单调减与单调增时，分别有式(5.5.43a)与(5.5.43b)成立，只是以 $\mu=\mu(1)$ 取代其中的 γ.

参考文献

龚光鲁. 1987. 随机微分方程引论. 北京:北京大学出版社.

郭雷. 1993. 时变随机系统——稳定性、估计与控制. 长春:吉林科学技术出版社.

胡适耕. 2006. 宏观经济的随机模型. 武汉:华中科技大学出版社.

胡宣达. 1986. 随机微分方程稳定性理论. 南京:南京大学出版社.

黄志远. 2001. 随机分析学基础. 第二版. 北京:科学出版社.

廖晓昕,毛学荣. 1997. 随机时滞Hopfied神经网络的均方指数稳定性. 华中理工大学学报, 25(6):95-97.

廖晓昕,毛学荣. 1997. 随机中立型微分方程的稳定性. 科学通报,42(10):1117-1118.

廖晓昕. 2000. 动力系统的稳定性理论和应用. 北京:国防工业出版社.

罗交晚,邹捷中,侯振挺. 2003. 比较原理与 Markov 调制的随机时滞系统的稳定性. 中国科学 A, 33(1):62-70.

沈轶,付莉红,廖晓昕. 1998. 具有可变时滞的随机系统的指数稳定性. 华中理工大学学报,10: 1-3.

沈轶,廖晓昕. 1999. 非线性随机时滞系统的鲁棒稳定性. 自动化学报,25(4):537-542.

沈轶,廖晓昕. 1999. 随机中立型泛函微分方程指数稳定的 Razumikhin 型定理. 科学通报,44 (24):2272-2275.

沈轶,张玉民,廖晓昕. 2002. 时滞非线性随机大系统的指数稳定性. 控制理论与应用,19(4):571-574.

沈轶,张玉民,廖晓昕. 2005. 中立型随机泛函微分方程的稳定性. 数学物理学报,25A(3):323-330.

沈轶,张玉民,廖晓昕. 2006. 中立型随机泛函微分方程的稳定性. 应用数学学报, 29(3):445-453.

沈轶等. 2000. 具有可变时滞的Hopfield型随机神经网络的全局指数稳定性. 数学物理学报, 20(3):400-404.

袁震东. 1991. 近代概率引论. 北京:科学出版社.

Abukhaled M I, Allen E J. 1998. Recursive integration method for approximate solution of stochastic differential equations. Int. J. Comput. Math., 66(1-2):53-66.

Adewumi D O, Jaiyesimi S B. 1986. Digital simulation of stochastic differential equations via stochastic integrals. Modelling, Simulation & Control A, 6(3):41-64.

Adomian G, Sibul L H, Rach R. 1983. Coupled nonlinear stochastic differential equations. J. Math. Anal. Appl., 92(2):427-434.

Alicki R, Rudnicki S, Sadowski S. 1992. Quantum stochastic differential equations. Acta Phys. Polon. B, 23(4):317-322.

Anderson W J. 1991. Continuous-time Markov Chains. New York: Springer-Verlag.

Ao P. 2004. Potential in stochastic differential equations: novel construction. J. Phys. A, 37(3): 25-

30.

Appleby J A D, Buckwar E. 2005. Noise induced oscillation in solutions of stochastic delay differential equations. Dyn. Systems Appl. ,14(2):175 - 197.

Appleby J A D, Kelly C. 2004. Oscillation and non-oscillation in solutions of nonlinear stochastic delay differential equations. Elect. Com. Prob. ,9:106 - 118.

Appleby J A D , Kelly C . 2004. Asymptotic and oscillatory properties of linear stochastic delay differential equations with vanish delay. Funct. Diff. Eqs. ,11(3 -4):235 -265.

Appleby J A D, Kelly C. 2005. Prevention of explosion in solutions of functional differential equations by noise perturbation. Dyn. systems Appl. ,14(1):15 -27.

Arató M. 2003. A famous nonlinear stochastic equation (Lotka-Volterra model with diffusion). Math. Comput. Modelling,38:709 - 726.

Arnold L. 1974. Stochastic Differential Equations. Theory and Applications. New York: John Wiley & Sons.

Arnold L, Horsthemke W, Stucki J W. 1979. The influence of external real and white noise on the Lotka - Volterra model. Biom. J. ,21(5):451 -471.

Artzrouni M, Reneke J. 1990. Stochastic differential equations in mathematical demography: a review. Appl. Math. Comput. ,38(1):7 -21.

Babuska I, Liu Kang Man, Tempone R. 2003. Solving stochastic partial differential equations based on the experimental data. Math. Models & Methods in Appl. Sci. ,13(3):415 -444.

Babuska I, Liu Kang Man. 2003. On solving stochastic initial-value differential equations. Math. Models & Methods in Appl. Sci. ,13(5):715 -745.

Babuska I, Tempone R, Zouraris G E. 2003. Galerkin finite element approximations of stochastic elliptic partial differential equations. SIAM J. Numer. Anal. ,42(2):800 -825.

Bahar A, Mao X. 2004. Stochastic delay Lotka-Volterra model. J. Math. Anal. Appl. ,292:364 - 380.

Bahar A, Mao X. 2004. Stochastic delay dynamics. Intern. J. Pure Appl. Math. ,11(4):377 -400.

Baker C T H, Buckwar E. 2005. Exponential stability in p- th mean of solutions, and of convergent Euler-type solutions, of stochastic delay differential equations. J. Comput. Appl. Math. , 184:404 - 427.

Baker C T H, Ford J M, Ford N J. 2004. Bifurcations in approximate solutions of stochastic delay differential equations. International Bifurcation and Chaos in Appl. Sci. Eng. ,14(9):2999 - 3021.

Banek T. 1999. Chaos expansion for the solutions of stochastic differential equations. Systems Control Lett. ,36(5):351 -358.

Barchielli A. 1993. Stochastic differential equations and a posteriori states in quantum mechanics. Intern. J. Theor. Phys. ,32(12):2221 -2233.

Barnett C , Goldstein S , Wilde I. 1994. Quantum stochastic integration and quantum stochastic differential equations. Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. ,116(3):535 -553.

Basak G K, Bisi A, Chosh M K. 1996. Stability of a random diffusion with linear drift. J. Math. Anal. Appl. ,202:604 -622.

Baxendale P. 1994. A stochastic Hopf bifurcation. Prob. Th. Rel. Fields,99:581 -616.

BaxendaleP, HenningE M. 1993d. Stabilization of a linear system. Random Comput. Dyn., 1(4): 395 -421.

Bell D R, Mohammed S E A. 1989. On the solution of stochastic differential equations via small delay. Sto. Sto. Rep., 29:293 -299.

Berman A, Plemmons R J. 1994. Nonnegative Matrices in the Mathmatical Sciences. New York: Springer-Verlag.

Bernard P, Fleury G. 2001. Convergence of numerical schemes for stochastic differential equations. Monte Carlo Methods Appl., 7(1 -2):35 -44.

Bernardin F, Schatzman M, Lamarque C H. 2004. Second-order multivalued stochastic differential equations on Riemannian manifolds. Proc. Roy. Soc. of London. Ser. A, 460(2051):3095 -3121.

Blythe S, Mao X, Liao X. 2001. Stability of stochastic delay neural networks. J. Franklin Inst., 338:481 -495.

Blythe S, Mao X, Shah A. 2001. Razumikhin-type theorem on stability of stochastic neural networks with delays. Sto. Anal. Appl., 19(1):233 -250.

Bogachev V L. 1995. Deterministic and stochastic differential equations in infinite-dimensional spaces. Acta Appl. Math., 40(1):25 -93.

Bokor, R H. 2003. Stochastically stable one-step approximations of solutions of stochastic ordinary differential equations. Appl. Numer. Math., 44(3):299 -312.

Boukas E K. 2005. Stochastic Hybrid Systems: Analysis and Design. Boston: Birkhauser.

Boukas E K. 2006. Stabilization of stochastic singular nonlinear hybrid systems. Nonl. Anal., 64(1): 217 -228.

Boukas E K, Hang H. 1999. Exponential stability of stochastic systems with Markovian jumping parameters. Automatica, 35:1437 -1441.

Boukas E K, Liu L Z. 2001. Robust stability and stability of Markov jump linear uncertain systems with mode dependent time delays. J. Optim. Theor. Appl., 209:587 -600.

Boukas E K, Yang H. 1999. Exponential stability of stochastic systems with Markovian jumping parameters. Automatica, 35:1437 -1441.

Boulanger C. 2000. Stabilization of a class of nonlinear composite stochastic systems. Sto. Anal. Appl., 18:723 -753.

Brandau M. 2002. Stochastic differential equations with nonlinear semigroups. ZAMM, 82(11 -12): 737 -743.

Brauer F. 2001. Castillo-Chavez C. Mathematical Model in Population Biology and Epidemiology. New York: Springer-Verlag.

Buckwar E. 2000. Introduction to the numerical analysis of stochastic delay differential equations. J. Comput. Appl. Math., 125(1 -2):297 -307.

Buckwar E, Shardlow T. 2005. Weak approximation of stochastic differential delay equations. IMA J. Numer. Anal., 25(1):57 -86.

Burrage K, Burrage P, Mitsui T. 2000. Numerical solutions of stochastic differential equations—implementation and stability issues. J. Comput. Appl. Math., 125(1 -2):171 -182.

Burrage K, Tian T. 2001. The composite Euler method for stiff stochastic differential equations. J. Comput. Appl. Math. , 131(1 - 2): 407 - 426.

Burrage K, Tian T. 2001. Stiffly accurate Runge-Kutta methods for stiff stochastic differential equations. Comput. Phys. Comm. , 142(1 - 3): 186 - 190.

Burrage P M, Burrage K. 2002. A variable stepsize implementation for stochastic differential equations. SIAM J. Sci. Comput. , 24(3): 848 - 864.

Burrage P M, Herdianna R, Burrage K. 2004. Adaptive stepsize based on control theory for stochastic differential equations. J. Comput. Appl. Math. , 171(1 - 2): 317 - 336.

Caraballo T, Real J, Shaikhet L. 2007. Method of Lyapnov functionals construction in stability of delay evolution equations. J. Math. Anal. Appl. , 334: 1130 - 1145.

Carbonell F, Jimenez J C, Biscay R J. 2005. A class of orthogonal integrators for stochastic differential equations. J. Comput. Appl. Math. , 182(2): 350 - 361.

Carletti M, Burrage K, Burrage P M. 2004. Numerical simulation of stochastic ordinary differential equations in biomathematical modeling. Math. Comput. Simulation, 64(2): 271 - 277.

Cassandras C G, Pepyne D L, Wand Y. 2001. Optimal control of a class of hybrid systems. IEEE Trans. Automat. Control, 46: 389 - 415.

Chandra J, Ladde G. 2004. Stability analysis of stochastic hybrid systems. Int. J. Hybrid Systems, 4: 179 - 198.

Constantin G. 2003. On some forward-backward stochastic differential equations of McShane type. Economic Computation and Economic Cybernetics Studies and Research, 36(1 - 4): 29 - 39.

Constantin G. 2004. The uniqueness of solutions of perturbed backward stochastic differential equations. J. Math. Anal. Appl. , 300: 12 - 16.

Costa O L V, Assampcao E O, Boukas E K. et al. 1999. Constrained quadratic state feedback control of discrete-time Markovian jump linear systems. Automatica, 35(4): 617 - 626.

Costa O L V, Boukas K. 1998. Necessary and sufficient condition for robust stability and stabilizability of continuous-time linear systems with Markoving jamps. J. Optim. Theor. Appl. , 99: 1155 - 1167.

Coutin L, Qian Z. 2000. Stochastic differential equations for fractional Brownian motions. Comptes Rendus Acad Sci Ser. I, 331(1): 75 - 80.

Da Prato G, Zabczyk J. 1992. Stochastic Equations in Infinite Dimensions. Cambridge Univ. Press.

Davis M. 1994. Linear Stochastic Systems. Chapman & Hall.

Deck T, Theting. 2004. Robust parameter estimation for stochastic differential equations. Acta. Appl. Math. , 84(3): 279 - 314.

Diaz-Guilera A. 1993. Nonlinear stochastic differential equations and self-organized criticality. Fractals, 1(4): 963 - 967.

Ding Deng, Zheng Shaoren. 2000. Stochastic differential equations with a stochastic reflecting boundary. Acta Scientiarum Natralium Univ. Sunyatseni, 39(4): 31 - 34.

Donati-Martin C. 1991. Stochastic differential equations in R with boundary conditions. Sto. and Sto. Reports, 35(3): 143 - 173.

Dorogovtsev A A. 2004. Stochastic differential equations and random measures on functional space.

Dokl. Akad. Nauk,399(3):303 - 306.

Drummond I T. 1992. Multiplicative stochastic differential equations with noise-induced transitions. J. Phys. A,25(8):2273 - 2296.

Du N H,Kon R,Sato K. Takeuchi Y. 2004. Dynamical behavior of Lotka-Volterra competition systems: Nonautonomous bistable case and the effect of telegraph noise. J. Comput. Appl. Math. ,120: 399 - 422.

Dushchin A A,Küchler U. 2004. On oscillations of the geometric Brownian motion with time-delayed drift. Stat. Prob. Lett. ,70:19 - 24.

El Tawil,Maqdy A. 2005. The approximate solutions of some stochastic differential equations using transformations. Appl. Math. Comput. ,164(1):167 - 178.

Espanol P. 1998. Stochastic differential equations for nonlinear hydrodynamics. Phys. A,248(1 - 2): 77 - 96.

Fagnola F,Wills S J. 2003. Solving quantum stochastic differential equations with unbounded coefficients. J. Funct. Anal. ,198(2):279 - 310.

Fedchenko N V,Prigarin S M. 2004. Boundary value problems for linear stochastic differential equations. Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling,19(6):507 - 525.

Florchinger P. 1997. Global stabilization of composite stochastic systems. Comput. Math. Appl. ,33: 127 - 135.

Florchinger P,Iggidr A,Sallet G. 1994. Stabilization of a class of nonlinear stochastic systems. Sto. Proces. Appl. ,50:235 - 243.

Freidlin M I,Wentzell A D. 1984. Random Perturbations of Dynamical System. Springer.

Friedman A. 1976. Stochastic Differential Equations and Applications. New York:Acad. Press.

Fuhrman M,Tessitore G. 2005. Generalized directional gradients,backward stochastic differential equations and mild solutions of semilinear parabolic equations. Appl. Math. Optim. ,51(3):279 - 332.

Gaeta G. 2000. Lie-point symmetries and stochastic differential equations. II. J. Phys. A,33(27): 4883 - 4902.

Gaeta G,Quintero N R. 1999. Lie-point symmetries and stochastic differential equations. J. Phys. A,32 (48):8485 - 8505.

Gard T C. 1984. Persistence in stochastic food web models. Bull. Math. Biol. ,46:357 - 370.

Gard T C. 1986. Stability of multispecies population models in random environments. Nonl. Anal. ,10: 1411 - 1419.

Gatarek D,Sokolowski J. 1992. Differential stability of solutions to optimal control problems for systems described by parabolic stochastic partial differential equations. Arch Control Sci. ,1(1 - 2):43 - 54.

Gihman I I, Skorohod A V. 1972. Stochastic Differential Equations. Berlin:Springer.

Glockner P. 1991. Quantum stochastic differential equations on * -bialgebras. Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. ,109(3):571 - 795.

Hale J K, Lunel S M V. 1993. Introduction to Functional Differential Equations. Springer.

Han Q L. 2002. Robust stability of uncertain delay - differential systems of neutral type. Automatica,

38(4):719 - 723.

Hasminskii R Z. 1967. Necessary and sufficient conditions for the asymptotic stability of linear stochastic systems. Theory Prob. Appl. ,12:144 - 147.

Hasminskii R Z. 1981. Stochastic Stability of Differential Equations. Sijthoff & Noordhoff.

Heunis A J. 1990. On the stochastic differential equations of filtering theory. Appl. Math. Comput. , 37(3):185 - 218.

Higham D J. 2001. An algorithmic introduction to numerical simulation of stochastic differential equations. SIAM Rev. ,43(3):525 - 546.

Hofmann N, Muller G T, Ritter K. 2001. The optimal discretization of stochastic differential equations. J. Complexity, 17(1):117 - 153.

Hofmann N, Muller G T, Ritter K. 2002. Linear vs standard information for scalar stochastic differential equations. J. Complexity, 18(2):394 - 414.

Hopfield J J. 1982. Neural networks and physical systems with emergent collect computational abilities. Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 79:2554 - 2558.

Horvath B R. 1999. Numerical methods for solving stochastic differential equations. Math. Comm. , 4(2):251 - 256.

Hou L, Miche A N. 2001. Stability preserving mappings for stochastic dynamic cal systems. IEEE trans. Automat. Control, 46(6):933 - 938.

Hurn A S, Lindsay K A. 1999. Estimating the parameters of stochastic differential equations. Math. Comput. Simulation, 48(4):373 - 384.

Hu S G, Liao X, Mao X. 2003. Stochastic Hopfield neural networks. J. Phys. A. ,36:2235 - 2249.

Hu Y, Yong J. 2000. Forward-backward stochastic differential equations with nonsmooth coefficients. Sto. Proces. Appl. ,87(1):93 - 106.

Isar A, Sandulescu A, Corciovei A. 1992. Stochastic differential equations for open quantum systems. Romanian J. Phys. ,37(8):749 - 761.

Itô K. 1944. Stochastic integral. Proc. Imperial Acad. Tokyo, 20:519 - 524.

Itô K. 1951. On stochastic differential equations. Men. Amer. Math. Soc. ,4:1 - 51.

Jankovic S, Ilic D. 2004. An analytic approximation of solutions of stochastic differential equations. Comput. Math. Appl. ,47(6):903 - 912.

Jankovic S, Jovanovic M. 2001. Perturbed stochastic hereditary differential equations with integral contractors. Comput. Math. Appl. ,42(6):871 - 881.

Jansons K M, Lythe G D. 2000. Efficient numerical solution of stochastic differential equations using exponential timestepping. J. Stat. Phys. ,100(5):1097 - 1109.

Jansons K M, Lythe G D. 2002. Exponential timestepping with boundary test for stochastic differential equations. SIAM J. Sci. Comput. ,24(5):1809 - 1822.

Ji Y, Chizeck H J. 1990. Controllability, stabilizability and continuous-time Markovian jump linear quadratic control. IEEE Trans. Automat. Control, 1990. 35:777 - 788.

Jumarie G. 1993. Stochastic differential equations with fractional Brownian motion input. Intern. J. Systems Sci. ,24(6):1113 - 1131.

Karatzas I, Shreve S E. 1988. Brownian Motion and Stochastic Calculus. New York: Springer-Verlag.

Kharitonov V L, Collato J, Mondié S. 2006. Exponential estimates for neutral time delay systems with multiple delays. Int. J. Robust Nonl. Control, 16: 71 - 84.

Kharitonov V L, Hinrichsen D. 2004. Exponential estimates for time delay systems. Systems Control Lett., 53(5): 395 - 405.

Kharitonov V L, Mondié S, Collado J. 2005. Exponential estimates for neutral time delay systems: an LMI approach. IEEE Trans. Autom. Control, 50(5): 666 - 670.

Kharitonov V L, Zhabko A P. 2003. Lyapunov-Krasovskii approach to the robust stability analysis of time-delay systems. Automatica, 39(1): 15 - 20.

Kleptsyna M L, Kloeden P E, Anh V V. 1998. Existence and uniqueness theorems for fBm stochastic differential equations. Problemy Peredachi Informatsii, 34(4): 51 - 61.

Kohatsu-Higa A, Leon J A. 1997. Anticipating stochastic differential equations of Stratonovich type. Appl. Math. Optim., 36(3): 263 - 289.

Kolmanovskii V. et al. 2003. Neutral stochastic differential delay equations with Markovian switching. Sto. Anal. Appl., 21(4): 839 - 867.

Kolmanovskii V, Shaikhet L. 2002. Construction of Lyapunov functionals for stochastic hereditary systems: a survey of some recent results. Math. Comput. Model., 36: 691 - 716.

Kolmanovskii V, Shaikhet L. 2002. Some peculiarities of the general method of Lyapunov functionals construction. Appl. Math. Lett., 3: 355 - 360.

Konakovi V, Mammen E. 2002. Edgeworth type expansions for Euler schemes for stochastic differential equations. Monte Carlo Methods and Appl., 8(3): 271 - 285.

Kunita H. 1982. On backward stochastic differential equatuions. Sto., 6(3): 293 - 313.

Kunita H. 1990. Stochastic Flows and Stochastic Differential Equations. Cambridge Univ. Press.

Lachowicz M. 1994. Stochastic differential equations for the kinetic and hydrodynamic equations. Nonl. Dyn., 5(3): 393 - 399.

Ladde G S. 1980. Lakshmikantham V. Random Differential Inequalities. Academic Press.

Lamba H. 2003. An adaptive timestepping algorithm for stochastic differential equations. J. Comput. Appl. Math., 161(2): 417 - 430.

LaSalle J P. 1968. Stability theory of ordinary differential equations. J. Diff. Eq., 4: 57 - 65.

Lepingle D. 1995. Euler scheme for reflected stochastic differential equations. Math. Comput. Simulation, 38(1): 119 - 126.

Lepingle D, Thao N T. 2004. Approximating and simulating multivalued stochastic differential equations. Monte Carlo Methods Appl., 10(2): 129 - 152.

Lewin M. 1986. On the boundedness recurrence and stability of solutions of an Itô equation perturbed by a Markov chain. Sto Anal. Appl., 4: 435 - 487.

Li B W, Pan J B. 2001. Global stochastic asymptotic stability of stochastic differential equations, J. Wuhan Univ., 47(3): 274 - 276.

Li Chunwah, Wu Shengchang, Liu Xiaoqing. 1998. Discretization of jump stochastic differential equations in terms of multiple stochastic integrals. J. Comput. Math., 16(4): 375 - 384.

Li R H, Meng H B, Chang Q. 2006. Exponential stability of numerical solutions to stachastic delay differehtial equations with Markovian switching. Appl. Math. Comput. ,174:1302 – 1313.

Li S, Dong B. 2005. Quasi-local vibration algorithm for damped stochastic differential equations. Chinese J. Comput. Phys. ,22(1):1 – 6.

Lian B, Hu S. 2006. Stochastic delay Gilpin-Ayala competition models. Sto. Dyn. ,6(4):561 – 576.

LianB , HuS , WangH . 2007 . Stability in stochastic Gilpin - Ayala competition models . Math . Appl . , 20(2):

Liao X, Li J. 1997. Stability in Gilpin-Ayala competition models with diffusion. Nonl. Anal. , 28: 1751 – 1758.

Liao X, Mao X. 1996. Exponential stability and instability of stochastic neural networks. Sto. Anal. Appl. ,14(2):165 – 185.

LiaoX , MaoX . 1996 . Stabilityofstochasticneuralnetworks . Neural , ParallelandSci . Comput . ,4:205 – 224.

Liao X, Mao X. 1996. Almost sure exponential stability of neutral differential difference equation with damped stochastic perturbations. J. URL,1(8):1 – 16.

Liao X, Mao X. 1997. Stability of neutral stochastic differential equations. Chin. Sci. Bull. ,42(13): 1143 – 1144.

Liao X, Mao X. 1997. Almost sure exponential stability of neutral stochastic differential difference equations. J. Math. Anal. Appl. ,212(2):554 – 570.

Liao X, Mao X. 1999. Exponential stability in mean square of neutral stochastic differential difference equations. Dyn. Cont. Discr. Impul. Syst. ,6(4):569 – 586.

Liao X, Mao X. 2002. Stability of large-scale neutral type stochastic differential equations. J. Math. Anal. Appl. ,276:545 – 560.

Lim, Andrew E B, Zhou X. 2002. Linear-quadratic control of backward stochastic differential equations. SIAM J. Contr. Optim. ,40(2):450 – 474.

Lin Q. 2002. Weak solution for stochastic differential equations with terminal conditions. Sci. in China, Ser. A,45(12):1518 – 1522.

Liptser R S, Shiryayev A N. 1989. Theory of Martingales. Dordrecht: Kluwer.

Liu K., Xia X. 1999. On the exponential stability in mean square of neutral stochastic functional differential equations. Systems Control Lett. ,37:207 – 215.

Liu Kunhui. 2000. Two optimal models associates with stochastic differential equations. J. North. Jiaotong Univ. ,24(2):57 – 64.

Liu X Q, Li C W. 2000. Weak approximations and extrapolations of stochastic differential equations with jumps. SIAM J. Numer. Anal. ,37(6):1747 – 1767.

Luo J W. 2006. Comparison principle and stability of Ito stochastic diffential delay equations with Poisson jump and Markovian switching. Nonl. Anal. ,64:253 – 262.

LuoQ , MaoX , ShenY . 2006 . New criteria on exponential stability of neutral stochastic differential delay equations. Systems Control Lett. ,55:826 – 834.

Makarov R N. 2003. Numerical solution of quasilinear parabolic equations and backward stochastic dif-

ferential equations. Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling, 18(5):397 - 412.

Mao X. 1989. Existence and uniqueness of the solutions of delay stochastic integral equations. Sto. Anal. Appl., 7(1):59 - 74.

Mao X. 1990. Eventual asymptotic stability for stochastic differential equations with respect to semimartingales. Quart. J. Math. Oxford, 41:71 - 77.

Mao X. 1991. Almost sure exponential stability for delay stochastic differential equations with respect to semimartingales Sto. Anal. Appl. 9(2):177 - 194.

Mao X. 1994. Exponential stability of stochastic differential equations. New York: Marcel Dekker Inc..

Mao X. 1995. Exponential stability of neutral stochastic functional differential equations. Systems Control Lett., 26:245 - 251.

Mao X. 1995. Adapted solutions of backward stochastic differential equations with non-Lipschitz coefficients. Sto. Proces. Appl., 58:281 - 292.

Mao X. 1996. Razumikhin-type theorems on exponential stability of stochastic functional differential equations. Sto. Proc. Appl., 65:233 - 250.

Mao X. 1996. Stochastic self-stabilization. Sto. Sto. Rep., 57:57 - 70.

Mao X. 1997. Stochastic Differential Equations and their Applications. Chichester: Horwood Publ..

Mao X. 1997. Razumikhin-type theorems on exponential stability of neutral stochastic functional differential equations. SIAM. J. Math. Anal., 28:389 - 401.

Mao X. 1999. LaSalle-type theorems for stochastic differential delay equations. J. Math. Anal. Appl., 236:350 - 369.

Mao X. 1999. Stability of stochastic differential equations with Markovian switching. Sto. Proces. Appl., 79(1):45 - 67.

Mao X. 1999. Stochastic functional differential equations with Markovian switching. Funct. Diff. Eqs., 6:375 - 396.

Mao X. 1999. Stochastic versions of the LaSalle theorem. J. Diff. Eqs., 153:175 - 195.

Mao X. 2000. Robustness of stability of stochastic differential delay equations with Markovian switching. Stability Control: Theory Appl., 3(1):48 - 61.

Mao X. 2000. The LaSalle-type theorems for stochastic functional differential equations. Nonl. Stud., 7:307 - 328.

Mao X. 2000. Asymptotic properties of neutral stochastic differehtial delay equations. Sto. Sto. Rep., 68:273 - 295.

Mao X. 2001. Attraction, stability and boundedness for stochastic differential delay equations. Nonl. Anal., 47(7):4795 - 4806.

Mao X. 2001. Some contributions to stochastic asymptotic stability and boundedness via multiple Lyapunov functions. J. Math. Anal. Appl., 260:325 - 340.

Mao X. 2002. Asymptotic stability for stochastic differential delay equations with Markovian switching. Funct. Diff. Eqs., 9(1 - 2):201 - 220.

Mao X. 2002. A note on the LaSalle-type theorems for stochastic differential delay equations. J. Math. Anal. Appl., 268:125 - 142.

Mao X. 2003. Numerical solutions of stochastic functional differential equations. LMS J. Comput. Math. ,6:141 - 161.

Mao X. 1998. Koroleva N, Rodkina A. Robust stability of uncertain stochastic differetial delay equations. Systens and Control Lett. ,35(5):325 - 336.

Mao X, Marion G, Renshaw E. 2002. Environmental noise suppresses explosion in population dynamics. Sto. Proces. Appl. ,97:95 - 110.

Mao X, Markus L. 1991. Energy bounds for nonlinear dissipative stochastic differential equations with respect to semimartingales. Sto. Sto. Rep. ,37:1 - 14.

Mao X, Matasav A, Piunovskiy A. 2000. Stochastic differential delay equations with Markovian switching. Bernoulli,6(1):73 - 90.

Mao X, Rodkina A, Koroleva N. 1998. Razumikhin-type theorems for stochastic functional differential equations. Funct. Diff. Eqs. ,5(1 - 2):195 - 211.

MaoX, SabanisS, RenshawE. 2003. AsymptoticbehaviourofthestochasticLotka-Volterramodel. J. Math. Anal. Appl. ,287:141 - 156.

Mao X, Selfribge C. 1999. Stability and instability of stochastic interval systems. Dyn. Systems Appl. , 8:271 - 286.

Mao X, Shaikhet L. 2000. Delay-dependent stability criteria for stochastic differential delay equations with Markovian switching. Stability and Control: Theory Appl. ,3(2):87 - 101.

Mao X, Yin G G, Yuan C G. 2007. Stabilization and destabilization of hybrid systems stochastic differential equations. Automatica,43:264 - 273.

Mao X, Yuan C, Zou J. 2005. Stochastic differential delay equations of population dynamics. J. Math. Anal. Appl. ,304:296 - 320.

Mao X, Yuan C. 2006. Stochastic Differential Equations with Markovian Switching. London: Imperial College Press.

Markus L, Weerasinghe A. 1988. Stochastic oscillators. J. Diff. Eqs. ,71(2):288 - 314.

Mikhajlov G A, Marchenko M A. 2001. Use of importance sampling on solving the stochastic differential equations. Dokl. Akad. Nauk,380(2):164 - 168.

Mondié S, Kharitonov V L. 2005. Exponential estimates retarded time-delay systems: an LMI approach. IEEE trans. Autom. Control,50(2):268 - 272.

Muranaka K. 1999. Simulation of one-dimensional Brownian motion by stochastic differential equations. J. Chem. Edu. ,76(7):994 - 998.

Nagasawa M, Tanaka H. 1999. Stochastic differential equations of pure-jumps in relativistic quantum theory. Chaos, Solitons and Fractals,10(8):1265 - 1280.

Nielsen J N, Madsen H. 2001. Applying the EKF to stochastic differential equations with level effects. Automatica,37(1):107 - 112.

Nils B, Gentz B. 2003. Geometric singular perturbation theory for stochastic differential equations. J. Diff. Eq. ,91(1):1 - 54.

Obata N. 1997. Quantum stochastic differential equations in terms of quantum white noise. Nonl. Anal. ,30(1):279 - 290.

Oksendal B. 1995. Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications. Springer.

Pakshin P V . 1997. Robust stability and stabilization for jumping stoshastic systems Nonl . Anal . , 30(5):2855 - 2866.

Pardoux E, Peng S G. 1990. Adapted solution of a backward stochastic differential equation. Systems and Control Lett. ,14:55 - 61.

Pardoux E , Peng S G . 1992. Backward stochastic differentials and quasilinear parabolic partial differential equations. Lect. Notes in Control and Inform. Sci. ,176:200 - 217.

Peng Shige, Shi Yufeng. 2000. Infinite horizon forward - backward stochastic differential equations. Sto. Proces. Appl. ,85(1):75 - 92.

Peng Shige, Shi Yufeng. 2003. A type of time-symmetric forward-backward stochastic differential equations. Comptes Rendus Acad. Sci. Ser. I,336(9):773 - 778.

Pettersson R. 2000. Projection scheme for stochastic differential equations with convex constraints. Sto. Proces. Appl. ,88(1):125 - 134.

Pinsky M A. 1988. Wihstutz V. Lyapunov exponents of nilponent Itô systems. Sto. ,25:43 - 57.

Platen E. 1999. An introduction to numerical methods for stochastic differential equations. Acta Numer. ,8:197 - 246.

Protter P E. 2003. Stochastic Integration and Differential Equations. 2ed. Springer.

Ramasubramanian S. 2002. Reflected backward stochastic differential equations in an orthant. Proc. Indian Acad. Sci. ,112(2):347 - 360.

Randjelovic' J, Jankovic' S. 2007. On the *p*th monent exponential stability criteria of neutral stochastic functional differential equations. J. Math. Anal. Appl. ,326:266 - 280.

Rao M M. 1997. Second order nonlinear stochastic differential equations. Nonl. Anal. ,30(5):3147 - 3151.

Razumikhin B S. 1956. On stability of systems with a deay. Prikl. Mat. Mekh. ,20(4):500 - 512.

Roch C. 2002. Difference methods for stochastic partial differential equations. ZAMM,82(11):821 - 830.

Santos L F, Escobar C O. 2000. Stochastic differential equations for the continuous spontaneous localization model. Modern Phys. Lett. A,15(30):1833 - 1842.

Schein O . 1999. Transient noise simulation with stochastic differential - algebraic equations . ZAMM , 79(3):S829 - 830.

Shaikhet L. 1996. Stability of stochastic hereditary systems with Markov switching. Theory of Sto. Proces. ,2(18):180 - 184.

Sharp K P. 1990. Stochastic differential equations in finance. Appl. Math. Comput. ,39:207 - 224.

Shen Y, Jiang M, Liao X. 2006. Asymptotic stabilities of stochastic functional differential equation. , Appl. Math. Mech. ,27(11):1577 - 1584.

Shen Y, Luo Q, Mao X. 2006. The improved LaSalle theovems for stochastic functional equations. J. Math. Anal. Appl. ,318:134 - 154.

Shi Zhengwei, Fu Yige. 2003. The application of backward stochastic differential equations to European option. J. National Univ. of Defense Tech. ,25(5):94 - 97.

Skorohod A V. 1989. Asymptotic Methods in the Theory of Stochastic Differential Equations. AMS Providence.

Shu H S, Wei G L. 2006. Robust exponential stability for uncertain stochastic linear systems with Markovian switching and time delay. Chinese J. Appl. Prob. Stat. ,22(2):184 - 194.

Smolyanov O G. 1994. A Holmgren theorem for stochastic differential equations. Vestnik Moskovskogo Univ. Ser. 1,1:54 - 59.

Soh C W, Mahomed F M. 2001. Integration of stochastic ordinary differential equations from a symmetry standpoint. J. Phys. A,34(1):177 - 192.

Stoyanov J. 2002. Moment problems related to the solutions of stochastic differential equations. Sto. Theory and Control. Proc. Workshop:459 - 469.

Svishchuk A V, Kazmerchuk Y I. 2002. Stability of stochastic delay equations of Itô form with jumps and Markovian switching and their applications in finance. Theor. Prob. Math. Stat. ,64:167 - 178.

Takeuchi Y, Du N H, Hieu N T, Sato K. 2006. Evolution of predator-prey systems described by a Lotka-Volterra equation under random environment. J. Math. Anal. Appl. ,323:938 - 957.

Teng Z, Yu Y. 2000. Some new results of nonautonomous Lotka-Volterra competitive systems with delay. J. Math. Anal. Appl. ,241:254 - 275.

Tian T, Burrage K. 2001. Implicit Taylor methods for stiff stochastic differential equations. Appl. Numer. Math,38(1):167 - 185.

Tian T, Burrage K. 2002. Two-stage stochastic Runge-Kutta methods for stochastic differential equations. BIT,42(3):625 - 643.

Timmer J. 2000. Parameter estimation in nonlinear stochastic differential equations. Chaos, Solitons and Fractals,11(15):2571 - 2578.

Tocina A, Ardanuy R. 2002. Runge-Kutta methods for numerical solution of stochastic differential equations. J. Comput. Appl. Math. ,138(2):219 - 241.

Twardowska K. 1996. Wong-Zakai approximations for stochastic differential equations. Acta Appl. Math, 43(3):317 - 359.

Uboe J. 2000. Measurements of ordinary and stochastic differential equations. Sto. Proces. Appl. , 89(2):315 - 331.

VillarroelJ. 2003. On solutions to Ito stochastic differential equations. J. Comput. Appl. Math. , 158(1):225 - 232.

Villarroel J. 2004. On representations of solutions to certain stochastic differential equations. J. Comput. Methods in Sci. Eng. ,4(1):97 - 103.

Wan Zidong. 2006. Exponential stability of delayed recurrent neural networks. With Markovian jumping parameters. Phys. Lett. A,356:346 - 352.

Wang L, Sun J. 2005. Mean square exponential stability of stochastic delayed Hopfield neural networks. Phys. Lett. A,343(4):306 - 318.

Wang Z, Qian H, Burnham K J. 2002. On stabilization of bilinear uncertain time-delay stochastic systems with Markovian Jumping parameters. IEEE Trans. Automat. Control:640 - 646.

Wei F Y, Wang K. 2007. The existence and uniqueness of the solution for stochastic functional differential equations with infinite delay. J. Math. Anal. Appl., 331: 516 – 531.

Weiss J B, Knobloch E. 1990. A stochastic return map for stochastic differential equations. J. Stat. Phys., 58(5): 863 – 883.

Wu Shujin, Han Dong, Meng Xianzhang. 2004. p-Moment stability of stochastic differential equations with jumps. Appl. Math. Comput., 152(2): 505 – 519.

Xiu D B, Karniadakis G E. 2002. The Wiener-Askey polynomial chaos for stochastic differential equations. SIAM J. Sci. Comput., 24(2): 619 – 644.

Xu S Y, Shi P, Chu Y M et al. 2006. Robust stochastic stabilization and H^∞ control of uncertain neutral stochastic time-delay systems. J. Math. Anal. Appl., 314: 1 – 16.

Yong J. 1999. Linear forward-backward stochastic differential equations. Appl. Math. Optim., 39(1): 93 – 119.

Yuan C. 2005. Stability in terms of two measures for stochastic differential equations with Markovian switching. Sto. Anal. Appl., 23: 1259 – 1276.

Yuan C, Glover W. 2006. Approximate solutions of stoshastic differential delay equations with Markovian switching. J. Comput. Appl. Math., 194: 207 – 226.

Yuan C, Mao X. 2003. Asymptotic stability in distribution of stochastic differential equations with Markovian switching. Sto. Proces. Appl., 103: 277 – 291.

Yuan C, Mao X. 2004. Robust stability and controllability of stochastic differential delay equations with Markovian switching. Automatica., 40: 343 – 354.

Yuan C, Mao X. 2006. Attraction and stochatic asymptotic stability and boundedness of stochastic functional differential equations with respect to semimartingales. Sto. Anal. Appl., 24: 1169 – 1184.

Yuan C, Lygeros J. 2005. Stabilization of a class of stochastic differential equations with Markovian switching. Systems Control Lett., 54: 819 – 833.

Zhang S, Chen M P. 1998. A new Razumikhin theorem for delay difference equations. Comput. Math. Appl., 36: 405 – 412.

Zhu Jinghao, Li Kangdi. 2003. An iterative method for solving stochastic Riccati differential equations for the stochastic LQR problem. Optim. Methods and Software, 18(6): 721 – 732.

名词索引

中文名词按汉语拼音字母顺序排列. 名词后的数字指出该名词首次出现的页数;当标出几个页数时,表明该名词在几个不同的意义上使用.

A ~ B

半鞅收敛定理 ………… 17
本性非负矩阵 ………… 241
比较原理 ………… 228
标准 Brown 运动 ………… 20
不稳定化方程 ………… 75

C ~ F

测度 ………… 1
常数变易法 ………… 56
持久性 ………… 200
重对数律 ………… 21
大数定律 ………… 17
单调性条件 ………… 42

G ~ I

概率测度 ………… 1
概率空间 ………… 1
广义 Feynman-Kac 公式 ………… 335
广义 Itô 公式 ………… 242
轨道 ………… 11,13
轨道估计 ………… 42
轨道性质 ………… 11

J

基本矩阵 ………… 56
几何 Brown 运动 ………… 62
几乎必然 ………… 2
迹范数 ………… 31
渐近估计 ………… 42
阶梯过程 ………… 23
径向无界 ………… 66
局部解 ………… 90
局部 Lipschitz 条件 ………… 42
局部鞅 ………… 16
局部有界 ………… 131
矩 ………… 5
矩不等式 ………… 6,32
矩估计 ………… 42
矩 ψ^γ 稳定 ………… 133
矩 ψ^γ 有界 ………… 167
绝对矩 ………… 5
均方连续 ………… 14
均方收敛 ………… 13
均方 ψ^γ 稳定 ………… 133
均方指数稳定 ………… 64

K ~ N

可测过程 ………… 13
可测映射 ………… 3
可积过程 ………… 13
扩散过程 ………… 19
扩散算子 ………… 43
扩散系数 ………… 19
零解 ………… 63

O ~ T

漂移系数 ………… 19

期望 ……………………………… 5
全局随机渐近稳定 ………………… 63
上鞅 ……………………………… 14
算子范数 ………………………… 31
随机变量 ………………………… 3
随机过程 ………………………… 10
随机渐近稳定 …………………… 63
随机连续 ………………………… 14
随机 Liouville 公式 ……………… 58
随机神经网络 …………………… 290
随机收敛 ………………………… 13
随机微分 ………………………… 27
随机 Wronski 行列式 …………… 58
随机稳定 ………………………… 63
条件期望 ………………………… 8
停时 ……………………………… 12
停时定理 ………………………… 15

U～Z

完备概率空间 …………………… 2
稳定化方程 ……………………… 75
稳定矩阵 ………………………… 244
无差别 …………………………… 11
无界性 …………………………… 192
无限时滞 ………………………… 337
下鞅 ……………………………… 14
狭义线性方程 …………………… 58
线性方程 ………………………… 55
线性增长条件 …………………… 39
协方差 …………………………… 5
修正 ……………………………… 11
鞅 ………………………………… 14
鞅表示定理 ……………………… 26
鞅不等式 ………………………… 15
一致 Lipschitz 条件 ……………… 38
有界变差过程 …………………… 13
右连左极过程 …………………… 13
正态变量 ………………………… 19
正整数解 ………………………… 265
指数鞅不等式 …………………… 32
中立型 SFDE …………………… 110
状态空间 ………………………… 10

其他

a. s. = 几乎必然 ………………… 2
a. s. 多项式稳定 ………………… 146
a. s. ψ^γ 稳定 ……………………… 146
a. s. ψ^γ 有界 ……………………… 179
a. s. 收敛 ……………………… 13
a. s. 指数稳定 …………………… 64
a. s. 指数不稳定 ………………… 64
Borel-Cantelli 引理 ……………… 3
Borel 集族 ……………………… 3
Borel 可测 ……………………… 4
Brown 桥 ……………………… 62
Brown 运动 ……………………… 20
BSDE(倒向随机微分方程) ……… 324
BDG 不等式 …………………… 33
Chebyshev 不等式 ……………… 6
Doob 不等式 …………………… 15
Feller 性质 ……………………… 18
Feynman-Kac 公式 ……………… 53
Girsanov 变换 ………………… 235
Girsanov 定理 ………………… 234
Gronwall 不等式 ……………… 35
Hölder 不等式 ………………… 6
Itô 公式 ………………………… 27
Itô 过程 ………………………… 27
Itô 积分 ………………………… 22
Itô 微分 ………………………… 27

Jensen 不等式 ………………………… 6
K 型函数 ……………………………… 65
L^p 范数 ……………………………… 5
L^p 连续……………………………… 14
L^p 收敛……………………………… 13
Langevin 方程 ……………………… 61
LaSalle 型定理 …………………… 208
Liapunov 不等式 ………………… 6
Liapunov 函数 …………………… 65
Liapunov 指数 …………………… 47
LMI 方法 ………………………… 159
Lotka-Voltrra 系统 ……………… 306
LV 系统(Lotka-Volterra 系统)…… 306
M 矩阵 ……………………………… 244
Markov 过程 ……………………… 8
Markov 调制 ……………………… 241
Ornstein-Uhlenbeck 过程………… 61
R&D 模型 ………………………… 322
Razumikhin 定理 ………………… 95
SDDE(随机延迟微分方程) ……… 83
SFDE(随机泛函微分方程) ……… 82
Solow 模型………………………… 318
σ 代数(σ 域) …………………… 1
σ 代数流 ………………………… 11

《大学数学科学丛书》已出版书目

1. 代数导引　万哲先　著　2004 年 8 月
2. 代数几何初步　李克正　著　2004 年 5 月
3. 线性模型引论　王松桂等　编著　2004 年 5 月
4. 抽象代数　张勤海　著　2004 年 8 月
5. 变分迭代法　曹志浩　编著　2005 年 2 月
6. 现代偏微分方程导论　陈恕行　著　2005 年 3 月
7. 抽象空间引论　胡适耕　张显文　编著　2005 年 7 月
8. 近代分析基础　陈志华　编著　2005 年 7 月
9. 抽象代数——理论、问题与方法　张广祥　著　2005 年 8 月
10. 混合有限元法基础及其应用　罗振东　著　2006 年 3 月
11. 孤子引论　陈登远　编著　2006 年 4 月
12. 矩阵不等式　王松桂等　编著　2006 年 5 月
13. 算子半群与发展方程　王明新　编著　2006 年 8 月
14. Maple 教程　何青　王丽芬　编著　2006 年 8 月
15. 有限群表示论　孟道骥　朱萍　著　2006 年 8 月
16. 遗传学中的统计方法　李照海　覃　红　张　洪　编著　2006 年 9 月
17. 广义最小二乘问题的理论和计算　魏木生　著　2006 年 9 月
18. 多元统计分析　张润楚　2006 年 9 月
19. 几何与代数导引　胡国权　编著　2006 年 10 月
20. 特殊矩阵分析及应用　黄廷祝等　编著　2007 年 6 月
21. 泛函分析新讲　定光桂　著　2007 年 8 月
22. 随机微分方程　胡适耕　黄乘明　吴付科　著　2008 年 5 月

(O-3092.0101)

- 系统阐述理论基础，堪为初学者导引
- 深入开拓学科前沿，特供研究者参考
- 精心分析优选模型，可资应用者借鉴

ISBN 978-7-03-021380-8

9 787030 213808 >

定 价：68.00 元

销售分类建议：高等数学